16

Lineare Differenzialgleichungen

Sei V ein beliebiger normierter Vektorraum. Eine *lineare Differenzialgleichung* auf V ist von Form

$$\dot{x} = Ax$$

mit $A \in L(V)$, also einem beschränkten linearer Operator A auf V. Eine *Lösung* dieser Gleichung ist jede differenzierbare Kurve $\varphi\colon I \to V$, so dass

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t), \qquad t \in I.$$

Wir werden sehen, dass jedes *Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

eine eindeutige und sogar für alle Zeiten definierte Lösung $\varphi\colon \mathbb{R} \to V$ der Gestalt

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{At}x_0$$

besitzt. Dazu müssen wir nur das Symbol e^{At} geeignet definieren. Die Wahl des Zeitpunktes 0 ist übrigens keine Beschränkung der Allgemeinheit A-2 und vereinfacht die Darstellung.

16.1

16.1 Exponenziale linearer Operatoren

Für reelle Zahlen a und t ist bekanntlich

$$e^{at} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{a^k}{k!} t^k .$$

Um diese Darstellung auf beschränkte lineare Operatoren auszudehnen, benötigen wir ein paar Vorbereitungen.

Eine Norm $|\cdot|$ auf einem Vektorraum V induziert auf dem Raum $L(V)$ aller stetigen linearen Operatoren auf V eine *Operatornorm* $\|\cdot\|$ durch

$$\|A\| \coloneqq \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Ax| .$$

Wie wir bereits gesehen haben $_{14.1}$, wird $L(V)$ mit dieser Norm zu einem Banachraum $_{14.2}$. Es gilt sogar mehr.

1 **Satz** *Der Raum $L(V)$ mit der Operatornorm $\|\cdot\|$ bildet bezüglich der Addition und Komposition von Operatoren eine Banachalgebra.* ⋊

Eine *Banachalgebra* ist ein Banachraum, in dem eine Multiplikation erklärt ist, die sich mit der Addition mittels der *Distributivgesetze*

$$A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AC + BC$$

und mit der Norm mittels der Ungleichung

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|$$

verträgt. Die Multiplikation muss jedoch nicht kommutativ sein, und im Fall der Hintereinanderausführung von Operatoren ist sie es auch nicht. — Der Beweis dieser Eigenschaften ist eine kleine Übung.

Gilt übrigens $\|AB\| \leqslant c\,\|A\|\,\|B\|$ mit einer Konstanten $c \geqslant 1$, so existiert immer eine äquivalente *adaptierte Norm* mit $c = 1$ $_{\text{A-1}}$.

▪ Das Exponenzial e^A

In einem beliebigen Banachraum können wir *unendliche Reihen* bilden. Diese definieren wir wie üblich als Limes endlicher Partialsummen, also

$$\sum_{k \geqslant 0} A_k \coloneqq \lim_{n} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} A_k ,$$

wenn dieser existiert.

Die Reihe heißt *absolut* oder *normal konvergent*, falls die Reihe $\sum_k \|A_k\|$ konvergiert, was äquivalent ist mit

$$\sum_{k\geqslant 0} \|A_k\| < \infty.$$

In diesem Fall bilden die Partialsummen eine Cauchyfolge, die aufgrund der Vollständigkeit von $L(V)$ auch einen Grenzwert besitzt.

Definition und Satz *Das Exponenzial von $A \in L(V)$ ist der lineare Operator*

$$\mathrm{e}^A \coloneqq \exp(A) \coloneqq \sum_{k\geqslant 0} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots .$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf jeder beschränkten Menge in $L(V)$, und es gilt $\|\exp(A)\| \leqslant \exp(\|A\|)$. ⋊

⟪⟪ Aus $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$ folgt mit vollständiger Induktion $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$ für alle $k \geqslant 0$. Für alle $n \geqslant 0$ gilt daher

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\|A^k\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\|A\|^k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\|A\|^k = \exp(\|A\|) < \infty.$$

Also konvergiert die Exponenzialreihe absolut und gleichmäßig auf jeder beschränkten Menge in $L(V)$. Die behauptete Ungleichung folgt dann aus

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}A^k\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\|A^k\| \leqslant \exp(\|A\|)$$

und Grenzübergang $n \to \infty$. ⟫⟫

Für die weiteren Eigenschaften des Exponenzials benötigen wir den Produktsatz von Cauchy, der es erlaubt, das Produkt zweier Reihen durch Ausmultiplizieren und Umordnung unendlich vieler Summanden darzustellen. Der Beweis wurde im Kapitel über Reihen skizziert A-6.16. Er gilt für absolut konvergente reelle Reihen ebenso wie für normal konvergente Reihen von Operatoren.

2 **Produktsatz** *Sind die Reihen $\sum_{k\geqslant 0} A_k$ und $\sum_{l\geqslant 0} B_l$ absolut konvergent, so ist*

$$\sum_{k\geqslant 0} A_k \sum_{l\geqslant 0} B_l = \sum_{k,l\geqslant 0} A_k B_l = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k+l=n} A_k B_l,$$

wobei alle Reihen absolut konvergieren. ⋊

3 **Rechenregeln** *Seien $A, B, T \in L(V)$ und T invertierbar. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{e}^{T^{-1}AT} = T^{-1}\mathrm{e}^A T$.

(ii) $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B$, *falls $AB = BA$.*

(iii) $\mathrm{e}^{-A} = (\mathrm{e}^A)^{-1}$. *Insbesondere ist e^A immer invertierbar.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ (i) Mit Induktion zeigt man

$$(T^{-1}AT)^k = T^{-1}A^kT, \qquad k \geqslant 0.$$

Für jedes $n \geqslant 0$ gilt deshalb

$$T^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right)T = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}T^{-1}A^kT = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(T^{-1}AT)^k.$$

Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt

$$T^{-1}\mathrm{e}^AT = T^{-1}\left(\sum_{k\geqslant 0} \frac{A^k}{k!}\right)T = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}(T^{-1}AT)^k = \mathrm{e}^{T^{-1}AT}.$$

(ii) Mit $AB = BA$ gilt auch für alle $n \geqslant 0$ die *binomische Formel*

$$\frac{1}{n!}(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!}A^kB^{n-k} = \sum_{k+l=n} \frac{A^kB^l}{k!\,l!}.$$

Daraus folgt mit dem Produktsatz [2]

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{A+B} &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}(A+B)^n \\ &= \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k+l=n} \frac{A^kB^l}{k!\,l!} = \sum_{k\geqslant 0}\frac{A^k}{k!}\sum_{l\geqslant 0}\frac{B^l}{l!} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B.\end{aligned}$$

(iii) Dies folgt aus (ii) mit

$$I = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{A-A} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^{-A} = \mathrm{e}^{-A}\mathrm{e}^A.$$

Also ist e^A invertierbar, und die Inverse ist e^{-A}. ⟩⟩⟩⟩⟩

Achtung Für nicht kommutierende Operatoren gilt die binomische Formel für $n \geqslant 2$ und auch Aussage (ii) im Allgemeinen *nicht*. ⊸

Zwei Beispiele

Im Allgemeinen ist die Berechnung der Reihe von e^A nicht praktisch. Zwei wichtige Ausnahmen bilden jedoch diagonale und nilpotente Operatoren.

Definition *Ein Operator $A \in L(V)$ heißt Diagonaloperator, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren von A besitzt. Er heißt nilpotent, falls $A^{m+1} = 0$ für ein $m \geqslant 0$.* ⋊

Ist A nilpotent mit $A^{m+1} = 0$, so ist

$$\mathrm{e}^A = \sum_{0\leqslant k\leqslant m} \frac{1}{k!}A^k = I + A + .. + \frac{1}{m!}A^m$$

ein *Polynom* in A. Ist A ein Diagonaloperator, so nimmt er in einer Basis aus Eigenvektoren Diagonalgestalt $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, .., \lambda_n)$ an. Hierfür gilt offensichtlich

$$\mathrm{e}^{\Lambda} = \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, .., \mathrm{e}^{\lambda_n}).$$

In einer anderen Basis ist dann $A = T^{-1}\Lambda T$ mit einem entsprechenden Isomorphismus T, und es gilt

$$\mathrm{e}^{A} = \mathrm{e}^{T^{-1}\Lambda T} = T^{-1}\mathrm{e}^{\Lambda}T.$$

Die komplizierte Bestimmung von e^A wird damit auf die einfache Bestimmung von e^{Λ} zurückgeführt.

