10

Integration

Der Flächeninhalt eines Rechtecks bestimmt sich aus dem Produkt der Längen seiner beiden Seiten. Doch wie bestimmt sich der Inhalt krummlinig begrenzter Flächen, beispielsweise einer Ellipse? Oder die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion und der Abszisse, wenn diese Funktion nicht konstant ist? Die naheliegende, bereits von Archimedes angewandte Idee ist, solche Flächen durch Rechteckflächen – deren Inhalt wir ja kennen – zu approximieren, die immer kleiner werden. Wenn alles gut geht, konvergiert die Summe ihrer Flächeninhalte gegen einen Wert, den wir als den Inhalt dieser krummlinig begrenzten Fläche *definieren* können.

Wir werden daher das Integral zuerst für sogenannte *Treppenfunktionen* definieren. Diese sind stückweise konstant, und ihr Integral ist nichts anderes als die mit Vorzeichen gewichtete Summe der zugehörigen Rechteckflächen. Dieses Integral repräsentiert somit unseren vertrauten Flächenbegriff.

Anschließend geht es darum, dieses Integral auf Funktionen auszudehnen, die sich durch Treppenfunktionen approximieren lassen. Diese Approximation kann allerdings auf unterschiedliche Weisen erfolgen, und führt zu unterschiedlichen Integralbegriffen wie dem Cauchy-, Riemann- oder Lebesgueintegral.

Wir beschränken uns hier auf das Cauchyintegral, auch Regelintegral genannt, da es für unsere unmittelbaren Zwecke ausreicht und am leichtesten zu definieren ist. Hier werden solche Funktionen betrachtet, die sich *gleichmäßig* durch Treppenfunktionen approximieren lassen.

10.1 Treppenfunktionen

Definition *Eine Zerlegung Z eines Intervalls $[a,b]$ ist ein Tupel $(t_0,..,t_n)$ reeller Zahlen mit*

$$a = t_0 < t_1 < .. < t_n = b.$$

Eine Funktion $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es eine derartige Zerlegung von $[a,b]$ und reelle Zahlen $c_1,..,c_n$ gibt, so dass

$$\varphi \mid (t_{k-1},t_k) = c_k, \qquad k = 1,..,n.$$

Der Raum aller Treppenfunktionen auf $[a,b]$ wird mit T_a^b bezeichnet. ⋊

Eine Treppenfunktion nimmt natürlich auch an den Teilungspunkten selbst gewisse Werte an. Diese gehen aber nicht in das zu definierende Integral ein und erhalten deshalb auch keine eigene Bezeichnung. Wir schreiben daher kurz

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{(t_k,t_{k-1})}.$$

Da eine Treppenfunktion nur endlich viele verschiedene Werte annimmt, ist sie auch beschränkt. Es gilt also

$$\|\varphi\|_{[a,b]} = \sup_{t\in[a,b]} |\varphi(t)| < \infty$$

und damit $T_a^b \subset B_a^b \coloneqq B([a,b])$.

Verschiedene Treppenfunktionen φ und ψ basieren im Allgemeinen auf verschiedenen Zerlegungen. Fasst man aber die Teilungspunkte ihrer Zerlegungen zu einer gemeinsamen *Verfeinerung* zusammen, so lassen sich beide über derselben Zerlegung definieren. Dann ist auch $\lambda\varphi + \mu\psi$ wieder eine Treppenfunktion. Somit bilden alle Treppenfunktionen auf $[a,b]$ einen Vektorraum.

Abb 1

Eine Treppenfunktion

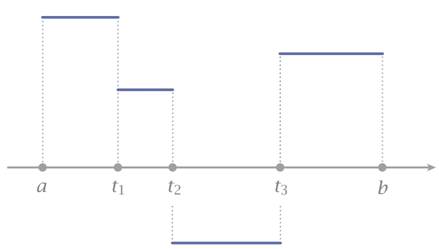
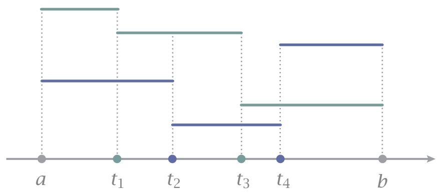


Abb 2

Gemeinsame Zerlegung zweier Treppenfunktionen



Notiz *Der Raum T_a^b aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a,b]$ ist ein reeller Untervektorraum von B_a^b.* ⋊

Die folgende Definition des Integrals einer Treppenfunktion verallgemeinert unsere Vorstellung des Flächeninhalts eines Rechtecks.

1 **Definition und Notiz** *Das Integral einer Treppenfunktion*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{(t_{k-1},t_k)}, \qquad a = t_0 < t_1 < .. < t_n = b,$$

ist definiert als

$$J_a^b(\varphi) := \sum_{k=1}^{n} c_k (t_k - t_{k-1}).$$

Dieses Integral hängt nicht von der Darstellung von φ ab. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Seien φ_1 und φ_2 zwei Treppenfunktionen in T_a^b, die als Funktionen auf $[a,b]$ identisch sind, also in jedem Punkt denselben Wert annehmen, aber auf verschiedenen Zerlegungen Z_1 respektive Z_2 beruhen. Aus diesen Zerlegungen können wir immer eine gemeinsame Verfeinerung Z bilden. Der Übergang von Z_1 oder Z_2 zu Z besteht darin, in endlich vielen Schritten jeweils einem Teilintervall (t_{k-1}, t_k) einen weiteren Teilungspunkt $t_l \in (t_{k-1}, t_k)$ hinzuzufügen. Bei einem solchen Schritt wird in der Summe J_a^b der Term $c_k(t_k - t_{k-1})$ ersetzt durch

$$c_k(t_k - t_l) + c_k(t_l - t_{k-1}).$$

Dies ändert die Integralsumme offensichtlich nicht. Somit hängt $J_a^b(\varphi)$ nur von der Treppenfunktion selbst und nicht von ihrer Darstellung ab. ⟩⟩⟩⟩⟩

⊳ A. Die charakteristische Funktion χ_J eines beliebigen Intervalls $J \subset [a,b]$ ist eine Treppenfunktion, und $J_a^b(\chi_J) = |J|$ ist die Länge dieses Intervalls.

B. Die Signum- und die Gaußklammerfunktion, eingeschränkt auf jedes beliebige Intervall $[a,b]$, sind Treppenfunktionen.

C. Eine Funktion φ_0, die nur an endlich vielen Punkten in $[a,b]$ nicht verschwindet, ist eine Treppenfunktion, und es ist $J_a^b(\varphi_0) = 0$. ⊲

Das Integral ordnet jeder Treppenfunktion in T_a^b eine reelle Zahl zu. Wir erhalten also eine Funktion

$$J_a^b : \; T_a^b \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto J_a^b(\varphi).$$

Da es sich um eine *reellwertige* Funktion auf einem *Funktionenraum* handelt, spricht man in klassischer Terminologie auch von einem *Funktional*.

