11

Elementare Differenzialgleichungen

Differenzialgleichungen stellen eine Beziehung her zwischen einer oder mehreren Funktionen und ihren Ableitungen. Da Ableitungen Veränderungen beschreiben, modellieren Differenzialgleichungen ganz allgemein das Veränderungsverhalten von Systemen.

Wir beschränken uns hier auf den einfachsten Fall einer *skalaren* Größe x, die nur von *einer* unabhängigen Variablen abhängt, der Zeit:

$$t \mapsto x(t).$$

Eine Differenzialgleichung betrifft in diesem Fall die Größe x und endlich viele ihrer Ableitungen $\dot{x}, \ddot{x}, ..$ nach der Zeit t. Beschränken wir uns auch hier auf den einfachsten Fall, so haben wir es mit Differenzialgleichungen *erster Ordnung* zu tun, die nur $t, x, \dot{x}$ involvieren und allgemein die *implizite Form*

$$F(t, x, \dot{x}) = 0$$

haben. Am einfachsten sind solche Gleichungen in *expliziter* Form,

$$\dot{x} = f(t, x),$$

und nur solche wollen wir jetzt betrachten.

Die hier verwendete Notation ist die *physikalische Notation*, wo die unabhängige Variable als Zeit aufgefasst wird. In der *mathematischen Notation* übernimmt x diese Rolle, und die abhängige Größe wird meist mit y bezeichnet. Die letzte Gleichung lautet dann

$$y' = f(x, y).$$

Auf diesen Unterschied ist beim Studium der Literatur zu achten.

11.1

11.1 Grundbegriffe

Definition *Sei I ein Intervall, $D \subset \mathbb{R}$ offen, und $f\colon I \times D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt*

$$\dot{x} = f(t,x), \qquad (t,x) \in I \times D, \tag{1}$$

eine Differenzialgleichung erster Ordnung auf $I \times D$. Eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist eine differenzierbare Abbildung $\varphi\colon J \to D$ mit einem nichtleeren Intervall $J \subset I$, so dass

$$\dot{\varphi}(t) = f(t,\varphi(t)), \qquad t \in J. \quad ⋊ \tag{2}$$

Die Differenzialgleichung heißt autonom, wenn die Funktion f nicht explizit von der Zeit t abhängt, sie also von der Form

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in D,$$

ist. Andernfalls heißt die Gleichung nichtautonom.

Bemerkungen *a.* Genauer handelt es sich um eine *explizite skalare Differenzialgleichung erster Ordnung*. *Explizit*, weil die Gleichung nach $\dot{x}$ aufgelöst, *skalar*, weil x eindimensional und reell ist, und *erster Ordnung*, da nur die erste Ableitung $\dot{x}$ auftritt.

b. Es wäre zu einschränkend zu verlangen, dass eine Lösung φ auf dem ganzen Intervall I erklärt ist. Sie kann zum Beispiel vorzeitig den Definitionsbereich D verlassen. ⊸

Geometrisch betrachtet handelt es sich bei der rechten Seite der Differenzialgleichung (1) um ein *Richtungsfeld*. In jedem Punkt $(t,x) \in I \times D$ schreibt die Funktion f vor, welche *Richtung* oder *Steigung* die Tangente einer Lösung einnimmt, falls sie durch diesen Punkt verläuft. Gleichung (2) verlangt genau dies von einer Lösung φ. Eine Betrachtung des Richtungsfeldes kann oft schon Aufschluss über die Gestalt seiner Lösungskurven geben.

▹ A. Die einfachste Differenzialgleichung ist sicherlich

$$\dot{x} = 0.$$

Jede Lösung ist eine konstante Funktion $\varphi\colon t \mapsto c$. Dies ist nicht weiter interessant.

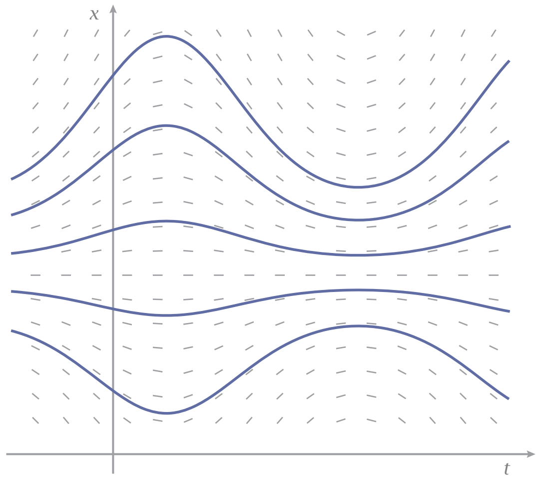
B. Die Gleichung

$$\dot{x} = f(t)$$

mit stetigem $f\colon I \to \mathbb{R}$ ist keine ›echte‹ Differenzialgleichung, da die rechte Seite nicht von x abhängt. Das zugehörige Richtungsfeld ist somit invariant

Abb 1

Ein Richtungsfeld mit fünf Lösungskurven



unter Translationen in der x-Richtung, also *ortsunabhängig*. Ihre Lösungen sind die *Stammfunktionen* von f. Diese unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante, gehen also durch vertikale Translation ineinander über Abb 2.

c. Das wohl einfachste Beispiel einer autonomen Differenzialgleichung ist das *Wachstumsgesetz*

$$\dot{x} = ax$$

mit konstantem Koeffizienten $a \neq 0$, mit dessen Hilfe wir bereits die Exponentialfunktion definiert hatten. Jede Lösung ist von der Form 9.1