Mit Hilfe der SN-Zerlegung von Operatoren werden wir in Abschnitt 6 den allgemeinen Fall auf diese beiden Spezialfälle zurückführen.

▪ 1-Parametergruppen

Statt des Exponenzials e^A betrachten wir nun die Familie e^{At} mit $t \in \mathbb{R}$.

Definition *Eine 1-Parametergruppe ist eine Abbildung*

$$\Phi : \ \mathbb{R} \to G, \quad t \mapsto \Phi^t$$

von $\mathbb{R}$ in eine multiplikative Gruppe G mit den zwei Eigenschaften

$$\Phi^0 = I, \qquad \Phi^{s+t} = \Phi^s\Phi^t, \qquad s, t \in \mathbb{R},$$

wobei I das neutrale Element in G bezeichnet. ⋊

Bei einer 1-Parametergruppe handelt es sich also um einen *Gruppenhomomorphismus* $(\mathbb{R}, +) \to (G, \cdot)$. Wegen

$$\Phi^s\Phi^t = \Phi^{s+t} = \Phi^{t+s} = \Phi^t\Phi^s$$

kommutieren alle Mitglieder einer 1-Parametergruppe, auch wenn G selbst keine kommutative Gruppe ist. Außerdem ist Φ^{-t} das Inverse zu Φ^t, denn

$$I = \Phi^0 = \Phi^{t-t} = \Phi^t\Phi^{-t} = \Phi^{-t}\Phi^t.$$

Jedes Element einer 1-Parametergruppe ist also invertierbar. — Nun zurück zu unserer Familie $t \mapsto \mathrm{e}^{At}$.

4 **Satz** *Für jedes $A \in L(V)$ ist*

$$\Phi : \ \mathbb{R} \to L(V), \quad t \mapsto \Phi^t = \mathrm{e}^{At}$$

eine differenzierbare 1-Parametergruppe in $L(V)$ mit

$$(\mathrm{e}^{At})^{\cdot} = A\mathrm{e}^{At}. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Offensichtlich ist $\mathrm{e}^{A0} = \mathrm{e}^0 = I$ und, da As und At kommutieren,

$$\mathrm{e}^{A(s+t)} = \mathrm{e}^{As+At} = \mathrm{e}^{As}\mathrm{e}^{At}.$$

Somit handelt es sich um eine 1-Parametergruppe. Ferner ist

$$\mathrm{e}^{Ah} - I = \sum_{k\geqslant 1} \frac{A^k}{k!}h^k = Ah + O(h^2),$$

woraus sich

$$(\mathrm{e}^{At})^{\cdot}\Big|_{t=0} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\mathrm{e}^{Ah} - I) = A$$

ergibt. Mit der Gruppeneigenschaft folgt daraus für jedes andere t

$$(\mathrm{e}^{At})^{\cdot} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathrm{e}^{A(s+t)}\Big|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathrm{e}^{As}\mathrm{e}^{At}\Big|_{s=0} = A\mathrm{e}^{At}.$$ ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Noch ein Beispiel

Betrachte den Vektorraum

$$P_n \coloneqq \{p = a_0 + a_1x + .. + a_{n-1}x^{n-1} : a_0, .., a_{n-1} \in \mathbb{R}\}$$

aller reellen Polynome vom Grad kleiner n. Eine Basis bilden die Monome $1, x, .., x^{n-1}$, somit ist $\dim P_n = n$. Die übliche Differenziation definiert einen linearen *Differenzialoperator*

$$D : P_n \to P_n, \quad Dp = p'.$$

Offensichtlich ist $D^n = 0$, somit ist D nilpotent.

Satz *Das Exponenzial von Dt ist der Translationsoperator H^t:*

$$\mathrm{e}^{Dt} = H^t : P_n \to P_n, \quad H^t p = p(\cdot + t).$$ ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Nach der Formel von Taylor gilt

$$\begin{aligned}(H^t p)(x) &= p(x+t)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^{(k)}(x)}{k!}t^k\\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Dt)^k}{k!}p\right)(x) = (\mathrm{e}^{Dt}p)(x),\end{aligned}$$

wobei die Reihen für ein Polynom vom Grad kleiner n nach spätestens n Termen abbrechen. ⟩⟩⟩⟩⟩

16.6

Für die Basis

$$e_k \coloneqq \frac{x^k}{k!}, \qquad k = 0, .., n-1,$$

gilt

$$De_0 = 0, \qquad De_k = e_{k-1}, \qquad k \geqslant 1.$$

Damit erhält D die Matrixdarstellung

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung Der Differenzialoperator D ist ein einfaches und wichtiges Beispiel eines Operators, der auf unendlich-dimensionalen Funktionenräumen im Allgemeinen *unbeschränkt* ist. ⊸

16.2 Die lineare Differenzialgleichung

Mit den Ergebnissen des vorangehenden Abschnitts können wir die Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$ nun – zumindest formal – vollständig lösen.

5 **Fundamentalsatz** *Das Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

besitzt für jedes $x_0 \in V$ *die eindeutige Lösung*

$$\varphi : \mathbb{R} \to V, \quad \varphi(t) = \mathrm{e}^{At}x_0. \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Dies ist *eine* Lösung, denn $\varphi(0) = x_0$ und [4]

$$\dot{\varphi}(t) = (\mathrm{e}^{At}x_0)^{\cdot} = (\mathrm{e}^{At})^{\cdot}x_0 = A\mathrm{e}^{At}x_0 = A\varphi(t).$$

Es ist auch die *einzige* Lösung. Denn ist ψ eine weitere Lösung, so gilt, da e^{-At} und A kommutieren,

$$(\mathrm{e}^{-At}\psi(t))^{\cdot} = -A\mathrm{e}^{-At}\psi(t) + \mathrm{e}^{-At}A\psi(t) = 0.$$

Also ist $\mathrm{e}^{-At}\psi$ konstant, und Auswerten bei $t = 0$ ergibt

$$\mathrm{e}^{-At}\psi(t) = \psi(0) = x_0.$$

Also ist $\psi(t) = \mathrm{e}^{At}x_0$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Für eine lineare Differenzialgleichung ist $\varphi \equiv 0$ immer eine Lösung, genannt *Gleichgewichtslösung*. Aus dem Fundamentalsatz folgt, dass dies auch die einzige Lösung ist, die jemals den Wert 0 annimmt. Mit anderen Worten, keine andere Lösung kann den Wert 0 annehmen. Sie kann allerdings gegen diesen Gleichgewichtspunkt konvergieren. Solche Lösungen werden uns im nächsten Abschnitt begegnen.

Der Fundamentalsatz definiert eine Abbildung

$$\Phi : \ \mathbb{R} \times V \to V, \quad (t, x) \mapsto \mathrm{e}^{At} x,$$

genannt der *Fluss* der Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$. Fixieren wir x, so beschreibt sie die eindeutige Lösungskurve zum Anfangswert x. Fixieren wir dagegen t, so beschreibt sie die *Zeit-t-Abbildung* e^{At} des Systems, die jedem Anfangswert denjenigen Punkt zuordnet, den er zum Zeitpunkt t erreicht. Diese Abbildungen bilden also eine 1-Parametergruppe in $L(V)$ bestehend aus linearen Isomorphismen des Vektorraums V.

Infinitesimaler Generator

Jeder beschränkte lineare Operator definiert also eine lineare Differenzialgleichung und damit eine differenzierbare 1-Parametergruppe von Operatoren. Hiervon gilt auch folgende Umkehrung.

Satz *Zu jeder differenzierbaren 1-Parametergruppe Φ in $L(V)$ existiert ein eindeutig bestimmter Operator A in $L(V)$, genannt ihr infinitesimaler Generator, so dass $\Phi^t = \mathrm{e}^{At}$.* ⋊

⟪⟪ Da Φ differenzierbar ist, können wir eine Abbildung $A\colon V \to V$ in jedem Punkt $x \in V$ definieren durch

$$Ax \coloneqq (\Phi^t x)^{\cdot}\Big|_{t=0}.$$

Diese Abbildung ist linear, da Φ^t für jedes t linear ist. Somit ist diese Schreibweise gerechtfertigt.