2 **Satz** *Das Funktional $J_a^b : T_a^b \to \mathbb{R}$ hat folgende Eigenschaften:*

(i) *Linearität:*

$$J_a^b(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda J_a^b(\varphi) + \mu J_a^b(\psi).$$

(ii) *Monotonie:*

$$\varphi \leqslant \psi \quad \Rightarrow \quad J_a^b(\varphi) \leqslant J_a^b(\psi).$$

(iii) *Normierung:*

$$\varphi = \chi_{[a,b]} \quad \Rightarrow \quad J_a^b(\varphi) = b - a.$$

(iv) *Lipschitzstetigkeit:*

$$\left| J_a^b(\varphi) - J_a^b(\psi) \right| \leqslant (b-a) \, \|\varphi - \psi\|_{[a,b]} . \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Wählen wir für φ und ψ eine Darstellung mit einer gemeinsamen Zerlegung von $[a,b]$, so folgen die ersten zwei Behauptungen aus der Definition 1 von J_a^b. Ebenfalls aus der Definition folgt

$$\begin{aligned} |J_a^b(\varphi)| &= \left| \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} c_k (t_k - t_{k-1}) \right| \\ &\leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} |c_k| \, (t_k - t_{k-1}) \\ &\leqslant \max \{ |c_1|, .., |c_n| \} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (t_k - t_{k-1}) \leqslant \|\varphi\|_{[a,b]} \, (b-a). \end{aligned}$$

Wegen der Linearität von J_a^b folgt damit auch

$$|J_a^b(\varphi) - J_a^b(\psi)| = |J_a^b(\varphi - \psi)| \leqslant \|\varphi - \psi\|_{[a,b]} \, (b-a).$$

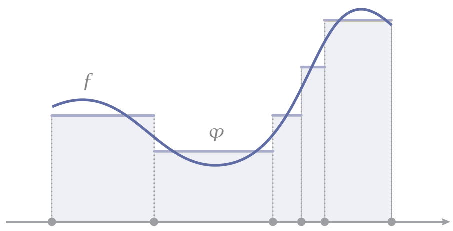
Die dritte Behauptung ist offensichtlich. ⟩⟩⟩⟩⟩

Für Treppenfunktionen haben wir somit ein Integral definiert, das unseren Vorstellungen entspricht. Dies sind aber noch nicht die Funktionen, die uns eigentlich interessieren – sie sind ja nicht einmal stetig. Dies erreichen wir jedoch mit einer *stetigen Fortsetzung* des Funktionals J_a^b auf den Raum aller Funktionen, die sich durch Treppenfunktionen gleichmäßig approximieren lassen.

10.4

Abb 3

Regelfunktion f und approximierende Treppenfunktion φ



10.2 Das Cauchyintegral

Definition und Notiz *Eine Funktion $f \in B_a^b$ ist eine Regelfunktion genau dann, wenn es eine Folge (φ_n) von Treppenfunktionen in T_a^b gibt, die gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen f konvergiert. Das Cauchyintegral einer solcher Funktion ist definiert als*

$$J_a^b(f) := \lim J_a^b(\varphi_n)$$

und ist unabhängig von der Wahl der approximierenden Folge (φ_n). Der Raum aller Regelfunktionen auf $[a,b]$ wird mit R_a^b bezeichnet. ⋊

⟪⟪ Angenommen, es gilt $\varphi_n \rightrightarrows f$ und $\psi_n \rightrightarrows f$ für zwei Folgen in T_a^b. Dann folgt $\|\varphi_n - \psi_n\|_{[a,b]} \to 0$ und damit [2]

$$|J_a^b(\varphi_n) - J_a^b(\psi_n)| = |J_a^b(\varphi_n - \psi_n)| \leqslant (b-a)\,\|\varphi_n - \psi_n\|_{[a,b]} \to 0.$$

Also ist $\lim J_a^b(\varphi_n) = \lim J_a^b(\psi_n)$, und das Integral ist wohldefiniert. ⟫⟫

Dies ist im Moment eine sehr abstrakte Definition. Weder wissen wir, welche Funktionen genau Regelfunktionen sind, noch wie deren Integral zu bestimmen ist. Diese beiden Probleme werden wir in den nächsten Abschnitten behandeln.

Bemerkung Funktionalanalytisch betrachtet sind wir folgendermaßen vorgegangen. Der Raum T_a^b aller Treppenfunktionen auf $[a,b]$ ist ein reeller, aber *nicht abgeschlossener* Unterraum des Banachraumes B_a^b aller beschränkten Funktionen auf $[a,b]$, versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{[a,b]}$. Sein Abschluss ist der Raum aller Grenzwerte von Cauchyfolgen in T_a^b, also der Raum R_a^b:

$$T_a^b \subset (T_a^b)^- = R_a^b \subset B_a^b.$$

Das Funktional $J_a^b\colon T_a^b \to \mathbb{R}$ ist lipschitzstetig bezüglich dieser Norm und besitzt daher eine *eindeutige lipschitzstetige Fortsetzung* auf den Abschluss,

$$\bar{J}_a^b\colon\ R_a^b \to \mathbb{R}.$$

Der Einfachheit halber bezeichnen wir diese wieder mit demselben Symbol. ⊸

Wir notieren nun einige elementare Eigenschaften dieses Integrals auf R_a^b.

3 **Permanenzsatz** *Das Cauchyintegral*

$$J_a^b : R_a^b \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto J_a^b(f)$$

hat dieselben Eigenschaften wie seine Einschränkung auf T_a^b, also Linearität, Monotonie, Normierung und Lipschitzstetigkeit. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ *Linearität:* Sind f und g gleichmäßige Limites der Treppenfunktionen φ_n respektive ψ_n, so ist $\lambda f + \mu g$ der gleichmäßige Limes der Treppenfunktionen $\lambda\varphi_n + \mu\psi_n$. Dann gilt aufgrund der Linearität auf T_a^b und der üblichen Grenzwertsätze

$$\begin{aligned} J_a^b(\lambda f + \mu g) &= \lim J_a^b(\lambda\varphi_n + \mu\psi_n) \\ &= \lim\,(\lambda J_a^b(\varphi_n) + \mu J_a^b(\psi_n)) \\ &= \lambda \lim J_a^b(\varphi_n) + \mu \lim J_a^b(\psi_n) \\ &= \lambda J_a^b(f) + \mu J_a^b(g). \end{aligned}$$

Monotonie: Wegen der Linearität des Funktionals genügt es zu zeigen, dass für $f \in R_a^b$ mit $f \geqslant 0$ auch $J_a^b(f) \geqslant 0$. Nun, gilt $\varphi_n \rightrightarrows f$ und $f \geqslant 0$, so gilt auch

$$\varphi_n^+ \rightrightarrows f, \qquad \varphi_n^+ \coloneqq \max\,(\varphi_n, 0) \geqslant 0.$$

Die φ_n^+ sind ebenfalls Treppenfunktionen, und es ist $J_a^b(\varphi_n^+) \geqslant 0$. Also ist auch

$$J_a^b(f) = \lim J_a^b(\varphi_n^+) \geqslant 0.$$

Normierung: Hier gibt es nichts Neues zu zeigen.