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{at}c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Abb 2

Ortsunabhängiges Richtungsfeld

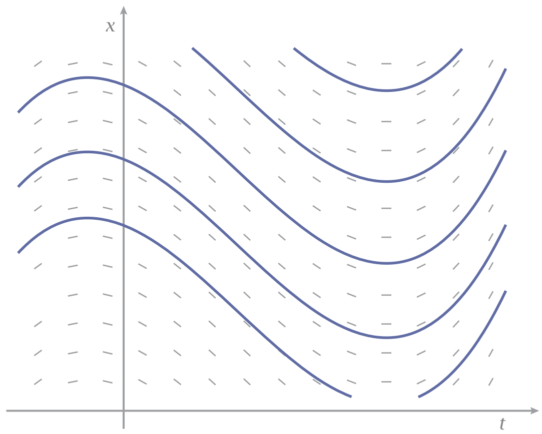
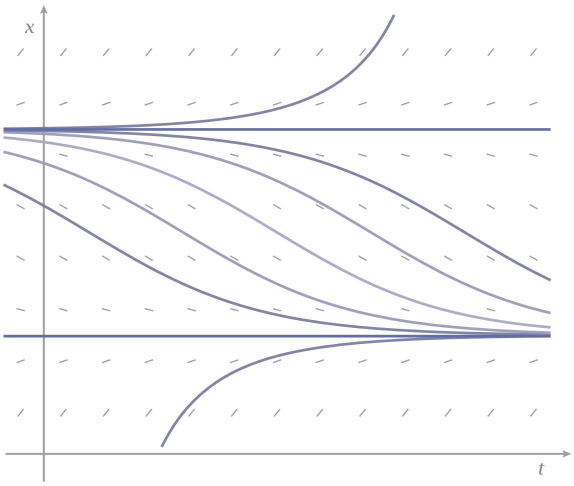


Abb 3

Zeitunabhängiges Richtungsfeld



D. Das Richtungsfeld der autonomen Differenzialgleichung

$$\dot{x} = (x-a)(x-b), \qquad a < b,$$

mit einigen Lösungen ist in Abbildung 3 skizziert. ◂

Die Beispiele zeigen, dass eine Lösung durch eine Differenzialgleichung allein nicht eindeutig bestimmt wird. Das ist auch nicht überraschend, denn eine solche Gleichung bestimmt ja nur deren *Veränderungsverhalten*, nicht aber ihre *absolute* Position. Dazu bedarf es weiterer Daten, zum Beispiel eines Anfangswertes. Die Kombination beider Daten bezeichnet man als *Anfangswertproblem*.

Definition *Unter einem zur Differenzialgleichung* (1) *gehörenden Anfangswertproblem versteht man das System*

$$\dot{x} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0,$$

wobei $(t_0, x_0) \in I \times D$*. Eine lokale Lösung ist eine Lösung* $\varphi\colon I_0 \to D$ *dieser Differenzialgleichung mit*

$$\varphi(t_0) = x_0, \qquad t_0 \in I_0 \subset I. \qquad ⋊$$

Eine lokale Lösung ist also eine Lösung der Differenzialgleichung, die auf einem beliebig kleinen Intervall I_0 um die *Anfangszeit* t_0 definiert ist und zu diesem Zeitpunkt den *Anfangswert* x_0 annimmt.

11.4

▹ Wir greifen die vorangehenden Beispiele auf. Das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t), \qquad x(t_0) = c$$

hat die eindeutige Lösung

$$\varphi(t) = c + \int_{t_0}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Für das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = ax, \qquad x(t_0) = x_0$$

finden wir

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{a(t-t_0)} x_0,$$

indem wir die Gleichung $\mathrm{e}^{at_0} c = x_0$ nach c auflösen. ◃

Ein Anfangswertproblem besitzt unter sehr allgemeinen Bedingungen an die rechte Seite immer eine eindeutige lokale Lösung – dies ist der lokale Existenz- und Eindeutigkeitssatz, den wir später im Kapitel über gewöhnliche Differenzialgleichungen behandeln. In den speziellen Fällen, die wir im Folgenden betrachten, können wir die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen allerdings direkt zeigen und daher auf die große Maschine vorläufig verzichten.

11.2 Lineare Differenzialgleichungen

Definition *Eine lineare Differenzialgleichung erster Ordnung ist von der Form*

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)$$

mit auf einem Intervall I stetigen Funktionen a und b. Sie heißt homogen, falls $b = 0$, andernfalls inhomogen. ⋊

■ Der homogene Fall

Wir lösen zuerst die homogene Gleichung $\dot{x} = a(t)x$. Dies ist nichts anderes als ein zeitabhängiges Wachstumsgesetz, dessen Lösungen ebenfalls durch Exponenzialfunktionen beschrieben werden.

Eine parameterabhängige Familie von Lösungen heißt *allgemeine Lösung* einer Differenzialgleichung, wenn sie *sämtliche Lösungen* dieser Gleichung umfasst.