Wir zeigen, dass $\Phi^t x_0$ das Anfangswertproblem $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ löst. Offensichtlich ist $\Phi^0 x_0 = x_0$. Ferner gilt aufgrund der Gruppenstruktur von Φ und der Definition von A

$$(\Phi^t x_0)^{\cdot} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \Phi^{s+t} x_0 \Big|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \Phi^s (\Phi^t x_0) \Big|_{s=0} = A\Phi^t x_0.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung $_5$ dieses Anfangswertproblems gilt also

$$\Phi^t x_0 = \mathrm{e}^{At} x_0.$$

Da dies für alle $x_0 \in V$ gilt, ist $\Phi^t = \mathrm{e}^{At}$. ⟫⟫

16.8

Damit existiert ein eineindeutiger Zusammenhang

$$A \in L(V) \quad \leftrightsquigarrow \quad \text{differenzierbare 1-Parametergruppe } \Phi^t \text{ in } L(V).$$

Diesen werden wir im nächsten Kapitel auf n-dimensionale *nichtlineare* Differenzialgleichungen verallgemeinern.

▪ Determinante und Spur

Die *Determinante* und die *Spur* eines Operators $A \in L(V)$ sind definiert als die Determinante und Spur einer beliebigen Matrixdarstellung von A. Dies ist *unabhängig* von der Wahl der Matrixdarstellung, denn für Matrizen gilt ja

$$\det(AB) = \det(BA), \qquad \operatorname{sp}(AB) = \operatorname{sp}(BA).$$

Sind B und C zwei Matrixdarstellung von A, so ist $C = T^{-1}BT$ mit einem geeigneten T und damit beispielsweise

$$\operatorname{sp}(C) = \operatorname{sp}(T^{-1}BT) = \operatorname{sp}(BTT^{-1}) = \operatorname{sp}(B).$$

Also sind Determinante und Spur unabhängig von der Koordinatenwahl.

Für die Determinante einer 1-Parametergruppe $t \mapsto \mathrm{e}^{At}$ gilt eine nützliche Differenzialgleichung.

Lemma *Für $A \in L(V)$ gilt* $(\det \mathrm{e}^{At})^{\cdot}\big|_{t=0} = \operatorname{sp} A$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Es ist

$$\mathrm{e}^{At} = I + tA(t), \qquad A(t) = \sum_{k \geqslant 1} \frac{t^{k-1}}{k!} A^k.$$

In einer beliebigen Basis erhält dies eine Spaltenvektordarstellung

$$\mathrm{e}^{At} = [I_1 + tA_1(t), .., I_n + tA_n(t)],$$

wobei A_i die i-te Spalte der Matrix A bezeichnet. Mit der Linearität der Determinante in jeder Spalte folgt hieraus

$$\begin{aligned} \det \mathrm{e}^{At} &= \det [I_1 + tA_1(t), .., I_n + tA_n(t)] \\ &= \det I + t \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \det [I_1, .., A_i(t), .., I_n] + O(t^2), \end{aligned}$$

wobei $A_i(t)$ in der i-ten Spalte der Matrix steht. Also ist

$$\det \mathrm{e}^{At} = 1 + t \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} A_{ii}(t) + O(t^2) = 1 + t \operatorname{sp} A + O(t^2).$$

Das ergibt die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

6 **Satz von Liouville** *Für $A \in L(V)$ gilt*

$$(\det \mathrm{e}^{At})^{\boldsymbol{\cdot}} = \operatorname{sp}(A) \det \mathrm{e}^{At}$$

und damit auch $\det \mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{\operatorname{sp}(A)t}$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Für die skalare Funktion $d(t) = \det \mathrm{e}^{At}$ gilt

$$\begin{aligned} d(s+t) &= \det(\mathrm{e}^{A(s+t)}) \\ &= \det(\mathrm{e}^{As}\mathrm{e}^{At}) \\ &= \det(\mathrm{e}^{As})\det(\mathrm{e}^{At}) = d(s)d(t). \end{aligned}$$

Mit dem vorangehenden Lemma gilt deshalb

$$d(t)^{\boldsymbol{\cdot}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} d(s+t)\Big|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} d(s)\Big|_{s=0} d(t) = \operatorname{sp}(A) d(t).$$

Dies ist die erste Behauptung. Die zweite folgt hieraus mit $d(0) = 1$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Die Bedeutung des Satzes von Liouville liegt in der geometrischen Interpretation von e^{At} als Zeit-t-Abbildung der Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$. Die Determinante einer linearen Abbildung ist derjenige Faktor, mit dem das Volumen jedes Körpers unter dieser Abbildung multipliziert wird. Der Satz von Liouville besagt also, dass die Zeit-t-Abbildung einer linearen Differenzialgleichung das Volumen jedes beliebigen Körpers mit dem Faktor $\exp(\operatorname{sp} At)$ multipliziert. — Ein Spezialfall ist folgendes

Korollar *Die 1-Parametergruppe* e^{At} *ist volumenerhaltend genau dann, wenn die Spur von A verschwindet.* ⋊

Bei zweidimensionalen Systemen spricht man auch von *flächentreuen* Abbildungen.

▪ Koordinatentransformationen

Bis hierhin betrachteten wir linearen Differenzialgleichungen ohne Bezug zu konkreten Koordinaten. Erst wenn wir in einem Vektorraum V der Dimension n eine Basis $v_1, .., v_n$ und damit Koordinaten $x = x_1 v_1 + .. + x_n v_n$ auszeichnen, wird A durch eine $n \times n$-Matrix (A_{ij}) dargestellt, und wir erhalten

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

genannt ein *System von n homogenen linearen Differenzialgleichungen erster Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten*.

Wählen wir eine andere Basis, so erhalten wir natürliche eine andere solche Darstellung

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{n} B_{ij} y_j, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Diese hängt mit der vorangehenden in folgender Weise zusammen.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Koordinatensystemen ist gegeben durch einen linearen Isomorphismus

$$T : \ V \to V, \quad x = Ty.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} T\dot{y} &= TBy \\ &= (Ty)^{\boldsymbol{\cdot}} = \dot{x} = Ax = ATy. \end{aligned}$$

Also ist $TB = AT$, oder

$$B = T^{-1}AT.$$

Bemerkung Die allgemeine Lösung im B-System ist

$$y(t) = \mathrm{e}^{Bt} y_0.$$

Mit $x = Ty$ ist die allgemeine Lösung im A-System damit

$$\begin{aligned} x(t) = Ty(t) &= T\mathrm{e}^{Bt} y_0 \\ &= T\mathrm{e}^{Bt} T^{-1} x_0 \\ &= \mathrm{e}^{TBT^{-1}} x_0 \\ &= \mathrm{e}^{At} x_0 \end{aligned}$$

wie es sich gehört. ⊸

Geometrisch betrachtet bildet T Lösungen im B-System in Lösungen im A-System ab. Kennen wir das *Phasenportrait*, also die Gesamtheit aller Lösungen der Differenzialgleichung, im B-System, so kennen wir bis auf einen linearen Isomorphismus somit auch im A-System.

Eine lineare Differenzialgleichung versteht man natürlich am leichtesten, wenn man sie in Koordinaten betrachtet, in denen sie eine besonders einfache Form annimmt. Dies wird hier die sogenannte SN-Zerlegung sein – eine einfachere Version der jordanschen Normalform –, die wir in Abschnitt 6 betrachten. Zunächst betrachten wir den besonders übersichtlichen, aber wichtigen Spezialfall zweidimensionaler Systeme.

16.3 Zweidimensionale lineare Systeme

Das Phasenportrait zweidimensionaler linearer Differenzialgleichungen wird fast ausschließlich durch die beiden Eigenwerte des linearen Operators bestimmt. Diese können (i) reell und einfach, (ii) reell und doppelt, oder (iii) komplex konjugiert sein. Im Fall doppelter Eigenwerte ist noch zu unterscheiden, ob A diagonalisierbar ist oder nicht.