Lipschitzstetigkeit: Das ist eine Übungsaufgabe A-2. ⟩⟩⟩⟩⟩

4 **Intervalladditivität** *Sei $c \in (a, b)$. Dann gilt*

$$f \in R_a^b \quad \Leftrightarrow \quad f|_{[a,c]} \in R_a^c \wedge f|_{[c,b]} \in R_c^b,$$

und in diesem Fall gilt weiter $J_a^b(f) = J_a^c(f) + J_c^b(f)$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Für Treppenfunktionen φ ist offensichtlich, dass

$$\varphi \in T_a^b \quad \Leftrightarrow \quad \varphi|_{[a,c]} \in T_a^c \wedge \varphi|_{[c,b]} \in T_c^b$$

sowie $J_a^b(\varphi) = J_a^c(\varphi) + J_c^b(\varphi)$. Gegebenenfalls fügt man c als weiteren Teilungspunkt hinzu. Entsprechendes gilt dann auch für die gleichmäßigen Limites von Treppenfunktionen. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} J_a^b(f) &= \lim J_a^b(\varphi_n) \\ &= \lim\,(J_a^c(\varphi_n) + J_c^b(\varphi_n)) \\ &= \lim J_a^c(\varphi_n) + \lim J_c^b(\varphi_n) = J_a^c(f) + J_c^b(f). \end{aligned}$$ ⟩⟩⟩⟩⟩

5 **Zusatz** *Mit den Vereinbarungen $J_a^a(f) = 0$ und $J_b^a(f) = -J_a^b(f)$ für $a < b$ gilt*

$$J_a^b(f) = J_a^c(f) + J_c^b(f)$$

für beliebige a, b, c und jede Regelfunktion f, die auf dem kleinsten, alle Integrationsgrenzen umfassenden Intervall definiert ist. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Dies ist eine Routinerechnung. Für $c < a < b$ haben wir beispielsweise $_4$

$$J_c^b(f) = J_c^a(f) + J_a^b(f).$$

Mit der Zusatzvereinbarung $_5$ ist dies äquivalent mit

$$J_a^b(f) = J_c^b(f) - J_c^a(f) = J_a^c(f) + J_c^b(f). \qquad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

Beginnend mit dem nächsten Satz verwenden wir die auf Leibniz zurückgehende Schreibweise für Integrale, die aus einem stilisierten S für *Summe* besteht.

Definition *Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar genau dann, wenn sie eine Regelfunktion auf $[a,b]$ ist, also zu R_a^b gehört. Ihr Integral mit den Integrationsgrenzen a und b ist dann*

$$\int_a^b f \coloneqq J_a^b(f). \qquad ⋊$$

Die Intervalladditivität schreibt sich damit

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

für jede Funktion f, die auf einem alle Integrationsgrenzen umfassenden Intervall integrierbar ist.

Dreiecksungleichung *Ist f auf $[a,b]$ integrierbar, so auch $|f|$, und es gilt*

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|. \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist f gleichmäßiger Limes der Treppenfunktionen φ_n, so ist $|f|$ gleichmäßiger Limes der Funktionen $|\varphi_n|$. Da diese ebenfalls Treppenfunktionen sind, ist auch $|f|$ eine Regelfunktion. Für jede Treppenfunktion φ_n gilt nun offensichtlich mit der entsprechenden Zerlegung

$$\left| \int_a^b \varphi_n \right| = \left| \sum_{k=1}^n c_k (t_k - t_{k-1}) \right| \leqslant \sum_{k=1}^n |c_k| \, (t_k - t_{k-1}) = \int_a^b |\varphi_n|.$$

Gehen wir zum Limes $n \to \infty$ über $_{5.9}$, so erhalten wir die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

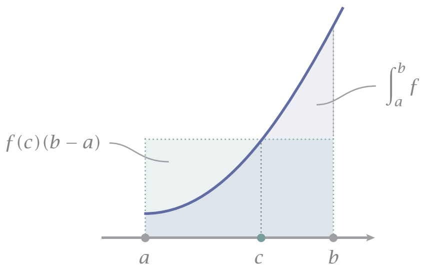


Abb 4

Zum Mittelwertsatz der Integralrechnung mit $p \equiv 1$

6 **Mittelwertsatz der Integralrechnung** *Seien f und p integrierbar auf $[a,b]$, außerdem sei f stetig und p nichtnegativ. Dann existiert ein $c \in [a,b]$, so dass*

$$\int_a^b fp = f(c) \int_a^b p. \quad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Aufgrund ihrer Stetigkeit nimmt die Funktion f auf $[a,b]$ ihr Minimum m und Maximum M an $_{7.16}$. Es gilt dann $m \leqslant f \leqslant M$ auf $[a,b]$. Wegen $p \geqslant 0$ gilt dann auch $mp \leqslant fp \leqslant Mp$ auf $[a,b]$. Mit der Monotonie des Integrals $_{2,3}$ folgt

$$m \int_a^b p \leqslant \int_a^b fp \leqslant M \int_a^b p.$$

Ist nun $\int_a^b p = 0$, so ist folglich auch $\int_a^b fp = 0$, und die Behauptung gilt für jedes $c \in [a,b]$. Andernfalls ist $\int_a^b p > 0$ und damit

$$m \leqslant w \coloneqq \left(\int_a^b p\right)^{-1} \int_a^b fp \leqslant M.$$

Nach dem Zwischenwertsatz von Bolzano gibt es ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = w$. Das ergibt die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

7 **Vertauschungssatz** *Eine Cauchyfolge (f_n) in R_a^b ist konvergent, und es gilt*

$$\int_a^b \lim f_n = \lim \int_a^b f_n. \quad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Dies folgt aus der Definition des Regelintegrals. Eine Cauchyfolge (f_n) in R_a^b bezüglich $\|\cdot\|_{[a,b]}$ ist auch eine Cauchyfolge im umgebenden Banachraum B_a^b und hat dort einen Grenzwert $f \in B_a^b$. Da aber R_a^b in B_a^b abgeschlossen ist, ist auch $f \in R_a^b$, also integrierbar. Die Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integral ist dann gerade die Stetigkeit des Funktionals J_a^b auf R_a^b. ⟩⟩⟩⟩⟩

10.3 Regelfunktionen

Im Folgenden charakterisieren wir Regelfunktionen durch eine leicht zu verifizierende Eigenschaft. Zunächst eine einfache Feststellung.

8 **Satz** *Eine Regelfunktion besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei f der gleichmäßige Limes einer Folge (φ_n) in T_a^b. Jede Treppenfunktion φ_n hat nur endlich viele Unstetigkeitsstellen. Die Menge S der Unstetigkeitsstellen *aller* φ_n zusammengenommen ist somit abzählbar ${}_{\text{A-3.18}}$. Auf $[a,b] \setminus S$ ist nun jedes φ_n stetig. Als gleichmäßiger Limes der φ_n ist dann f auf dieser Menge ebenfalls stetig ${}_{7.45}$. ⟩⟩⟩⟩⟩

9 **Satz** *Eine Regelfunktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ besitzt in jedem Punkt von $[a,b]$ einseitige Grenzwerte. Das heißt, auf $[a,b)$ existieren alle rechtsseitigen Grenzwerte f_+, und auf $(a,b]$ alle linksseitigen Grenzwerte f_- von f.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir betrachten den linksseitigen Grenzwert einer Funktion $f \in R_a^b$ in einem Punkt $c \in (a,b]$. Sei dazu (t_n) eine Folge in $[a,b]$ mit $t_n \nearrow c$, und sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Treppenfunktion $\varphi \in T_a^b$ mit

$$\|f - \varphi\|_{[a,b]} < \varepsilon/2. \tag{1}$$

Diese ist auf einem kleinen, *offenen* Intervall $(c - \delta, c)$ links von c konstant, unabhängig davon, ob c ein Teilungspunkt der zugehörigen Zerlegung ist oder nicht. Wegen $t_n \nearrow c$ gibt es dazu ein $N \geqslant 1$, so dass

$$\varphi(t_n) = \varphi(t_m), \qquad n, m \geqslant N.$$

Mit (1) gilt dann auch

$$|f(t_n) - f(t_m)| \leqslant |f(t_n) - \varphi(t_n)| + |\varphi(t_m) - f(t_m)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da es für jedes ε ein solches N gibt, bildet $f(t_n)$ eine Cauchyfolge. Ihr Grenzwert hängt nicht von (t_n) ab, denn ist (t_n') eine weitere solche Folge, so zeigt dasselbe Argument, dass $(f(t_n) - f(t_n'))$ eine Nullfolge bildet. Also existiert der linksseitige Grenzwert

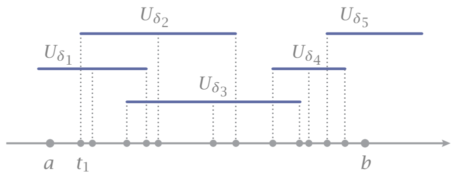
$$f_-(c) = \lim_{t \nearrow c} f(t).$$

Für rechtsseitige Grenzwerte $f_+(c) = \lim_{t \searrow c} f(t)$ argumentiert man analog. ⟩⟩⟩⟩⟩

Von diesem Satz gilt auch die Umkehrung. Für den Beweis benötigen wir noch den folgenden Spezialfall eines Satzes über kompakte Mengen.