11.5

Satz *Sei a stetig auf dem Intervall I. Dann ist die allgemeine Lösung von*

$$\dot{x} = a(t)x \tag{3}$$

gegeben durch

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{A(t)}c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

mit einer beliebigen Stammfunktion A von a. Sie existiert auf ganz I. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Offensichtlich ist dies für jedes c eine Lösung, denn $\dot{A} = a$, also

$$\dot{\varphi} = \mathrm{e}^{A}\dot{A}c = \mathrm{e}^{A}ac = a\varphi.$$

Bleibt zu zeigen, dass *jede* Lösung von dieser Form ist. Nun, ist φ eine *beliebige* Lösung, dann gilt

$$(\mathrm{e}^{-A}\varphi)^{\cdot} = \mathrm{e}^{-A}\dot{\varphi} - \mathrm{e}^{-A}\dot{A}\varphi = \mathrm{e}^{-A}a\varphi - \mathrm{e}^{-A}a\varphi = 0.$$

Also ist $\mathrm{e}^{-A}\varphi = c$ eine reelle Konstante, und die Behauptung folgt. ⟩⟩⟩⟩⟩

Es spielt keine Rolle, welche Stammfunktion A man hier wählt. Dies ändert lediglich den Parameter c.

▷ A. Für konstantes a ist die allgemeine Lösung von $\dot{x} = ax$ gegeben durch

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{at}c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

B. Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = -x/t$ für $t > 0$ ist

$$\varphi(t) = c\exp\left(-\int_1^t \frac{\mathrm{d}s}{s}\right) = c\exp(-\log t) = \frac{c}{t}.$$ ◁

Zusatz *Das zugehörige Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = a(t)x, \qquad x(t_0) = x_0$$

besitzt auf I die eindeutige Lösung $\varphi(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s\right)x_0$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Nach dem eben bewiesenen Satz ist jede Lösung von der Form

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s\right)c.$$

Die Bedingung $\varphi(t_0) = x_0$ ergibt dann $c = x_0$. ⟩⟩⟩⟩⟩

11.6

Bemerkung *A posteriori* – im Nachhinein – ist es leicht, die Korrektheit einer Lösung zu verifizieren – man muss ja nur Differenzieren und Einsetzen. Das Problem ist, überhaupt eine zu finden. Im Falle der Gleichung $\dot{x} = a(t)x$ hilft der *Ansatz*

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{\Phi(t)},$$

denn die Lösung sollte wohl etwas mit der Exponentialfunktion zu tun haben. Dann muss notwendigerweise gelten

$$\dot{\varphi} = \mathrm{e}^{\Phi}\dot{\Phi} \overset{!}{=} a\varphi = a\mathrm{e}^{\Phi},$$

und damit $\dot{\Phi} = a$. Also führt eine Stammfunktion von a zum Ziel. — Diese Argumentation ersetzt allerdings nicht den Eindeutigkeitsbeweis. Denn der Ansatz $\varphi = \mathrm{e}^{\Phi}$ muss ja nicht der einzig mögliche sein. ⊸

▪ Der inhomogene Fall

Wir betrachten nun die inhomogene lineare Differenzialgleichung

$$\dot{x} = a(t)x + b(t). \tag{4}$$

Wie bei linearen Gleichungssystemen auch, kann man diesen Fall auf die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung plus einer partikulären – also irgendeiner einzelnen – Lösung der inhomogenen Gleichung zurückführen.

Satz *Sei φ_0 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung* (4). *Dann ist jede andere Lösung von der Form $\varphi_0 + \varphi$ mit einer Lösung φ der homogenen Gleichung* (3). ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist φ_0 eine partikuläre und φ eine homogene Lösung, so ist

$$(\varphi_0 + \varphi)^{\cdot} = \dot{\varphi}_0 + \dot{\varphi} = a\varphi_0 + b + a\varphi = a(\varphi_0 + \varphi) + b,$$

also $\varphi_0 + \varphi$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Ist umgekehrt ψ irgendeine Lösung der inhomogenen Gleichung, so ist mit derselben Rechnung $\psi - \varphi_0 = \varphi$ eine Lösung der homogenen Gleichung. ⟩⟩⟩⟩⟩

Es bleibt die Frage, wie man eine partikuläre Lösung findet. Hier hilft die Idee der *Variation der Konstanten*[1], die auf Lagrange zurückgeht: wenn $\mathrm{e}^{A(t)}c$ die homogene Gleichung löst, so löst sie vielleicht auch die inhomogene Gleichung, wenn die Konstante c sich in geeigneter Weise mit t ändert, also eine Funktion von t wird. Dann ist auf der einen Seite

$$(\mathrm{e}^{A}c)^{\cdot} = \mathrm{e}^{A}\dot{A}c + \mathrm{e}^{A}\dot{c} = \mathrm{e}^{A}ac + \mathrm{e}^{A}\dot{c}.$$

[1] Dieser Begriff ist ein Widerspruch in sich, trifft die Sache aber genau.

Auf der anderen Seite soll diese Funktion die Differenzialgleichung erfüllen, also

$$(\mathrm{e}^A c)^{\cdot} = a\mathrm{e}^A c + b$$

gelten. Vergleich dieser beiden Gleichungen ergibt $\mathrm{e}^A \dot{c} = b$, also

$$\dot{c} = \mathrm{e}^{-A} b.$$

Diese Gleichung ist durch Integration lösbar, denn die rechte Seite ist bekannt. Ist also c_0 eine Stammfunktion von $\mathrm{e}^{-A}b$, so ist $\mathrm{e}^A c_0$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung. Insgesamt erhalten wir damit folgende Ergebnisse.