Der Nullpunkt ist immer ein *Gleichgewichtspunkt* jeder linearen Differenzialgleichung. Das heißt, die konstante Kurve $\varphi \equiv 0$ ist immer eine Lösung, genannt *Gleichgewichtslösung*. Uns interessiert auch noch die Frage, welche anderen Lösungen für $t \to \infty$ oder $t \to -\infty$ gegen diesen Gleichgewichtspunkt konvergieren.

▪ Einfache reelle Eigenwerte

In diesem Fall ist A ein Diagonaloperator. In geeigneten Koordinaten ist

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

mit den beiden Eigenwerten λ und μ. Die allgemeine Lösung von $\dot{x} = Ax$ lautet

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

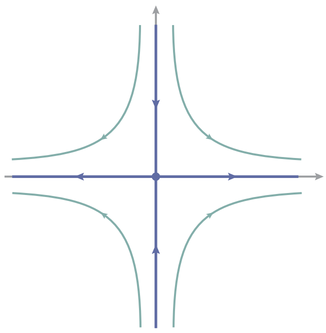
Das *Phasenportrait* hängt von der Lage der Eigenwerte auf der reellen Achse ab. Gilt $\lambda\mu < 0$, so spricht man von einem *Sattel*. Es gibt je eine Richtung – die Abszisse und die Ordinate – in denen die Lösungen für $t \to \infty$ respektive $t \to -\infty$ gegen den Gleichgewichtspunkt 0 konvergieren. Alle anderen Lösungen sind unbeschränkt. In allgemeinen Koordinaten gilt daher folgender Satz.

Sattel *Hat A reelle Eigenwerte $\mu < 0 < \lambda$, so konvergieren die Lösungen im μ-Eigenraum für $t \to \infty$ und im λ-Eigenraum für $t \to -\infty$ gegen den Gleichgewichtspunkt 0. Alle anderen Lösungen sind für $t \to \pm\infty$ unbeschränkt.* ⋊

Sind beide Eigenwerte negativ, so spricht man von einem *stabilen Knoten*. Alle Lösungen konvergieren für $t \to \infty$ gegen den Gleichgewichtspunkt 0, wobei für $\mu < \lambda < 0$ alle Lösungen außerhalb des μ-Eigenraumes tangential zum λ-Eigenraum gegen den Gleichgewichtspunkt konvergieren. Dies ist auch das Bild in allgemeinen Koordinaten.

16.12

Abb 1 Sattelpunkt in angepassten und allgemeinen Koordinaten



Stabiler Knoten *Hat A die reellen Eigenwerte $\mu < \lambda < 0$, so konvergieren alle Lösungen für $t \to \infty$ gegen den Gleichgewichtspunkt 0, wobei außerhalb des μ-Eigenraumes alle Lösungen tangential zum λ-Eigenraum konvergieren.* ⋊

Sind beide Eigenwerte positiv, so spricht man von einem *instabilen Knoten*. Es gelten analoge Konvergenzaussagen, wenn man $t \to -\infty$ statt $t \to \infty$ betrachtet. Der Fall $\mu < 0 = \lambda$ ist in Abbildung 3 skizziert.

▪ Doppelte Eigenwerte

Diesen Fall nennt man *entartet*. Man sieht dem Operator sofort an, ob er diagonalisierbar ist oder nicht.

Abb 2 Stabiler Knoten in angepassten und allgemeinen Koordinaten

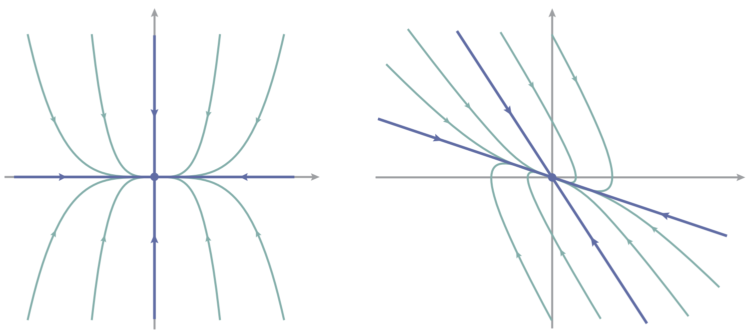
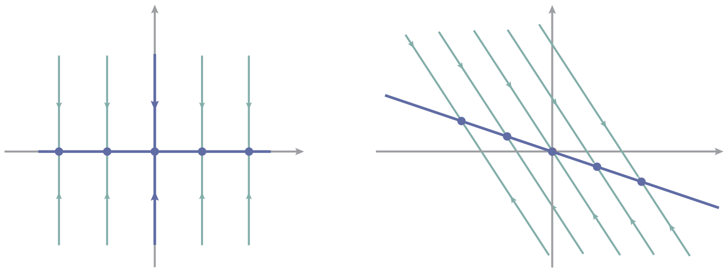


Abb 3 Eigenwerte $\mu < 0 = \lambda$



Lemma *Sei A ein zweidimensionaler Operator mit doppelten Eigenwert. Ist A diagonalisierbar, so hat A in jeder Basis Diagonalgestalt.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ In diesem Fall existiert ein T mit

$$T^{-1}AT = \lambda I.$$

Dann ist aber auch $A = T\lambda I T^{-1} = \lambda T T^{-1} = \lambda I$. Mit anderen Worten, A ist ein Vielfaches der Identität, und diese hat Diagonalgestalt in jeder Basis. ⟩⟩⟩⟩⟩

A ist ein Diagonaloperator Für $\lambda < 0$ spricht man von einem *entarteten stabilen Knoten*. Alle Lösungen konvergieren gegen den Gleichgewichtspunkt 0, und sämtliche Lösungskurven sind Geraden – siehe Abbildung 4. Entsprechendes gilt für $\lambda > 0$, dem *entarteten instabilen Knoten*.

A ist ein Jordanblock In geeigneten Koordinaten ist

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da I und N kommutieren und N^2 verschwindet, ist

Abb 4 Entarteter stabiler Knoten, diagonalisierbar

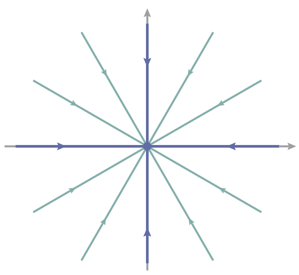
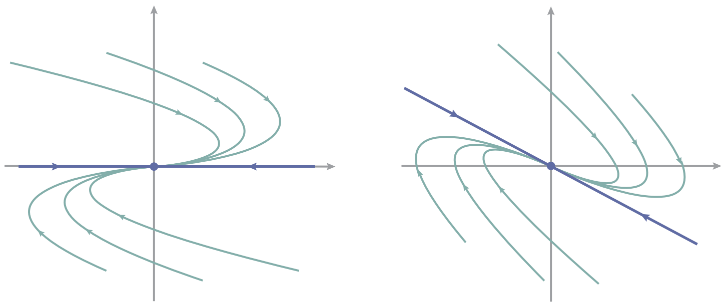


Abb 5 Entarteter stabiler Knoten, nicht diagonalisierbar



$$\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{\lambda It}\mathrm{e}^{Nt} = \mathrm{e}^{\lambda t}(I + Nt) = \mathrm{e}^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung ist damit

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\begin{pmatrix} a + bt \\ b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Alle Lösungskurven sind dabei im Gleichgewichtspunkt tangential an die Abszisse, also den eindimensionalen Eigenraum des doppelten Eigenwerts. Man spricht ebenfalls von einem *entarteten Knoten* – siehe Abbildung 5.

Entarteter stabiler Knoten *Hat A doppelte reelle Eigenwerte $\lambda < 0$ und Diagonalgestalt, so konvergieren alle Lösungen für $t \to \infty$ aus allen Richtungen geradlinig gegen den Gleichgewichtspunkt 0. Hat A dagegen keine Diagonalgestalt, so konvergieren diese tangential zum eindimensionalen λ-Eigenraum gegen den Gleichgewichtspunkt 0. — Für $\lambda > 0$ gilt Entsprechendes für $t \to -\infty$.* ⋊

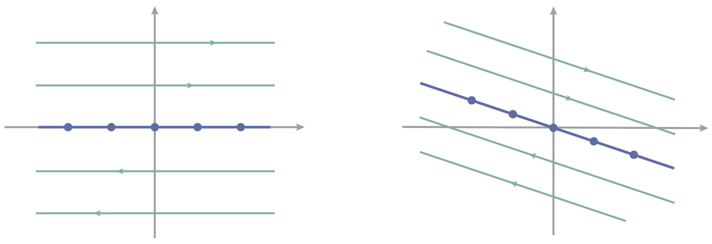
Der Fall eines nichtdiagonalisierbaren Operators mit doppeltem Eigenwert 0 ist in Abbildung 6 skizziert.