Abb 5

Endliche Teilüberdeckung und Zerlegung Z



10 **Überdeckungslemma von Heine-Borel** *Sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall und $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine beliebige offene Überdeckung von $[a,b]$, das heißt, eine Familie offener Intervalle mit*

$$[a,b] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda .$$

Dann enthält diese Familie auch eine endliche Teilüberdeckung von $[a,b]$. Das heißt, es gibt endlich viele Intervalle $I_{\lambda_1}, .., I_{\lambda_m}$, so dass

$$[a,b] \subset \bigcup_{1\leqslant i\leqslant m} I_{\lambda_i} .$$

Man sagt, »jede offene Überdeckung von $[a,b]$ enthält eine endliche Teilüberdeckung«. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Angenommen, es gibt *keine* solche endliche Teilüberdeckung. Wir zeigen, dass es dann eine fallende Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$[a,b] =: J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset ..$$

mit Länge

$$|J_n| = 2^{-n}\,|J_0| , \qquad n \geqslant 0,$$

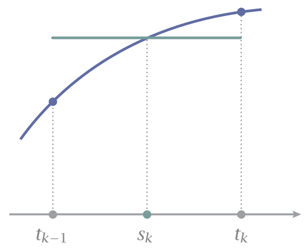
gibt, die alle ebenfalls keine endliche Teilüberdeckung besitzen. Für $J_0 = [a,b]$ entspricht dies der Annahme. Besitzt nun J_n für ein $n \geqslant 0$ keine endliche Teilüberdeckung, so besitzt mindestens eine der beiden abgeschlossenen Hälften von J_n ebenfalls keine. Wählen wir diese als J_{n+1}, so erhalten wir das nächste abgeschlossene Intervall dieser Folge.

Wir erhalten somit eine *Intervallschachtelung*, deren Durchschnitt genau einen Punkt $p \in [a,b]$ enthält. Dieser ist in wenigstens einem Intervall I_{λ_p} der Überdeckung enthalten. Da I_{λ_p} aber offen ist, enthält es alle Intervalle J_n mit n hinreichend groß. Das heißt, diese Intervalle J_n werden sogar von nur *einem* Intervall I_{λ_p} der Familie überdeckt. Dies ist ein Widerspruch zur Konstruktion der J_n. ⟩⟩⟩⟩⟩

11 **Satz** *Die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ besitze in jedem Punkt von $[a,b]$ einseitige Grenzwerte. Dann ist f der gleichmäßige Limes von Treppenfunktionen.* ⋊

Abb 6

Approximation durch konstante Funktion auf $[t_{k-1}, t_k]$



⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $\varepsilon > 0$. Zu jedem Punkt $c \in [a,b]$ existiert aufgrund der Existenz der einseitigen Grenzwerte eine Umgebung $U_\delta(c)$, so dass

$$|f(u) - f(v)| < \varepsilon$$

für alle $u, v \in U_\delta(c) \cap [a,b]$, die beide auf *derselben Seite* von c liegen. Dabei hängt δ vom Punkt c ab.

Die Familie $(U_\delta(c))_{c\in[a,b]}$ bildet eine offene Überdeckung von $[a,b]$. Nach dem Lemma von Heine-Borel [10] besitzt diese eine endliche Teilüberdeckung. Es gibt also endlich viele $U_{\delta_i}(c_i)$, so dass

$$[a,b] \subset U_{\delta_1}(c_1) \cup .. \cup U_{\delta_m}(c_m).$$

Sei $Z = (t_0, .., t_n)$ diejenige Zerlegung von $[a,b]$, die aus allen Mittel- und Endpunkten dieser m Intervalle bestehen, die innerhalb von $[a,b]$ liegen, zuzüglich der Punkte a und b selbst. Jedes Zerlegungsintervall (t_{k-1}, t_k) gehört dann entweder zu einer linken oder einer rechten Hälfte eines dieser m Intervalle, da deren Mittelpunkte zu den Teilungspunkten gehören. Somit gilt auf jedem Teilungsintervall

$$|f(u) - f(v)| < \varepsilon, \qquad u, v \in (t_{k-1}, t_k). \tag{2}$$

Dazu definieren wir nun $\varphi \in T_a^b$ durch

$$\varphi|_{(t_{k-1},t_k)} = f(s_k), \qquad s_k = \frac{t_{k-1} + t_k}{2}.$$

Außerdem setzen wir der Vollständigkeit halber $\varphi(t_k) = f(t_k)$ für $0 \leqslant k \leqslant n$. Dann gilt wegen (2) auf jedem Zerlegungsintervall

$$\|f - \varphi\|_{[t_{k-1},t_k]} \leqslant \|f - f(s_k)\|_{(t_{k-1},t_k)} < \varepsilon.$$

Also gilt insgesamt

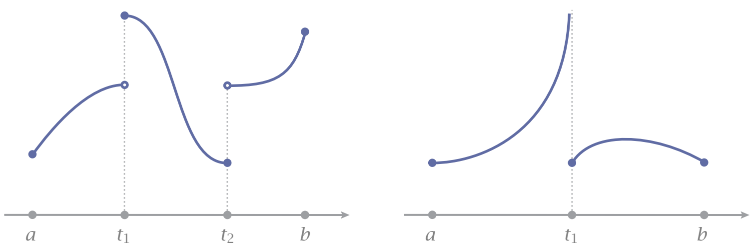
$$\|\varphi - f\|_{[a,b]} < \varepsilon.$$

Da für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches φ existiert, ist die Behauptung bewiesen. ⟩⟩⟩⟩⟩

Zusammengefasst [9, 11] erhalten wir folgende

10.11

Abb 7 Stückweise, und nicht stückweise stetige Funktion



12 **Charakterisierung der Regelfunktionen** *Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion genau dann, wenn sie in jedem Punkt des Intervalls $[a,b]$ einseitige Grenzwerte besitzt. Insbesondere sind stetige, stückweise stetige und monotone Funktionen Regelfunktionen und damit integrierbar.* ⋊

Dabei heißt eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *stückweise stetig*, wenn es eine Zerlegung $(t_0,..,t_n)$ von $[a,b]$ gibt, so dass die Einschränkungen $f\,|(t_{k-1},t_k)$ für $1 \leqslant k \leqslant n$ stetig sind *und* einseitige Grenzwerte in allen Endpunkten besitzen.

A. Die Gaußklammer und die Signumfunktion sind auf jedem abgeschlossenen Intervall integrierbar. Sie sind ja auch Treppenfunktionen.