Satz *Die Funktionen a und b seien stetig auf dem Intervall I. Dann ist die allgemeine Lösung von $\dot{x} = a(t)x + b(t)$ gegeben durch*

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{A(t)}(c + c_0(t)), \qquad c \in \mathbb{R},$$

mit Stammfunktionen A von a und c_0 von $\mathrm{e}^{-A}b$, respektive. ⋊

1 **Satz** *Unter denselben Voraussetzungen besitzt das Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

auf I die eindeutige Lösung

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\,\mathrm{d}s \right), \qquad A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s.$$ ⋊

Bemerkung Diese Formel ist eher für theoretische Untersuchungen von Bedeutung. In der Praxis löst man zuerst die homogene Gleichung und konstruiert anschließend per Variation der Konstanten direkt eine partikuläre Lösung. ⊸

⊳ Betrachte die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = 2tx + 2t^3.$$

Eine Stammfunktion von $2t$ ist t^2, die allgemeine Lösung lautet deshalb

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{t^2} \left(c + 2\int_0^t \mathrm{e}^{-s^2} s^3\,\mathrm{d}s \right),$$

wobei wir von der Freiheit Gebrauch machen, eine uns bequeme Stammfunktion zu wählen. Mittels Substitution $s^2 = u$ und partieller Integration erhält man

$$2\int_0^t \mathrm{e}^{-s^2} s^3\,\mathrm{d}s = \int_0^{t^2} u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 1 - (t^2+1)\mathrm{e}^{-t^2}.$$

Also ist

$$\varphi(t) = c\mathrm{e}^{t^2} - t^2 - 1, \qquad c \in \mathbb{R},$$

wobei wir noch von der Freiheit Gebrauch machen, $c + 1$ durch c zu ersetzen. ⊲

11.3 Separierbare Differenzialgleichungen

Eine *separierbare Differenzialgleichung*, auch *Differenzialgleichung mit getrennten Variablen* genannt, ist von der Form

$$\dot{x} = g(t)h(x) \tag{5}$$

mit stetigen Funktionen g und h auf Intervallen I respektive J. Ihr Definitionsbereich ist das Rechteck $I \times J$ in der (t,x)-Ebene. Hierunter fallen auch die Stammfunktionsgleichung, wo $h \equiv 1$, wie auch die allgemeine autonome Differenzialgleichung, wo $g \equiv 1$.

Triviale Lösungen findet man, wenn der Faktor h Nullstellen besitzt. Ist

$$h(x_0) = 0$$

für ein $x_0 \in J$, so ist die konstante Funktion $\varphi \equiv x_0$ eine Lösung, denn

$$\dot{\varphi}(t) = 0 = g(t)h(x_0) = g(t)h(\varphi(t)), \qquad t \in I.$$

Ist dazu noch eine Lipschitzbedingung erfüllt, so ist dies auch die einzige solche Lösung:

Satz *Die Funktionen g und h seien stetig. Ist x_0 eine Nullstelle von h, so ist die konstante Funktion $\varphi \equiv x_0$ Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{x} = g(t)h(x), \qquad x(t_0) = x_0.$$

Ist h lipschitzstetig, so ist es auch die einzige Lösung. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Die Existenz dieser Lösung haben wir gerade gezeigt. Seien nun φ und ψ zwei Lösungen desselben Anfangswertproblems. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\varphi - \psi)(t) = (\varphi - \psi)\Big|_{t_0}^{t} &= \int_{t_0}^{t} (\dot{\varphi} - \dot{\psi})(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{t_0}^{t} g(s)\,[h(\varphi(s)) - h(\psi(s))]\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Auf einem beliebigen kompakten Intervall $[t_0, b] \subset I$ ist g beschränkt, also $\|g\|_{[t_0,b]} \leqslant K$. Außerdem ist h auf J mit einer gewissen Konstanten L-lipschitz. Für $t_0 \leqslant t \leqslant b$ gilt also

$$\begin{aligned}|(\varphi - \psi)(t)| &\leqslant \int_{t_0}^{t} |g(s)|\,|h(\varphi(s)) - h(\psi(s))|\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant KL \int_{t_0}^{t} |(\varphi - \psi)(s)|\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

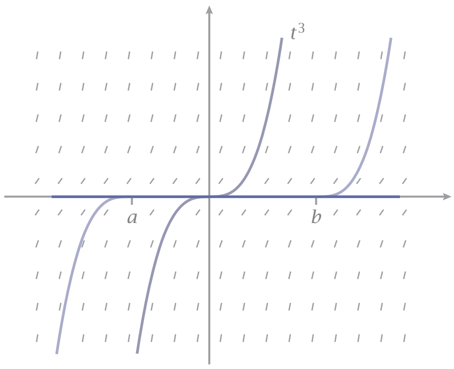


Abb 4

Nichteindeutigkeit des Anfangswertproblems von Beispiel 2

Für die stetige Funktion $u = |\varphi - \psi|$ gilt mit $M = KL$ somit

$$0 \leqslant u(t) \leqslant M \int_{t_0}^{t} u(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant b.$$

Dann aber muss u für $t_0 \leqslant t \leqslant b$ identisch verschwinden – siehe Aufgabe 10 – und somit ist dort $\varphi = \psi$. — Für ein beliebiges kompaktes Intervall $[a, t_0] \subset I$ argumentiert man entsprechend. ⟫⟫

2 ▹ Die Lipschitzbedingung ist *notwendig*. Das Standardbeispiel hierfür ist das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = 3x^{2/3}, \qquad x(0) = 0.$$

Die Wurzelfunktion $x \mapsto x^{2/3}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ wohldefiniert, aber nicht lipschitz im Punkt 0. Und tatsächlich existiert neben der konstanten Lösung $\varphi \equiv 0$ auch noch die Lösung

$$\varphi(t) = t^3.$$

Daraus kann man sogar unendlich viele verschiedene Lösungen zusammensetzen, und zwar