Die verschiedenen Knoten kann man somit geometrisch anhand der Anzahl der asymptotischen Richtungen ihrer Lösungskurven unterscheiden. Diese ist

$$\begin{array}{lll} 2 & \text{für} & \lambda \neq \mu, \\ \infty & \text{für} & \lambda = \mu,\ A = \lambda I, \\ 1 & \text{für} & \lambda = \mu,\ A \neq \lambda I. \end{array}$$

Die Anzahl 2 gilt im Prinzip auch für den Sattel, nur dass hier fast alle Lösungen weder für $t \to \infty$ noch für $t \to -\infty$ konvergieren.

Abb 6 Entarteter Knoten mit Eigenwert 0



Komplexe Eigenwerte

Ein zweidimensionaler reeller Operator mit nicht-reellen Eigenwerten kann in folgende *reelle Normalform* gebracht werden.

7 **Lemma** *Hat der Operator A komplex konjugierte Eigenwerte $\alpha \pm \mathrm{i}\omega$, so erhält A in geeigneten Koordinaten die Gestalt*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I + \omega J, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Zum Eigenwert $\alpha + \mathrm{i}\omega$ existiert ein Eigenvektor $v + \mathrm{i}u$, so dass

$$A(v + \mathrm{i}u) = (\alpha + \mathrm{i}\omega)(v + \mathrm{i}u) = (\alpha v - \omega u) + \mathrm{i}(\omega v + \alpha u).$$

Somit ist

$$\begin{aligned} Au &= \alpha u + \omega v, \\ Av &= -\omega u + \alpha v. \end{aligned}$$

Für die Matrix $T = [u, v]$ mit den Spalten u und v gilt somit

$$AT = A[u, v] = [u, v]\begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix}.$$

In der reellen Basis (u, v) erhält A daher die angegebene Gestalt. ⟩⟩⟩⟩⟩

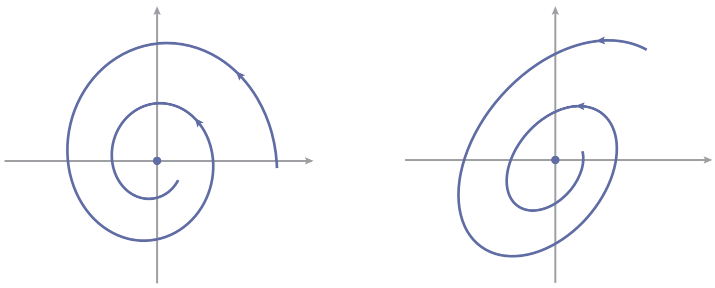
Lemma *Für die Matrix Λ des vorangehenden Lemmas gilt*

$$\mathrm{e}^{\Lambda t} = \mathrm{e}^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Es ist $\mathrm{e}^{\Lambda t} = \mathrm{e}^{\alpha I t + \omega J t} = \mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{\omega J t}$, und die Behauptung folgt mit A-9

$$\mathrm{e}^{Jt} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}. \quad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

Abb 7 Stabiler Strudel in angepassten und allgemeinen Koordinaten



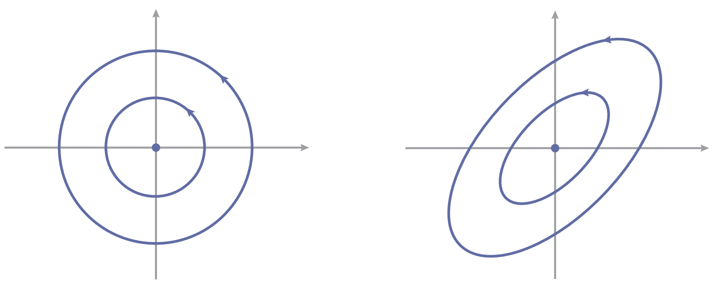
Die Abbildung $\mathrm{e}^{\Lambda t}$ beschreibt eine Streckung um den Faktor $\mathrm{e}^{\alpha t}$ und eine Drehung um den Winkel ωt. Es handelt sich also um eine *Drehstreckung*. Diese beiden Operationen kommutieren, so dass auf deren Reihenfolge nicht ankommt. Das Phasenportrait ist ein *Strudel* oder ein *Zentrum*.

Strudel und Zentrum *Hat A nichtreelle Eigenwerte $\alpha \pm \mathrm{i}\omega$, so ist die 1-Parametergruppe e^{At} eine Familie von Drehstreckungen mit dem Faktor $\mathrm{e}^{\alpha t}$ und dem Winkel ωt. Man spricht von einem Zentrum, falls $\alpha = 0$, und einem stabilen respektive instabilen Strudel, falls $\alpha < 0$ respektive $\alpha > 0$.* ⋊

In einem stabilen Strudel konvergieren alle Lösungen gegen den Gleichgewichtspunkt, *ohne* eine asymptotische Richtung einzunehmen. Dies unterscheidet ihn vom stabilen Knoten.

Das Zentrum ist unter den zweidimensionalen linearen Systemen das *einzige* mit nichttrivialen periodischen Lösungen. Außerdem haben alle Lösungen *dieselbe Periode* $T = 2\pi/\omega$. Dies ist charakteristisch für *lineare* Systeme. In nichtlinearen Systemen wie dem mathematischen Pendel variiert dagegen die Periode periodischer Lösungen mit deren Amplitude.

Abb 8 Zentrum in angepassten und allgemeinen Koordinaten



Klassifikation zweidimensionaler Systeme

Wir klassifizieren die zweidimensionalen Systeme anhand ihrer Determinante und Spur. Das charakteristische Polynom eines zweidimensionalen Operators A ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - s\lambda + d, \qquad s = \operatorname{sp} A, \quad d = \det A,$$

wie man anhand einer beliebigen Matrixdarstellung verifiziert. Seine Eigenwerte sind somit

$$\lambda_\pm = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4d}}{2}.$$

Dies führt zu folgender Fallunterscheidung.

Determinante negativ: Dann sind beide Eigenwerte reell mit verschiedenen Vorzeichen, und es liegt ein Sattel vor:

$$\det A < 0 \quad \rightsquigarrow \quad \text{Sattel.}$$

Determinate nicht negativ: . Hier entscheidet die *Diskriminante* $\Delta = s^2 - 4d$:

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\quad \rightsquigarrow \quad \text{Knoten,} \\ \Delta = 0 &\quad \rightsquigarrow \quad \text{entarteter Knoten,} \\ \Delta < 0 &\quad \rightsquigarrow \quad \text{Strudel oder Zentrum.} \end{aligned}$$

Außerdem bestimmt das Vorzeichen der Spur von A die Stabilität:

$$\begin{aligned} \operatorname{sp} A < 0 &\quad \rightsquigarrow \quad \text{stabil,} \\ \operatorname{sp} A > 0 &\quad \rightsquigarrow \quad \text{instabil.} \end{aligned}$$

Abbildung 9 zeigt diese Fälle in einem Spur-Determinante-Diagramm, zusammen mit der zugehörigen Konfiguration der beiden Eigenwerte. Die Kurve

$$\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = s^2/4$$

ist eine Parabel, die Knoten und Sattel von Strudeln und Zentren trennt. Sie ist der Ort der entarteten Knoten, wobei deren Typ – diagonalisierbar oder nicht – nicht von Spur und Determinante ablesbar ist.