B. Die Thomaefunktion ist integrierbar A-7.

C. Die Dirichletfunktion δ ist auf *keinem* nichttrivialen Intervall integrierbar A-8.

10.4 Der Hauptsatz

Wir wissen nun, welche Funktionen auf abgeschlossen Intervallen im Sinne von Cauchy integrierbar sind. Jetzt geht es darum, eine brauchbare Methode zu finden, um deren Integrale auch zu bestimmen.

Die Idee ist, das Integral einer stetigen Funktion f *als Funktion der rechten Intervallgrenze* zu betrachten. Auf diese Weise erhält man eine differenzierbare Funktion F mit $F' = f$. Man spricht von einer *Stammfunktion von* f. Auswertung einer solchen Stammfunktion f zwischen den Grenzen von $[a,b]$ ergibt dann das Integral von f über $[a,b]$.

Um diese Idee auch für Regelfunktionen umzusetzen, benötigen wir noch die *rechts-* und *linksseitige Ableitung* einer Funktion f,

$$f'_+(t) \coloneqq \lim_{h \searrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

und

$$f'_-(t) \coloneqq \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

wenn diese Grenzwerte existieren. Offensichtlich ist f in einem inneren Punkt c differenzierbar genau dann, wenn dort links- und rechtsseitige Ableitung existieren und übereinstimmen. In diesem Fall ist $f'_-(t) = f'(t) = f'_+(t)$.

Definition *Eine Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion einer Regelfunktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, wenn F in jedem Punkt von I einseitige Ableitungen besitzt und*

$$F'_+ = f_+, \qquad F'_- = f_-$$

auf I gilt. In einem Randpunkt von I wird dabei nur der jeweilige einseitige Grenzwert betrachtet. ⋊

Besonders übersichtlich ist der Fall einer stetigen Funktionen.

Notiz *Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig, so ist jede Stammfunktion F von f stetig differenzierbar, und es gilt $F' = f$ auf ganz I.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist F Stammfunktion der stetigen Funktion f, so ist überall

$$F'_- = f_- = f = f_+ = F'_+.$$

Also ist $F'_- = F'_+$ auf I, somit F differenzierbar, und $F' = f$. Außerdem folgt hieraus die Stetigkeit von F'. ⟩⟩⟩⟩⟩

Stammfunktionen sind *nicht eindeutig.* Ist F eine Stammfunktion, so ist es auch $F + c$ für jede reelle Konstante c. Auf einem *Intervall* ist dies aber die einzig mögliche Unbestimmtheit:

13 **Lemma** *Auf einem Intervall unterscheiden sich verschiedene Stammfunktionen einer Regelfunktion nur durch eine additive Konstante.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Seien G und H zwei Stammfunktionen derselben Regelfunktion f. Dann besitzt auch $G - H$ in jedem Punkt einseitige Ableitungen – das ist eine leichte Übung –, und es gilt

$$(G - H)'_+ = G'_+ - H'_+ = f_+ - f_+ = 0.$$

Entsprechendes gilt für linksseitige Grenzwerte. Also ist $G - H$ sogar differenzierbar mit $(G - H)' = 0$. Aufgrund des Monotoniesatzes 8.11 ist $G - H$ auf dem Intervall I konstant. ⟩⟩⟩⟩⟩

Die fundamentale Beobachtung ist nun, dass man eine Stammfunktion einer Regelfunktion f erhält, indem man das Integral über f als *Funktion der oberen Grenze* betrachtet.

14 **Stammfunktionensatz** *Sei f auf I integrierbar und $c \in I$ ein beliebiger Punkt. Dann definiert*

$$\Phi(t) \coloneqq \int_c^t f, \qquad t \in I,$$

eine Stammfunktion $\Phi \colon I \to \mathbb{R}$ von f. Diese ist außerdem lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L = \|f\|_I$. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Ist f auf I integrierbar, so auch auf jedem Teilintervall von I 4. Die Funktion Φ ist daher für jedes $t \in I$ definiert. Aus der Additivität des Integrals 5 ergibt sich

$$\Phi(v) - \Phi(u) = \int_c^v f - \int_c^u f = \int_u^v f, \qquad u, v \in I.$$

Für $u < v$ folgt hieraus mit der Dreiecksungleichung

$$|\Phi(v) - \Phi(u)| = \left| \int_u^v f \right| \leqslant \int_u^v |f| \leqslant \|f\|_I (v - u).$$

Also ist Φ L-lipschitz mit $L = \|f\|_I$. Mit $u = t$ und $v = t + h$ ist ferner

$$\frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f.$$

Aufgrund des Riemannschen Lemmas 15 – das wir gleich beweisen – besitzt der Ausdruck auf der rechten Seite die einseitigen Grenzwerte $f_+(t)$ respektive $f_-(t)$. Also besitzt Φ die entsprechenden einseitigen Ableitungen, und es gilt

$$\Phi'_\pm(t) = f_\pm(t).$$

Somit ist Φ eine Stammfunktion von f. ⟩⟩⟩⟩

15 **Riemannsches Lemma** *Ist $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt*

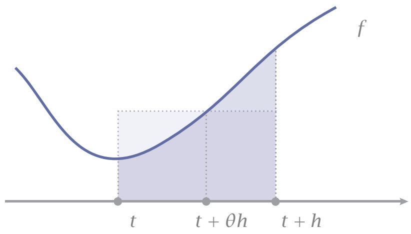
$$\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f = f_+(t), \qquad \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} f = f_-(t)$$

für jeden Punkt $t \in [a,b)$ respektive $t \in (a,b]$. Ist f im Punkt t stetig, so gilt insbesondere

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f = f(t). \quad ⋊$$

Abb 8

Zum Hauptsatz



⟪⟪ Wir betrachten den rechtsseitigen Limes in einem Punkt $t \in [a,b)$. Sei $h > 0$ so klein, dass auch $t+h \in [a,b]$. Dann ist

$$f_+(t) = f_+(t) \cdot \frac{1}{h}\int_t^{t+h} 1 = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f_+(t).$$

Also gilt, für $h > 0$,

$$\left| f_+(t) - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f \right| = \left| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} (f_+(t) - f) \right| \leqslant \frac{1}{h}\int_t^{t+h} |f_+(t) - f|\,.$$

Aufgrund der Definition des rechtsseitigen Grenzwerts existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass

$$|f_+(t) - f(s)| < \varepsilon, \qquad t < s < t + \delta.$$

Zusammen mit der vorangehenden Ungleichung erhalten wir also

$$\left| f_+(t) - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f \right| \leqslant \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \varepsilon = \varepsilon, \qquad 0 < h < \delta.$$

Da zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$ existiert, folgt

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f = f_+(t).$$

Für $t \in (a,b]$ und $h > 0$ mit $t - h \in [a,b]$ argumentiert man entsprechend.

Ist f im Punkt t sogar stetig, so ist $f_-(t) = f(t) = f_+(t)$, und die beiden Grenzwerte im Riemannschen Lemma 15 sind gleich $f(t)$. ⟫⟫

Bemerkung Ist f auf I stetig, so gilt überall

$$\Phi'(t) = \left(\int_c^t f \right)' = f(t), \qquad t \in I.$$

Dies folgt übrigens auch aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung 6, denn für stetiges f gilt ja

$$\frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f = f(t + \theta h) \to f(t), \qquad h \to 0.$$

In diesem Sinne sind Differenzieren und Integrieren *inverse Operationen.* ⊸

A. Die Signumfunktion ist auf jedem kompakten Intervall integrierbar, und eine Stammfunktion ist

$$\Phi(t) = \int_0^t \operatorname{sgn} = \begin{Bmatrix} t, & t \geqslant 0 \\ -t, & t < 0 \end{Bmatrix} = |t|\,.$$

Offensichtlich gilt $\Phi'(t) = |t|' = \operatorname{sgn} t$ für $t \neq 0$ sowie $\Phi'_{\pm}(0) = \operatorname{sgn}_{\pm}(0) = \pm 1$.