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t-a)^3, & t < a \leqslant 0, \\ \quad 0 \quad, & a \leqslant t \leqslant b, \\ (t-b)^3, & t > b \geqslant 0, \end{cases}$$

für jede Wahl von $a \leqslant 0 \leqslant b$. Es gibt also *überabzählbar viele* Lösungen dieses Anfangswertproblems Abb 4. ◃

Die zu den Nullstellen von h gehörenden konstanten Lösungen zerlegen das Rechteck $I \times J$ in horizontale Streifen. Ist h lipschitz, so können aus Eindeutigkeitsgründen die übrigen Lösungen diese Streifen nicht verlassen. Indem wir J

geeignet einschränken, können wir daher im Folgenden annehmen, dass h auf J nirgends verschwindet.

Angenommen, es existiert eine Lösung φ in einem solchen Streifen. Da dort h nicht verschwindet, ist

$$g(t) = \frac{\dot\varphi(t)}{h(\varphi(t))}. \tag{6}$$

Also gilt dann auch

$$\int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \frac{\dot\varphi(s)}{h(\varphi(s))}\,\mathrm{d}s = \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} \frac{\mathrm{d}u}{h(u)}. \tag{7}$$

Drehen wir diese Argumentation um, indem wir von der letzten Gleichung ausgehen, so erhalten wir folgenden Satz.

3 **Satz** *Die Funktionen g und h seien stetig auf den Intervallen I respektive J, und h habe keine Nullstelle in J. Dann existiert genau eine lokale Lösung $\varphi\colon I_0 \to J$ des Anfangswertproblems*

$$\dot x = g(t)h(x), \qquad x(t_0) = x_0,$$

mit $t_0 \in I$ und $x_0 \in J$, und diese erfüllt die Gleichung

$$G(t) = H(\varphi(t)), \qquad t \in I_0, \tag{8}$$

wobei

$$G(t) := \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s, \qquad H(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}u}{h(u)}. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ *Notwendigkeit:* Das haben wir gerade gezeigt: Ist φ eine lokale Lösung, so gilt (6), da h nirgends verschwindet. Integration von t_0 nach t ergibt gemäß (7)

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \frac{\dot\varphi(s)}{h(\varphi(s))}\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{\mathrm{d}u}{h(u)} = H(\varphi(t)).$$

Eindeutigkeit: Da $H' = 1/h$ nirgends verschwindet, ist H streng monoton und damit umkehrbar. Gleichung (8) ist somit nach φ auflösbar, und es ist

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t)), \qquad t \in I_0. \tag{9}$$

Somit ist φ, wenn es existiert, auch eindeutig bestimmt.

Existenz: Wir nehmen (9) als *Definition* von φ in einer Umgebung von t_0. Dann ist

$$\varphi(t_0) = H^{-1}(G(t_0)) = H^{-1}(0) = x_0.$$

Ferner ist φ stetig differenzierbar, und Differenzieren von $G(t) = H(\varphi(t))$ ergibt

$$g(t) = H'(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = \frac{\dot{\varphi}(t)}{h(\varphi(t))}.$$

Somit erfüllt φ die Differenzialgleichung $\dot{\varphi}(t)) = g(t)h(\varphi(t))$. ⟫⟫⟫

Bemerkungen *a.* Der Satz beschreibt die Lösung des Anfangswertproblems nur implizit. Weder die Stammfunktionen G oder H müssen explizit bestimmbar sein, noch ist Gleichung (8) immer nach φ auflösbar.

b. Sind G und H *beliebige* Stammfunktionen von g und $1/h$, so ist

$$\Phi : I \times J \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(t,x) = G(t) - H(x)$$

konstant entlang *allen* Lösungskurven der Differenzialgleichung (5). Denn die entsprechenden Funktionen des Satzes unterscheiden sich von diesen nur durch additive Konstanten. Man kann dies aber auch direkt durch Differenzieren nachprüfen. Es gilt also

$$\Phi(t,\varphi(t)) = c$$

für *jede* Lösung φ, wobei c durch die Anfangswerte bestimmt wird. Man sagt, Φ ist eine *Erhaltungsgröße* oder ein *Integral* der Differenzialgleichung. ⊸

In der Praxis löst man separierbare Differenzialgleichungen in etwas saloper, aber einprägsamer Weise wie folgt. Man schreibt

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g(t)h(x)$$

und *separiert* die Variablen zu

$$\frac{\mathrm{d}x}{h(x)} = g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Unbestimmte Integration ergibt

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{h(x)} = \int g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Gelingt es, diese Integrale zu bestimmen und nach x aufzulösen, erhält man eine allgemeine Lösung φ, die noch von einer Integrationskonstante c abhängt.