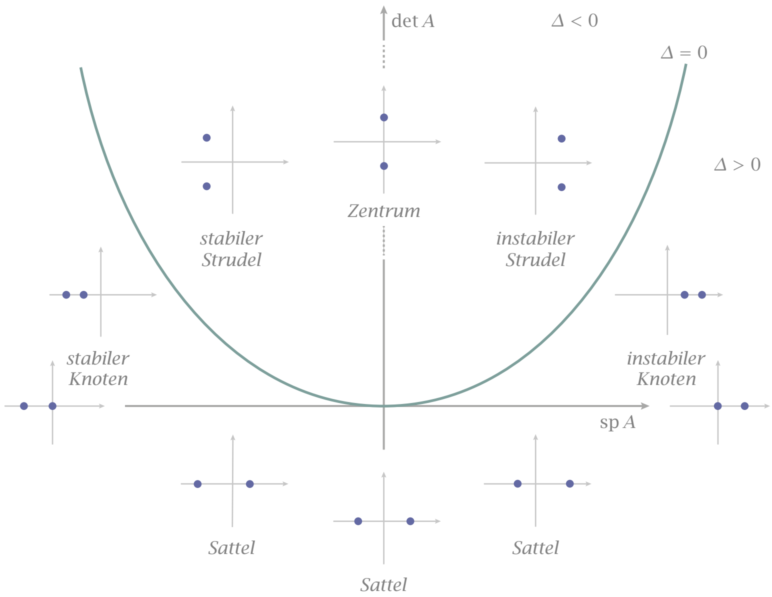
Die Fälle

$$\begin{aligned} \det A = 0 &\quad \rightsquigarrow \quad A \text{ singulär,} \\ \Delta = 0 &\quad \rightsquigarrow \quad \text{doppelte Eigenwerte,} \\ \operatorname{sp} A = 0 &\quad \rightsquigarrow \quad \text{Fluss flächentreu} \end{aligned}$$

sind ›untypisch‹ und treten in einem ›allgemeinen‹ System nicht auf.

16.18

Abb 9 Spur-Determinante-Diagramm



▪ Der harmonische Oszillator mit Dämpfung

Als Beispiel betrachten wir den harmonischen Oszillator mit Dämpfung. Er wird durch die Gleichung

$$\ddot{u} = -\omega^2 u - \rho \dot{u}$$

beschrieben. Hierbei ist $\omega > 0$ die Frequenz des ungedämpften Oszillators und $\rho \geqslant 0$ der Reibungskoeffizient der Dämpfung. Diese ist proportional zur Geschwindigkeit $\dot{u}$ und wirkt dieser entgegengesetzt.

Setzen wir

$$x_1 = u, \qquad x_2 = \dot{u},$$

so ist die Gleichung äquivalent zum System

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\rho \end{pmatrix}.$$

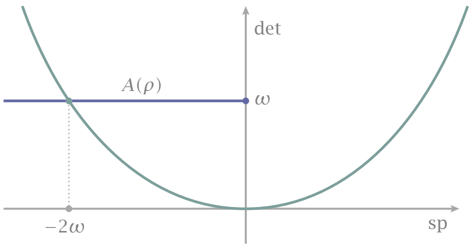
Es ist also

$$d = \omega^2 > 0, \qquad s = -\rho \leqslant 0, \qquad \Delta = \rho^2 - 4\omega^2.$$

Insbesondere ist $\Delta = 0$ genau dann, wenn $\rho = 2\omega$.

Abb 10

Die Familie $A(\rho)$



Betrachten wir die Frequenz ω als fest und den Reibungskoeffizienten ρ als Parameter, so erhalten wir eine Familie von Operatoren $A = A(\rho)$, die im Spur-Determinante-Diagramm eine horizontale Halbgerade beschreiben, die die Parabel $\Delta = 0$ im Punkt $(-2\omega, \omega)$ schneidet und im Punkt $(0, \omega)$ endet. Dabei treten vier Fälle auf.

Stabiler Knoten für $\rho > 2\omega$ Fast alle Lösungen konvergieren gegen die Gleichgewichtslage in der Richtung des Eigenraumes des größeren der beiden negativen Eigenwerte, wobei sie höchstens einmal die Richtung wechseln – siehe Abbildung 11 links.

Entarteter stabiler Knoten für $\rho = 2\omega$ Da A *kein* Diagonaloperator ist, konvergieren alle Lösungen in der Richtung des eindimensionalen Eigenraumes von A gegen 0. Dieser wird von dem Vektor $(1, -1)^\top$ aufgespannt – siehe Abbildung 11 rechts.

Stabiler Strudel für $0 < \rho < 2\omega$ Man spricht von *gedämpften Schwingungen*. Der Oszillator schwingt mit immer kleineren Ausschlägen unendlich oft um die Gleichgewichtslage. Abbildung 12 links zeigt Lösungen für *verschiedene* ρ.

Abb 11 Stark gedämpfter Oszillator: stabiler und entarteter Knoten

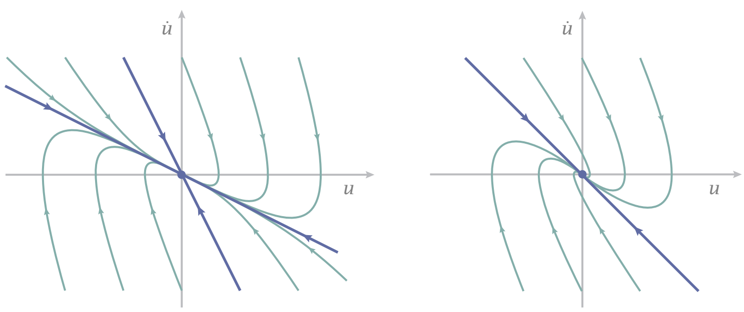
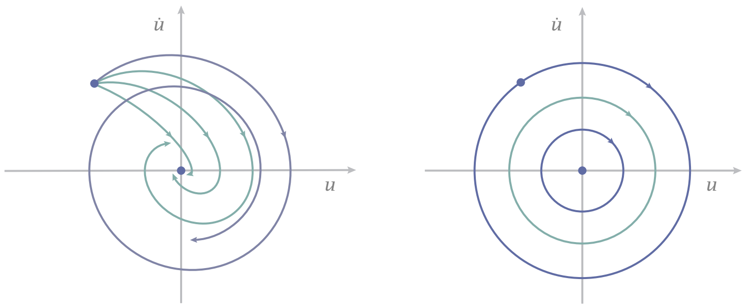


Abb 12 Gedämpfte und ungedämpfte Schwingungen: Strudel und Zentrum



Zentrum für $\rho = 0$ Man spricht von *ungedämpften Schwingungen*. Alle Lösungen sind periodisch mit Frequenz ω und Periode $T = 2\pi/\omega$. Siehe Abbildung 12 rechts.

Im Fall der gedämpften Schwingung sind die Eigenwerte $\alpha \pm \mathrm{i}\mu$ mit

$$\alpha = -\rho/2, \qquad \mu = \sqrt{\omega^2 - \rho^2/4}.$$

Für die Auslenkung u des Oszillators erhält man

$$u(t) = a\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\mu t + b\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\mu t = r\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\mu t + \tau)$$

mit

$$r^2 = a^2 + b^2, \qquad \cos\tau = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Man nennt μ die *reduzierte Frequenz* des gedämpften Oszillators. Für die zugehörige Periode gilt

$$T = \frac{2\pi}{\mu} \to \begin{cases} \infty, & \rho \nearrow 2\omega, \\ \dfrac{2\pi}{\omega}, & \rho \searrow 0. \end{cases}$$

16.4 Fundamentallösungen

Etwas allgemeiner und flexibler als das Exponenzial e^{At} ist der Begriff der *Fundamentallösung* – vor allem im Hinblick auf das manuelle Lösen von Differenzialgleichungen. Der Vektorraum V habe im Folgenden endliche Dimension.