B. Eine Stammfunktion der Betragsfunktion ist

$$\int_0^t |s| = \frac{1}{2} t\,|t| = \frac{1}{2} t^2 \operatorname{sgn}(t).$$

Der vorangehende Satz eröffnet nun die Möglichkeit, Integrale mithilfe von Stammfunktionen zu berechnen.

16 **Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung** *Ist f auf $[a,b]$ integrierbar und F eine beliebige Stammfunktion von f, so gilt*

$$\int_a^b f = F\Big|_a^b \coloneqq F(b) - F(a).$$

Für die Funktion Φ des Stammfunktionensatzes 14 gilt aufgrund ihrer Definition

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_c^b f - \int_c^a f = \int_a^b f.$$

Jede andere Stammfunktion F von f unterscheidet sich von Φ aber nur durch eine additive Konstante 13, die sich in der Differenz aufhebt. Also ist auch

$$F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f.$$

A. Mit der Stammfunktion $|\cdot|$ für die Signumfunktion gilt

$$\int_a^b \operatorname{sgn} = |t|\Big|_a^b = |b| - |a|\,.$$

B. $$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_1^4 = 2.$$

Ist f stetig differenzierbar, so ist f selbst Stammfunktion seiner Ableitung f'. Es gilt also folgender Spezialfall.

Korollar *Ist f auf $[a,b]$ stetig differenzierbar, so gilt*

$$\int_a^b f' = f\Big|_a^b.$$

Wegen des Hauptsatzes wird eine Stammfunktion auch als *unbestimmtes Integral* bezeichnet, während das Integral *mit* Intervallgrenzen *bestimmtes Integral* genannt wird. Genauer gilt folgende Sprachregelung.

Definition *Das unbestimmte Integral einer stetigen Funktion f auf einem Intervall ist die Familie*

$$\int f \coloneqq \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

aller Stammfunktionen von f auf diesem Intervall. ⋊

Gewöhnlich schreibt man dafür einfach $F + c$. In Formelsammlungen wird auch die Konstante c oft weggelassen. Unbestimmte Integral erhält man beispielsweise, indem man Ableitungsformeln ›rückwärts‹ liest.

A. $\displaystyle\int \mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t + c, \qquad \int \frac{1}{t} = \log t + c.$

B. $\displaystyle\int \cos t = \sin t + c, \qquad \int \sin t = -\cos t + c.$

C. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + c, \qquad \int \frac{1}{1+t^2} = \arctan t.$

10.5 Integrationsregeln

Die Bestimmung von Integralen beruht auf der Bestimmung von Stammfunktionen, also einer Lösung der Gleichung $F' = f$ zu gegebenem f. Jede Differenziationsregel liefert damit eine Integrationsregel, indem man sie ›rückwärts‹ liest. Insbesondere folgen aus der Produkt- und Kettenregel die Regeln der partiellen Integration und der Substitution, die wir nun formulieren. Der Einfachheit halber gehen wir von stetig differenzierbaren respektive stetigen Funktionen aus.

Von nun an verwenden wir die klassische *Leibnizsche Integralnotation*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

die vor allem bei der Substitutionsregel zweckmäßig ist. Dabei ist die Integrationsvariable, ähnlich wie ein Summationsindex, frei wählbar. Es ist also

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Partielle Integration *Sind f und g auf $[a,b]$ stetig differenzierbar, so gilt*

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t. \qquad \rtimes$$

Entsprechend gilt für unbestimmte Integrale

$$\int f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(t)g(t) - \int f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Eine äquivalente Formulierung ist

$$\int f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = F(t)g(t) - \int F(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

mit einer Stammfunktion F von f. Eine additive Konstante müssen wir hier nicht notieren, weil auf beiden Seiten ein unbestimmtes Integral steht.

⟨⟨⟨⟨⟨ Die Integrale existieren, da die Integranden nach Voraussetzung stetig sind. Also gilt

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_a^b (f'g + fg')(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (fg)'(t)\,\mathrm{d}t = (fg)\Big|_a^b.$$

Daraus folgt die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

▷ A.

$$\int t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = t\mathrm{e}^t - \int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + c = (t-1)\mathrm{e}^t + c,$$

also beispielsweise

$$\int_0^1 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (t-1)\mathrm{e}^t\Big|_0^1 = 1.$$

B.

$$\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \cos t\cos t\,\mathrm{d}t = \sin t\cos t + \int \sin^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Mit $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ folgt hieraus

$$\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \sin t\cos t + t - \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Also ist

$$2\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = t + \sin t\cos t + c.$$

So erhält man zum Beispiel

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{t+\sin t\cos t}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

10.18

c. Gelegentlich hilft es, einen neutralen Faktor 1 ›aufzuleiten‹. Für den Logarithmus erhält man auf diese Weise

$$\begin{aligned}\int \log t \,\mathrm{d}t &= \int 1 \cdot \log t \,\mathrm{d}t \\ &= t\log t - \int t \log' t \,\mathrm{d}t = t\log t - \int 1 \,\mathrm{d}t = t\log t - t + c.\end{aligned}$$

Zum Beispiel ist

$$\int_1^{\mathrm{e}} \log t \,\mathrm{d}t = (t\log t - t)\Big|_1^{\mathrm{e}} = 1.$$

Mit wiederholter partieller Integration erhält man auch die Taylorsche Formel mit Restglied in Integralform. Wegen der Wichtigkeit dieses Beispiels formulieren wir das Ergebnis als Satz.

17 **Satz von Taylor mit Integralrest** *Für $f \in C^{n+1}(I)$ und $a, a+h \in I$ gilt*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + R_a^n f(h)$$

mit dem Integralrest

$$R_a^n f(h) = \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(a+th) \,\mathrm{d}t.$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Der Beweis erfolgt durch Induktion. Ist f stetig differenzierbar, so gilt aufgrund des Hauptsatzes

$$\begin{aligned}f(a+h) - f(a) &= f(a+th)\Big|_0^1 \\ &= \int_0^1 (f(a+th))' \,\mathrm{d}t = h\int_0^1 f'(a+th) \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Der letzte Term ist gerade $R_a^0 f(h)$, und wir erhalten damit die Behauptung für $n = 0$. Gilt die Formel nun für ein $n \geqslant 0$, so ergibt partielle Integration

$$\begin{aligned}&\frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(a+th) \,\mathrm{d}t \\ &\quad = -\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} (1-t)^{n+1} f^{(n+1)}(a+th)\Big|_0^1 \\ &\qquad\qquad + \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^1 (1-t)^{n+1} f^{(n+2)}(a+th) \,\mathrm{d}t \\ &\quad = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} h^{n+1} + R_a^{n+1} f(h).\end{aligned}$$

⟩⟩⟩⟩⟩

18 **Substitutionsregel** *Ist φ stetig differenzierbar auf $I = [a, b]$ und f stetig auf dem Bildintervall $\varphi(I)$, so gilt*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

für das bestimmte Integral, und

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F \circ \varphi + c$$

für das unbestimmte Integral mit einer beliebigen Stammfunktion F von f. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Für eine beliebige Stammfunktion F von f gilt

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi'.$$

Daraus folgt die Gleichung für das unbestimmte Integral. Für das bestimmte Integral erhält man

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b (F \circ \varphi)'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= F \circ \varphi\Big|_a^b = F\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

mit zweimaliger Anwendung des Hauptsatzes. ⟩⟩⟩⟩⟩

Die einfache Anwendung der Substitutionsregel besteht darin zu erkennen, dass der Integrand aus der Anwendung der Kettenregel hervorgegangen ist und das Integral daher von der Form

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

In diesem Fall setzt man direkt $\varphi(x) = t$. Gemäß der Substitutionsregel ist dann $\mathrm{d}t$ durch $\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ zu ersetzen. *Formal* ergibt sich dies mit der Leibnizschen Notation, indem man

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} = \varphi'(x)$$

schreibt und zu $\mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ ›auflöst‹ [1]. Jetzt muss man nur noch die Integrationsgrenzen mit φ abbilden, und man erhält die rechte Seite der Substitutionsregel.