▹ *Erstes Beispiel* Die homogene lineare Differenzialgleichung

$$\dot{x} = a(t)x$$

ist separierbar mit $g(t) = a(t)$ und $h(x) = x$. Die Funktion h hat eine Nullstelle bei 0, und da h lipschitz ist, ist die Nulllösung auch die einzige, die den Wert 0

annehmen kann. Nun sei $x \neq 0$. Dann ist

$$G(t) = \int g(s)\,\mathrm{d}s = \int a(s)\,\mathrm{d}s = A(t)$$

eine Stammfunktion von a, und

$$H(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{h(x)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log|x| + c.$$

Auflösen der Gleichung $H(x) = G(t)$ ergibt zunächst [2]

$$|x(t)| = \mathrm{e}^{A(t)-c} = \mathrm{e}^{A(t)}\mathrm{e}^{c}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Den Fall positiver, negativer und verschwindender Lösungen kann man dann zusammenfassen zu

$$x(t) = \mathrm{e}^{A(t)}c, \qquad c \in \mathbb{R}. \quad ◅$$

▻ *Zweites Beispiel* Betrachte

$$\dot{x} = \frac{t}{x}, \qquad 0 < t, x < \infty.$$

Rechnen wir informell, so ist also $x\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$,

$$\int_{t_0}^{t} s\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) = \int_{x_0}^{x} u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2).$$

Damit wird $x^2 = t^2 - t_0^2 + x_0^2$, oder

$$x(t) = \sqrt{t^2 + x_0^2 - t_0^2}.$$

Der Definitionsbereich dieser Lösung hängt von den Anfangswerten ab. Für $x_0 \geqslant t_0$ ist er $(0, \infty)$. Für $t_0 > x_0$ verlangen wir dagegen

$$t > \sqrt{t_0^2 - x_0^2} > 0. \quad ◅$$

▻ *Drittes Beispiel* Betrachte

$$\dot{x} = \mathrm{e}^{x}\sin t.$$

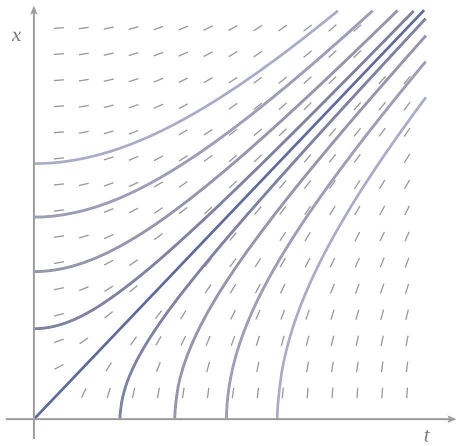
Das Richtungsfeld ist periodisch in t mit Periode 2π und symmetrisch zur x-Achse, denn für die rechte Seite gilt $f(t, x + 2\pi) = f(t, x) = -f(-t, x)$. Ist also $\varphi(t)$ eine Lösung, so sind es auch

$$\varphi(t + 2\pi), \qquad \varphi(-t),$$

[2] Wir schreiben jetzt eine Lösung der Einfachheit halber als $x(t)$ statt $\varphi(t)$.

Abb 5

Lösungen zu $\dot{x} = t/x$



wie man leicht nachrechnet. — Da e^x keine Nullstellen besitzt, können wir direkt zur Separation der Variablen übergehen und erhalten

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x} = \int \sin t \, \mathrm{d}t.$$

Also ist $\mathrm{e}^{-x} = \cos t + c$, oder

$$x(t) = -\log(\cos t + c)$$

mit der Nebenbedingung, dass $\cos t + c > 0$.

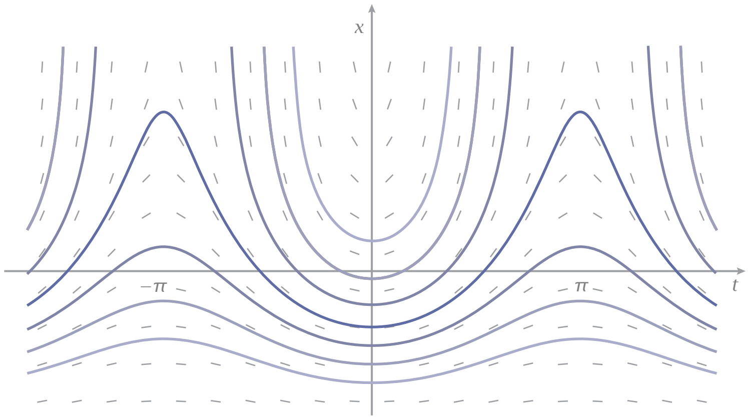
Aufgrund von Satzes 3 sind dies alle Lösungen der Gleichung. Es ist auch jedes Anfangswertproblem $x(0) = x_0$ lösbar mit

$$x(t) = -\log(\cos t + \mathrm{e}^{-x_0} - 1).$$

Diese Lösung existiert für $x_0 < -\log 2$ für alle t, und für $x_0 = -\log 2$ auf $(-\pi, \pi)$ mit $x(t) \to \infty$ für $t \to \pm\pi$. Für größer werdendes x_0 wird dieses Intervall immer kleiner und konvergiert für $x_0 \to \infty$ gegen 0. ◁

11.14

Abb 6 Lösungen zu $\dot{x} = \mathrm{e}^x \sin t$



11.4 Homogene Differenzialgleichungen

Eine Differenzialgleichung der Form

$$\dot{x} = h(x/t)$$

heißt *homogene Differenzialgleichung* [3] – *homogen*, weil die rechte Seite invariant ist unter Skalierung beider Koordinaten mit demselben Faktor. Für die Funktion f mit $f(t,x) = h(x/t)$ gilt also

$$f(\lambda t, \lambda x) = f(t,x), \qquad \lambda > 0.$$

Umgekehrt definiert jede Funktion f mit dieser Eigenschaft eine Funktion von x/t, denn dann gilt

$$f(t,x) = f(1, x/t) =: h(x/t), \qquad t > 0.$$

Bemerkung Allgemeiner heißt eine auf einem Vektorraum definierte Funktion f *homogen vom Grad* α, falls

$$f(\lambda u) = \lambda^\alpha f(u), \qquad \lambda > 0.$$

So ist $x^k y^{n-k}$ für jedes $0 \leqslant k \leqslant n$ homogen vom Grad n. Die rechte Seite einer homogenen Differenzialgleichung ist also homogen vom Grad 0. ⊸

Eine homogene Differenzialgleichung kann auf eine Differenzialgleichung mit getrennten Variablen zurückgeführt werden.