16.21

Definition *Sei $n = \dim V$. Dann heißt jedes System $\varphi_1, .., \varphi_n$ von n linear unabhängigen Lösungen von $\dot{x} = Ax$ eine Fundamentallösung dieser Differenzialgleichung.* $\rtimes$

Dabei genügt es zu verlangen, dass diese Lösungen nur in *einem* Zeitpunkt linear unabhängig sind:

8 **Lemma** *Sind die Lösungen $\varphi_1, .., \varphi_n$ von $\dot{x} = Ax$ zu einem Zeitpunkt t_0 linear unabhängig, so sind sie es auch zu jedem anderem Zeitpunkt t.* $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sind die $\varphi_1, .., \varphi_n$ bei t_0 linear abhängig, so verschwindet dort eine nichttriviale Linearkombination aus ihnen. Diese stellt eine Lösung von $\dot{x} = Ax$ mit Wert 0 bei t_0 dar. Aufgrund der Eindeutigkeit aller Lösungen ist diese *identisch* 0. Also sind die $\varphi_1, .., \varphi_n$ zu jedem Zeitpunkt t linear abhängig. ⟩⟩⟩⟩⟩

9 **Satz** *Jede Lösung von $\dot{x} = Ax$ ist Linearkombination der Lösungen eines Fundamentalsystems $\varphi_1, .., \varphi_n$.* $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Jede Lösung φ ist eindeutig durch ihren Anfangswert bei $t = 0$ bestimmt. Dieser lässt sich als Linearkombination aus $\varphi_1(0), .., \varphi_n(0)$ darstellen:

$$\varphi(0) = a_1\varphi_1(0) + .. + a_n\varphi_n(0).$$

Aus Eindeutigkeitsgründen gilt dann auch $\varphi(t) = a_1\varphi_1(t) + .. + a_n\varphi_n(t)$ zu jedem anderen Zeitpunkt t. ⟩⟩⟩⟩⟩

Kandidaten für eine Fundamentallösung von $\dot{x} = Ax$ findet man mithilfe der Eigenvektoren von A. Das folgende Lemma gilt im Reellen wie im Komplexen. Der Beweis ist eine einzeilige Rechnung.

10 **Lemma** *Ist v Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so ist*

$$v\mathrm{e}^{\lambda t}$$

eine Lösung der linearen Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$. $\rtimes$

Geometrisch betrachtet spannt der Eigenvektor v einen unter A invarianten Unterraum auf, in dem sich A auf eine Multiplikation mit λ und die Differenzialgleichung auf $\dot{x} = \lambda x$ reduziert. Ist λ reell, so ist dies ein eindimensionaler reeller Unterraum.

Besitzt A reelle, linear unabhängige Eigenvektoren $v_1, .., v_m$ zu reellen, nicht notwendig verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, .., \lambda_m$, so erhält man entsprechend m linear unabhängige Lösungen von $\dot{x} = Ax$. — Betrachten wir nun den Fall eines komplexen Eigenwertes.

11 **Lemma** *Besitzt A den komplexen Eigenwert $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\omega$ mit Eigenvektor $w = v + \mathrm{i}u$, so bilden die zwei Spalten von*

$$[u, v]\,\mathrm{e}^{\Lambda t}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix},$$

also

$$(u\cos\omega t + v\sin\omega t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}, \qquad (v\cos\omega t - u\sin\omega t)\,\mathrm{e}^{\alpha t},$$

zwei linear unabhängige Lösungen von $\dot{x} = Ax$. ⋊

⟪⟪ Wie im zweidimensionalen Fall $_7$ gilt

$$A(v + \mathrm{i}u) = (\alpha + \mathrm{i}\omega)(v + \mathrm{i}u) = (\alpha v - \omega u) + \mathrm{i}(\omega v + \alpha u)$$

und somit $Au = \alpha u + \omega v$ und $Av = -\omega u + \alpha v$. Für die Matrix $T = [u, v]$ mit den zwei Spalten u und v gilt somit die Identität

$$AT = T\Lambda,$$

Daraus folgt,

$$(T\mathrm{e}^{\Lambda t})^{\cdot} = T\Lambda\mathrm{e}^{\Lambda t} = AT\mathrm{e}^{\Lambda t},$$

und $T\mathrm{e}^{\Lambda t}$ ist eine Matrixlösung der Differenzialgleichung. Die Vektoren u und v sind linear unabhängig, da es andernfalls auch einen reellen Eigenvektor zu λ gäbe und damit λ selbst reell wäre. ⟫⟫

Die Vektoren u und v spannen einen unter A invarianten, zweidimensionalen Unterraum von V auf, auf dem A die Matrixdarstellung Λ erhält. Dieser Unterraum wird also von einem Strudel oder Zentrum ausgefüllt, je nachdem, ob $\alpha \neq 0$ oder $\alpha = 0$.

Der zu λ konjugierte Eigenwert $\alpha - \mathrm{i}\omega$ mit Eigenvektor $v - \mathrm{i}u$ definiert übrigens denselben Unterraum und dieselbe Dynamik, allerdings mit entgegengesetzter Orientierung.

Genau wie ein komplexer Eigenwert wird der Fall eines reellen Eigenwertes mit Jordanblock behandelt. Wir betrachten hier nur den einfachsten Fall.

Lemma *Besitzt A den reellen Eigenwert λ nit Eigenvektor v und Nebenvektor w, so bilden die zwei Spalten von*

$$[v, w]\,\mathrm{e}^{Lt}, \qquad L = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix},$$

also

$$\mathrm{e}^{\lambda t}v, \qquad \mathrm{e}^{\lambda t}(w + tv),$$

zwei linear unabhängige Lösungen von $\dot{x} = Ax$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Gemäß Annahme gilt

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v, \\ Aw &= \lambda w + v. \end{aligned}$$

Für die $n \times 2$-Matrix $T = [v, w]$ und L wie im Lemma gilt also

$$AT = TL.$$

Somit ist $T\mathrm{e}^{Lt}$ eine Matrixlösung der Differenzialgleichung, denn

$$(T\mathrm{e}^{Lt})^{\cdot} = T\Lambda\mathrm{e}^{Lt} = AT\mathrm{e}^{Lt}.$$

Die Vektoren v und w sind linear unabhängig, denn wir verlangen ja, dass w ein Nebenvektor ist. ⟩⟩⟩⟩⟩

▹ *Erstes Beispiel* Betrachte $\dot{x} = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind 1 und $2 \pm 3\mathrm{i}$, Eigenvektoren sind beispielsweise

$$\begin{aligned} w &= (-10, 3, 1), \\ v + \mathrm{i}u &= (0, -\mathrm{i}, 1) = (0, 0, 1) + \mathrm{i}(0, -1, 0). \end{aligned}$$

Ein Fundamentalsystem ist demnach

$$w\mathrm{e}^{t}, \qquad (u\cos 3t + v\sin 3t)\mathrm{e}^{2t}, \qquad (v\cos 3t - u\sin 3t)\mathrm{e}^{2t}.$$

In der reellen Basis w, v, u erhält A durch

$$x = Ty, \qquad T = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die Blockdiagonalgestalt

$$T^{-1}AT = B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & -3 \\ & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

und es ist

$$\mathrm{e}^{Bt} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & & \\ & \mathrm{e}^{2t}\cos 3t & -\mathrm{e}^{2t}\sin 3t \\ & \mathrm{e}^{2t}\sin 3t & \mathrm{e}^{2t}\cos 3t \end{pmatrix}. \quad ◂$$

16.24

Zweites Beispiel Betrachte $\dot{x} = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A bereits in Jordanscher Normalform. Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$ mit Eigenvektor $v_1 = e_1$ und Nebenvektor $v_2 = e_2$ sowie $\lambda = 3 = 2$ mit Eigenvektor $v_3 = e_3$. Ein Fundamentalsystem ist demnach

$$e_1 \mathrm{e}^t, \quad (e_2 + te_1)\mathrm{e}^t, \quad e_3 \mathrm{e}^{2t}.$$

16.5 Diagonalisierbare Gleichungen

Wir betrachten nun $\dot{x} = Ax$ in einem Vektorraum beliebiger endlicher Dimension. Am einfachsten ist die Situation, wenn A in einer geeigneten Basis Diagonalgestalt annimmt, oder, wie man sagt, *im Reellen diagonalisert werden kann.*

12 **Satz aus der linearen Algebra** *Sind alle Eigenwerte von $A \in L(V)$ reell und einfach, so besitzt der Vektorraum V eine Basis aus Eigenvektoren von A. In dieser nimmt A Diagonalgestalt an. Dasselbe gilt, wenn A normal bezüglich eines Skalarproduktes ist.*

Ist $v_1, .., v_n$ eine Basis aus Eigenvektoren von A zu den reellen Eigenwerten $\lambda_1, .., \lambda_n$, so bilden die Kurven

$$\varphi_k(t) = v_k \mathrm{e}^{\lambda_k t}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen. Da sich jede andere Lösung daraus linear kombinieren lässt $_9$, erhalten wir folgenden

13 **Satz** *Besitzt V eine Basis aus reellen Eigenvektoren $v_1, .., v_n$ von A mit Eigenwerten $\lambda_1, .., \lambda_n$, so ist die allgemeine Lösung von $\dot{x} = Ax$ eine Lienarkombination der Lösungen*

$$v_k \mathrm{e}^{\lambda_k t}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Die allgemeine Lösung ist somit die Überlagerung von n Exponenziallösungen in den durch die einzelnen Eigenvektoren aufgespannten eindimensionalen invarianten Unterräumen. Dies wird auch als *Superpositionsprinzip* bezeichnet. Beispiele sind der Sattel und die Knoten aus Abschnitt 3.