[1] Eine rigorose Begründung dieser Schreibweise liefert der Formalismus der Differenzialformen, siehe ›Noch mehr Analysis‹.

▹ A. Im unbestimmten Integral

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

ist der Zähler bis auf einen Faktor die Ableitung der Funktion unter der Wurzel. Wir können daher die Substitutionsregel mit $t = \varphi(x) = 1 + x^2$ anwenden:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}.$$

Mit der Stammfunktion von $\sqrt{\cdot}$ 8.2 erhalten wir

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{t} + c = \sqrt{1+x^2} + c.$$

Für das bestimmte Integral gilt dann

$$\int_a^b \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+x^2}\,\Big|_a^b.$$

B. Im Integral $\int \frac{\log u}{u}\,\mathrm{d}u$ ist $\frac{1}{u}$ die Ableitung von $\log u$. Mit $t = \log u$ erhalten wir

$$\int \frac{\log u}{u}\,\mathrm{d}u = \int t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 + c = \frac{1}{2}\log^2 u + c.$$

C. Es ist

$$\int \tan\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = -\log(\cos\varphi) + c.$$ ◃

Die ›nicht so einfache‹ Anwendung der Substitutionsregel besteht darin, in einem Integral

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$$

die gegebene Integrationsvariable t so durch eine neue zu ersetzen, dass sich der Integrand vereinfacht. Die richtige Substitution kann schnell zum Ziel führen, die falsche jedoch vollends ins Dickicht. Hier wird das Integrieren teilweise zu einer Kunst, die Erfahrung und Übung erfordert. Man setzt also $t = \varphi(x)$ mit einer – hoffentlich geeigneten – stetig differenzierbaren Funktion φ. Genau wie zuvor ist dann $\mathrm{d}t$ durch $\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ zu ersetzen. Schließlich ist noch ein Intervall $[a,b]$ zu finden, dass von φ auf $[\alpha,\beta]$ abgebildet wird. Das heißt, es ist

$$\varphi(a) = \alpha, \qquad \varphi(b) = \beta$$

zu lösen. Dann gilt wieder

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nun braucht es nur noch etwas Übung … .

▹ A. Im Integral

$$\int t\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$$

schreiben wir versuchsweise $1+t=x^2$. Es ist dann $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$, und wir erhalten

$$\int t\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \int (x^2-1)x\cdot 2x\,\mathrm{d}x = 2\int (x^4-x^2)\,\mathrm{d}x.$$

Dies ist nun elementar lösbar. Im bestimmten Integral sind die Integrationsgrenzen noch entsprechend zu transformieren, eine Grenze $t_\star$ geht dabei über in $\sqrt{1+t_\star}$. Man erhält

$$\int_a^b t\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\int_{\sqrt{1+a}}^{\sqrt{1+b}} (x^4-x^2)\,\mathrm{d}s = \frac{2}{15}\,(3x^5-5x^3)\Big|_{\sqrt{1+a}}^{\sqrt{1+b}}.$$

B. Betrachte

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Mit der Substitution $t=\sin x$ und damit $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$ wird

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 x}\,\cos x\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

also die Fläche des halben Einheitskreises. Analog erhält man

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}u = \pi.$$

Dies kann man allerdings auch direkt rechnen:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t\,\Big|_{-1}^{1} = \pi.$$

C. Typische Anwendungen der Substitutionsregel sind die Translation und die Streckung der Integrationsvariablen. Mit $\lambda > 0$ und $n \geqslant 1$ gilt

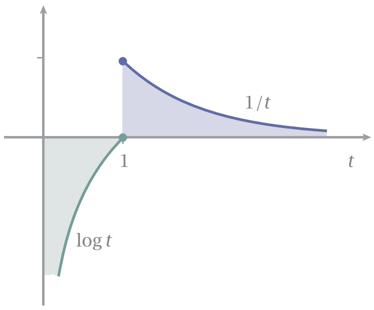
$$\int_a^b f(t+c)\,\mathrm{d}t = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad x = t+c,$$

$$\int_a^b f(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \lambda^{-1}\int_{\lambda a}^{\lambda b} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad x = \lambda t,$$

$$\int_a^b f(t^n)t^{n-1}\,\mathrm{d}t = n^{-1}\int_{a^n}^{b^n} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad x = t^n. \quad ◃$$

Abb 9

Zwei uneigentliche Integrale



10.6 Uneigentliche Integrale

Das Integral haben wir bisher für Funktionen definiert, die auf einem *kompakten* Intervall definiert und dort integrierbar und damit auch *beschränkt* sind. Dies reicht auf die Dauer jedoch nicht aus. Wir wollen, wenn möglich, auch Funktionen auf *unbeschränkten* Intervallen sowie *unbeschränkte* Funktionen integrieren. — Betrachte dazu eine Funktion

$$f\colon\ [a,b) \to \mathbb{R}, \qquad a < b \leqslant \infty.$$

Das Intervall ist also entweder rechts unbeschränkt, oder die Funktion ist möglicherweise an der rechten Intervallgrenze unbeschränkt.

Definition *Es sei $a < b \leqslant \infty$, und die Funktion $f\colon\ [a,b) \to \mathbb{R}$ sei über jedem kompakten Teilintervall $[a,c] \subset [a,b)$ integrierbar. Existiert der Limes*

$$\lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t =: \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

so heißt er das uneigentliche Integral von f über $[a,b]$, und man sagt, das uneigentliche Integral konvergiert. Andernfalls divergiert es. ⋊

Entsprechendes erklärt man für Funktionen $f\colon\ (a,b] \to \mathbb{R}$ mit $-\infty \leqslant a < b$.

▷ A. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{r\to\infty} \int_0^r \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{r\to\infty} -\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^r = \lim_{r\to\infty} (1 - \mathrm{e}^{-r}) = 1.$

B. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \lim_{\varepsilon\searrow 0} 2\sqrt{t}\,\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\searrow 0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$

C. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \lim_{r\to\infty} 2\sqrt{t}\,\Big|_1^r = 2\lim_{r\to\infty} (\sqrt{r} - 1) = \infty.$ ◁

Ein an beiden Integrationsgrenzen uneigentliches Integral wird auf zwei einseitig unbestimmte Integrale zurückgeführt:

Definition *Es sei* $\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ *und die Funktion* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *sei über jedem kompakten Teilintervall von* (a,b) *integrierbar. Existieren für ein* $c \in (a,b)$ *dessen uneigentliche Integrale über* $(a,c]$ *und* $[c,b)$*, so heißt*

$$\int_a^b f(t) dt \coloneqq \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

das uneigentliche Integral von f *über* (a,b). ⋊

Die Existenz und der Wert dieses Integrals hängen nicht von der Wahl des Teilungspunktes c ab, wie man sich leicht überlegt.