[3] Nicht zu verwechseln mit der homogenen *linearen* Differenzialgleichung.

Satz *Sei h stetig auf einem Intervall I und $x_0/t_0 \in I$. Dann ist $\varphi\colon I_0 \to \mathbb{R}$ eine lokale Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{x} = h(x/t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{10}$$

genau dann, wenn

$$\psi\colon\ I_0 \to \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$$

eine lokale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{z} = \frac{h(z) - z}{t}, \qquad z(t_0) = \frac{x_0}{t_0} \tag{11}$$

darstellt. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Dann sind zwei einfache Rechnungen. Ist φ Lösung von (10), so gilt

$$\dot{\psi} = \left(\frac{\varphi}{t}\right)^{\cdot} = \frac{\dot{\varphi}}{t} - \frac{\varphi}{t^2} = h\left(\frac{\varphi}{t}\right)\frac{1}{t} - \frac{\varphi}{t^2} = \frac{h(\psi) - \psi}{t}$$

sowie $\psi(t_0) = \varphi(t_0)/t_0 = x_0/t_0$. Also ist ψ Lösung von (11). Ist umgekehrt ψ eine solche Lösung und definieren wir φ durch $\varphi(t) = t\psi(t)$, so gilt

$$\dot{\varphi} = (t\psi)^{\cdot} = \psi + t\dot{\psi} = \psi + (h(\psi) - \psi) = h(\psi) = h(\varphi/t)$$

sowie $\varphi(t_0) = t_0\psi(t_0) = x_0$. Also ist φ Lösung von (10). ⟩⟩⟩⟩

In der praktischen Rechnung substituiert man in der Differenzialgleichung

$$z = x/t,$$

was ja auch nahe liegt, denn schließlich ist die rechte Seite eine Funktion dieser Variablen. Aus $x = tz$ folgt dann $\dot{x} = z + t\dot{z}$ und damit

$$z + t\dot{z} = \dot{x} = h(z),$$

und das ist die Differenzialgleichung (11). Der Satz sagt also aus, dass diese Rechnung korrekt ist.

▹ *Erstes Beispiel* Die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = 1 + \frac{x}{t} + \frac{x^2}{t^2}, \qquad t \neq 0,$$

geht durch die Substitution $z = x/t$ über in

$$\dot{z} = \frac{1 + z^2}{t}, \qquad t \neq 0.$$

Separation der Variablen ergibt

$$\arctan z = \int \frac{\mathrm{d}z}{1 + z^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log|t| + c.$$

Dies ergibt $z = \tan(\log|t| + c)$, und durch Rücksubstitution die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differenzialgleichung,

$$\varphi(t) = t\tan(\log|t| + c). \quad ◅$$

Homogene Differenzialgleichungen sind gelegentlich nicht sofort als solche zu erkennen. Hier hilft der Test, ob die rechte Seite invariant ist unter gleichzeitiger Skalierung von x und t.

▷ *Zweites Beispiel* Die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \frac{x + \sqrt{t^2 + x^2}}{t}, \qquad t > 0,$$

ist ebenfalls homogen, denn für die rechte Seite gilt $f(\lambda x, \lambda t) = f(x, t)$ für $\lambda > 0$. Für $z = x/t$ erhalten wir

$$z + t\dot{z} = \dot{x} = \frac{tz + \sqrt{t^2 + t^2 z^2}}{t} = z + \sqrt{1 + z^2},$$

oder

$$t\dot{z} = \sqrt{1 + z^2}, \qquad t > 0.$$

Dies löst man nun wieder mit Separation der Variablen. Aus A-10.24

$$\log\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) = \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1 + z^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log t + c$$

folgt

$$z + \sqrt{1 + z^2} = pt, \qquad p = \mathrm{e}^c > 0.$$

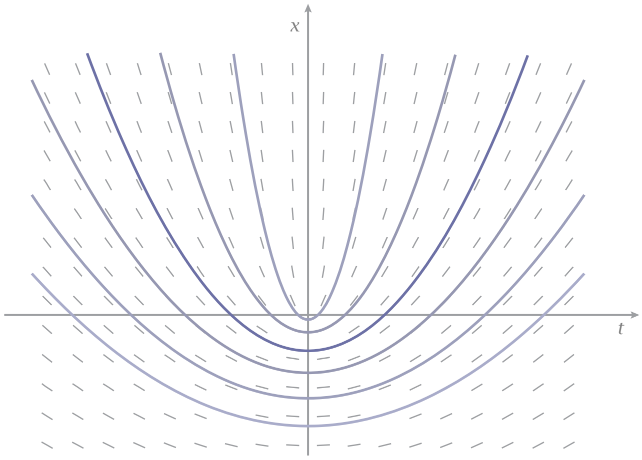
Quadrieren von $z - pt = \sqrt{1 + z^2}$ führt schließlich zu $2ptz = p^2t^2 - 1$ und damit zur Lösung

$$\varphi(t) = \frac{p^2t^2 - 1}{2p}, \qquad p > 0.$$

Diese lösen die Differenzialgleichung für $t > 0$, aber man verifiziert leicht, dass sie tatsächlich die Gleichung für alle t erfüllen.

Die Lösungen beschreiben eine Familie von zur x-Achse symmetrischen Parabeln mit Tiefpunkt bei $-1/2p$, Nullstellen bei $-1/p$ und $1/p$ und Brennpunkt im Koordinatenursprung. Es handelt sich um eine Familie *konfokaler Parabeln*. ◅

Abb 7 Konfokale Parabeln



11.5 Bernoulli- und Riccati-Gleichungen

Wir betrachten noch zwei weitere Typen elementarer Differenzialgleichungen.

Die Bernoulli-Gleichung

Diese hat die Gestalt

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^{\alpha}$$

mit stetigen Koeffizientenfunktion und $\alpha \in \mathbb{R}$. Mit $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ erhalten wir wieder die inhomogene respektive homogene lineare Differenzialgleichung, also nichts Neues. Daher sei $\alpha \neq 0$ und $\alpha \neq 1$.

Eine triviale Lösung ist $x \equiv 0$. Legen wir diese beiseite und nehmen $x > 0$ an, so führt die Substitution

$$y = x^{1-\alpha}$$

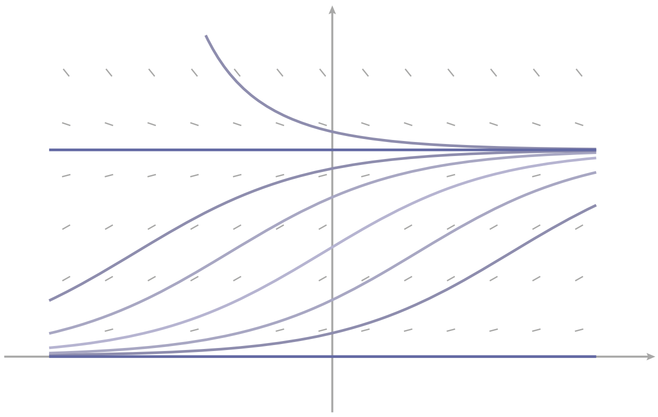
zu

$$\dot{y} = (1-\alpha)a(t)x^{1-\alpha} + (1-\alpha)b(t),$$

also zu der *inhomogenen linearen Differenzialgleichung*

$$\dot{y} = (1-\alpha)a(t)y + (1-\alpha)b(t).$$

Abb 8 Lösungen der logistischen Gleichung



Umgekehrt verifiziert man, dass eine positive Lösung y dieser Gleichung mit $x = y^{1/(1-\alpha)}$ eine Lösung der ursprünglichen Gleichung ergibt.

Ist $\alpha \neq 1$ eine ganze Zahl, so kann man auch noch negative Lösungen betrachten.

Besonders elegant ist die Situation für $\alpha = 2$. Hier geht die Gleichung

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^2.$$

durch die Substitution $y = 1/x$ über in

$$\dot{y} = -a(t)y - b(t).$$

▹▸ *Beispiel* Die letzte Gleichung mit konstanten Koeffizienten,

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^2, \qquad \alpha, \beta > 0,$$

auch *Verhulst-* oder *logistische Gleichung* genannt, beschreibt ein modifiziertes Wachstumsgesetz. Interpretieren wir x als Größe einer Population und

$$\frac{\dot{x}}{x} = \alpha - \beta x$$

als ihre *Wachstumsrate*, so ist diese für kleine x ungefähr α, und wir erhalten exponenzielles Wachstum. Wird die Population größer, verrringert sich ihre Wachstumsrate proportional dazu. Beim Wert $x = \alpha/\beta$ ist sie Null. Abbildung 8 zeigt das qualitative Bild ihrer Lösungen $_{\text{A-8}}$. ◂◃

Die Riccati-Gleichung

Diese hat die Gestalt

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^2 + h(t)$$

mit stetigen Koeffizientenfunktionen.

Für $h \equiv 0$ erhalten wir also eine Bernoulligleichung mit $n = 2$. Neben der Nulllösung erhalten wir mit der Substitution $y = 1/x$ alle weiteren Lösungen.

Für $h \not\equiv 0$ gibt es keinen allgemeinen Lösungsansatz. Kennt man allerdings eine ein zige partikuläre Lösung φ, so erhält man für

$$y = x - \varphi$$

die Gleichung

$$\begin{aligned}\dot{y} = \dot{x} - \dot{\varphi} &= ax + bx^2 - a\varphi - b\varphi^2 \\ &= a(x-\varphi) + b(x-\varphi)(x+\varphi) \\ &= ay + by(y + 2\varphi).\end{aligned}$$

Wir erhalten also die *Bernoulli-Gleichung*

$$\dot{y} = (a + 2b\varphi)y + by^2.$$

Durch die Substitution $y = 1/z$ geht diese schließlich über in

$$\dot{z} = -(a + 2b\varphi)z - b,$$

wobei a, b, φ im Allgemeinen noch von t abhängen.

▹ *Beispiel* Die Riccati-Gleichung

$$\dot{x} = 2tx + x^2 + 2$$

hat die partikuläre Lösung

$$\varphi = -\frac{1}{t}.$$

Eine solche findet man übrigens, indem man eine Lösung versuchsweise als Polynom in t oder $1/t$ ansetzt. Für $y = x + 1/t$ erhalten wir dann

$$\dot{y} = (2t - 2/t)y + y^2,$$

und für $z = 1/y$ schließlich

$$\dot{z} = (2/t - 2t)z - 1. \quad ◃$$