▷ A. Es existieren

$$\int_0^\infty 2t\mathrm{e}^{-t^2} = -\mathrm{e}^{-t^2}\Big|_0^\infty = 1, \qquad \int_{-\infty}^0 -2t\mathrm{e}^{-t^2} = \mathrm{e}^{-t^2}\Big|_{-\infty}^0 = 1.$$

Daraus folgt $\int_{-\infty}^\infty |t|\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 1$.

B. Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ *existiert nicht*, denn

$$\int_0^\infty \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2}\log(1+t^2)\Big|_0^r = \infty.$$

Es *genügt nicht*, dass aus Symmetriegründen

$$\int_{-r}^r \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0, \qquad r > 0,$$

und dasselbe für dessen Limes für $r \to \infty$ gilt. ◁

Integrale über kompakte Teilintervalle spielen für uneigentliche Integrale quasi die Rolle von *Partialsummen*, wie der folgende Satz zeigt. Der Einfachheit halber betrachten wir den Fall, dass die uneigentliche Integrationsgrenze rechts liegt. Der andere Fall wird analog behandelt.

19 **Satz** *Es sei* $a < b \leqslant \infty$*, und die Funktion* $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ *sei über jedem kompakten Teilintervall integrierbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *Das uneigentliche Integral von* f *über* $[a,b)$ *konvergiert.*
(ii) *Es gibt eine Stammfunktion* F *von* f*, so dass* $\lim_{c\nearrow b} F(c)$ *existiert.*
(iii) *Für jede Stammfunktion* F *von* f *existiert* $\lim_{c\nearrow b} F(c)$. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Das uneigentliche Integral existiert *per definitionem* genau dann, wenn der Grenzwert

$$\lim_{c\nearrow b} \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{c\nearrow b}\left(F\Big|_a^c\right) = \lim_{c\nearrow b}(F(c) - F(a)) = \lim_{c\nearrow b} F(c) - F(a)$$

für eine beliebige Stammfunktion F von f existiert. Stammfunktionen von f unterscheiden sich aber nur durch eine additive Konstante, und diese hat keinen Einfluss auf die Existenz dieses Grenzwerts. ⟫⟫⟫

Uneigentliche Integrale verhalten sich in vielerlei Hinsicht wie Reihen, wie die folgenden Definitionen und Sätzen zeigen.

20 **Definition und Satz** *Das Integral* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *heißt absolut konvergent, falls das Absolutintegral*

$$\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn letzteres beschränkt ist. In diesem Fall ist auch das Integral über f konvergent. ⋊

⟪⟪⟪ Die durch

$$\Phi(t) = \int_a^t |f(s)|\,\mathrm{d}s$$

definierte Stammfunktion Φ des Absolutintegrals ist auf $[a,b)$ monoton steigend. Sie konvergiert somit für $t \nearrow b$ genau dann, wenn sie beschränkt ist, also das Absolutintegral existiert. Aufgrund der Dreiecksungleichung

$$\left|\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_u^v |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

impliziert absolute Konvergenz die einfache Konvergenz. ⟫⟫⟫

Majorantenkriterium *Gilt $|f| \leqslant g$ auf $[a,b)$ und existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$, so ist $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ absolut konvergent.* ⋊

Nützliche Majoranten sind zum Beispiel die Funktionen $t^{-\alpha}$ auf $(0,\infty)$, für die Folgendes gilt.

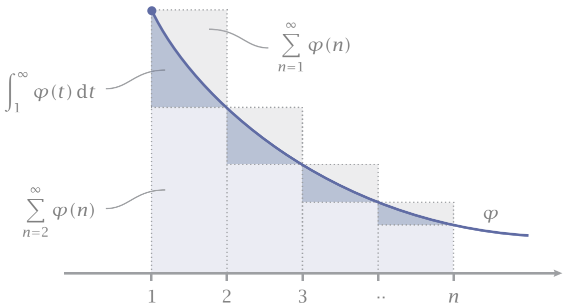
21 **Satz** *Es gilt*

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} < \infty \quad\Leftrightarrow\quad \alpha > 1 \qquad \textit{und} \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} < \infty \quad\Leftrightarrow\quad \alpha < 1.$$

Insbesondere divergieren beide Integrale für $\alpha = 1$. ⋊

Abb 10

Zum Integralkriterium



⟨⟨⟨⟨⟨ Für $\alpha \neq 1$ ist

$$(1-\alpha)\int_1^r \frac{dt}{t^\alpha} = t^{1-\alpha}\Big|_1^r = r^{1-\alpha} - 1.$$

Die rechte Seite konvergiert für $r \to \infty$ genau für $1-\alpha < 0$ und für $r \to 0$ genau für $1-\alpha > 0$. Das ergibt die erste Behauptung. Für $\alpha = 1$ ist

$$\int_1^r \frac{dt}{t} = \log t\Big|_1^r = \log r,$$

und dies divergiert für $r \to \infty$ *und* für $r \to 0$. ⟩⟩⟩⟩⟩

A. Das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$$

ist absolut konvergent für $\alpha > 1$, denn $t^{-\alpha}$ ist eine konvergente Majorante.

B. Das Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$$

ist ebenfalls konvergent, aber nicht absolut konvergent $_{\text{A-26}}$.

Reihen

Jede Reihe lässt sich als ein uneigentliches Integral schreiben, indem man eine passende, stückweise konstante Funktion definiert. So ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \int_1^\infty a(t)\,dt \qquad \text{mit} \qquad a \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{[n,n+1)}.$$

Entsprechend kann man viele Reihen durch Integrale majorisieren, was viele Konvergenzbetrachtungen vereinfacht.

10.26

22 **Integralkriterium** *Ist die Funktion $a\colon [1,\infty) \to (0,\infty)$ monoton fallend und auf jedem kompakten Teilintervall integrierbar, so gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n) \asymp \int_1^\infty a(t)\,\mathrm{d}t.$$

Das heißt, beide Seiten haben dasselbe Konvergenzverhalten. Genauer gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty} a(n) \leqslant \int_1^\infty a(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a(n). \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Da a positiv ist, sind

$$s(n) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} a(k), \qquad S(t) \coloneqq \int_1^t a(s)\,\mathrm{d}s$$

beide monoton steigend. Konvergenz ist also in beiden Fällen gleichbedeutend mit Beschränktheit. Da a monoton fällt, gilt

$$a(k-1) \geqslant a(t) \geqslant a(k), \qquad t \in [k-1, k],$$

und deshalb

$$a(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} a(t)\,\mathrm{d}t \leqslant a(k-1), \qquad k \geqslant 2.$$

Summieren über $k = 2, .., n$ ergibt

$$s(n) - a(1) \leqslant S(n) \leqslant s(n-1).$$

Daraus folgen alle Behauptungen. ⟩⟩⟩⟩⟩

▹ Es gilt $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\log n} = \infty$, denn

$$\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t\log t} = \log(\log t)\Big|_2^\infty = \infty.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt andererseits

$$\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t\log^{1+\varepsilon} t} = -\frac{1}{\varepsilon\log^{\varepsilon} t}\Big|_2^\infty = \frac{1}{\varepsilon\log^{\varepsilon} 2} < \infty,$$

und damit auch

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\log^{1+\varepsilon} n} < \infty.$$

Zum selben Ergebnis gelangt man mit dem Verdichtungskriterium 6.13. ◃