Bemerkung Unter den Voraussetzungen des Satzes existiert auch eine Koordinatentransformation T, so dass

$$T^{-1}AT = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, .., \lambda_n).$$

Wegen $AT = TD$ bestehen die Spalten der Matrixdarstellung von T aus den Eigenvektoren von A. Die allgemeine Lösung von $\dot{x} = Ax$ ist damit

$$\varphi(t) = T\mathrm{e}^{Dt}c, \qquad c = (c_1, .., c_n)^\top \in \mathbb{R}^n.$$

Dies ist nur eine andere Schreibweise für (**??**). ⊸

Satz aus der linearen Algebra *Sind alle Eigenwerte*

$$\lambda_1, .., \lambda_r,\ \alpha_{r+1} \pm \mathrm{i}\omega_{r+1}, .., \alpha_m \pm \mathrm{i}\omega_m$$

von A einfach mit Eigenvektoren v_k respektive $w_k = v_k + \mathrm{i}u_k$, so bilden die Vektoren

$$v_1, .., v_r,\ u_{r+1}, v_{r+1}, .., u_m, v_m$$

eine reelle Basis des Vektorraums V. In dieser erhält der Operator die Blockdiagonalgestalt

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, .., \lambda_r, \Lambda_{r+1}, .., \Lambda_m)$$

mit

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & -\omega_k \\ \omega_k & \alpha_k \end{pmatrix}, \qquad r < k \leqslant m.$$

Dasselbe gilt, wenn A normal bezüglich eines Skalarproduktes ist. ⋊

Bilden wir zu den reellen Eigenvektoren die Exponenziallösungen und zu den komplexen die Lösungen des Lemmas 11, so gelangen wir wieder zu einem Fundamentalsystem für $\dot{x} = Ax$. Das Ergebnis ist folgender

14 **Satz** *Ist A im Komplexen diagonalisierbar mit Eigenwerten*

$$\lambda_1, .., \lambda_r,\ \alpha_{r+1} \pm \mathrm{i}\omega_{r+1}, .., \alpha_m \pm \mathrm{i}\omega_m$$

und Eigenvektoren v_k respektive $w_k = v_k \pm \mathrm{i}u_k$, so ist die allgemeine Lösung von $\dot{x} = Ax$ eine Linearkombination der Lösungen

$$v_k \mathrm{e}^{\lambda_k t} v_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant r,$$

sowie

$$v_k\,\mathrm{e}^{\alpha_k t}\cos\omega_k t - u_k\,\mathrm{e}^{\alpha_k t}\sin\omega_k t,$$
$$v_k\,\mathrm{e}^{\alpha_k t}\sin\omega_k t + u_k\,\mathrm{e}^{\alpha_k t}\cos\omega_k t,$$

für $r + 1 \leqslant k \leqslant m$. ⋊

16.26

Die allgemeine Lösung ist damit die ungestörte Überlagerung der Exponenziallösungen zu den reellen Eigenwerten, und der Strudel- oder Zentrumslösungen zu Paaren komplexer Eigenwerte. Damit lassen sich qualitativ die Lösungen fast aller drei- und vierdimensionalen linearen Differenzialgleichungen beschreiben.

▪ Kleine Schwingungen

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Ein symmetrischer Operator $Q \in L(V)$ definiert eine *quadratische Form* U auf V durch

$$U(x) = \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle .$$

Betrachten wir U als Potential eines Kraftfeldes, so beschreiben die newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x} = -\operatorname{grad} U = -Qx$$

die Bewegung eines Masseteilchen im Raum V unter dem Einfluss dieses Potentials. Anschaulich handelt es sich um die reibungsfreie Bewegung einer Massekugel auf der durch den Graphen von U definierten Fläche.

Als symmetrischer Operator besitzt Q nur reelle Eigenwerte. Wir nehmen außerdem an, dass Q regulär ist und damit keinen Eigenwert 0 besitzt – man nennt diesen Fall *nichtentartet*. Wir notieren die Eigenwerte als

$$-\alpha_1^2 \leqslant .. \leqslant -\alpha_r^2 < 0 < \omega_{r+1}^2 \leqslant .. \leqslant \omega_n^2$$

mit einem gewissen $0 \leqslant r \leqslant n$. Im Fall $r = 0$ ist U positiv definit, im Fall $r = n$ negativ definit.

Satz *Sei $Q \in L(V)$ symmetrisch und nichtentartet mit obigen Eigenwerten. Dann existiert eine orthonormale Basis $v_1, .., v_n$ aus Eigenvektoren von Q, so dass die allgemeine Lösung von $\ddot{x} = -Qx$ gegeben ist durch*

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{r} (a_k \mathrm{e}^{\alpha_k t} + b_k \mathrm{e}^{-\alpha_k t})\, v_k + \sum_{k=r+1}^{n} a_k \cos(\omega_k t + b_k)\, v_k$$

mit reellen Koeffizienten a_k, b_k, $1 \leqslant k \leqslant n$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Aufgrund der Symmetrie von Q besitzt V eine Basis aus reellen orthonormalen Eigenvektoren $v_1, .., v_n$ mit Eigenwerten $\lambda_1 \leqslant .. \leqslant \lambda_n$. In dieser Basis erhält die quadratische Form die Gestalt

$$U(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2.$$

Wir erhalten n *ungekoppelte* lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung

$$\ddot{x}_k = -\lambda_k x_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Die allgemeine Lösung von $\ddot{x} = -\lambda x$ ist nun

$$x(t) = \begin{cases} a\mathrm{e}^{\alpha t} + b\mathrm{e}^{-\alpha t} & \text{für} \quad \lambda = -\alpha^2 < 0, \\ a\cos(\omega t + b) & \text{für} \quad \lambda = \omega^2 > 0, \end{cases}$$

mit reellen Koeffizienten a, b, wie man sofort verifiziert [1]. Kombiniert mit den Basisvektoren erhält φ dann die angegebene Gestalt. ⟫⟫

Korollar *Ist Q symmetrisch und positiv definit mit Eigenwerten $\omega_1^2, .., \omega_n^2$, so ist die allgemeine Lösung von $\ddot{x} = -Qx$ die ungestörte Überlagerung von n Schwingungen in n paarweise orthogonalen Richtungen mit den Frequenzen $\omega_1, .., \omega_n$.* ⋊

Man nennt die einzelnen Schwingungen auch die *Haupt-* oder *Eigenschwingungen* des Systems, und die ω_k ihre *Eigenfrequenzen*.

Bemerkung Der Bezeichnung ›kleine Schwingungen‹ stammt aus der klassischen Mechanik. Betrachte dazu die newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x} = -\operatorname{grad} U(x)$$

für ein beliebiges Potential U. Einem kritischen Punkt von U entspricht ein Gleichgewichtspunkt dieser Differenzialgleichung. Legen wir diesen Punkt in den Ursprung und ignorieren eine irrelevante additive Konstante, so ist

$$U(x) = \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + \hat{U}(x)$$

mit der Hessischen Q von U und Termen höherer Ordnung $\hat{U}$.

In einer hinreichend kleinen Umgebung von 0 können wir $\hat{U}$ als kleine Störung des quadratischen Terms auffassen und in erster Näherung vernachlässigen. Ist Q positiv definit, so beschreibt dieses System also in erster Näherung *kleine Schwingungen* um den Gleichgewichtspunkt. Diese betrachten wir noch genauer in Abschnitt 7.

Den Term $\hat{U}$ bewirkt nun eine schwache, nichtlineare Kopplung dieser Schwingungen. Die Störungstheorie solcher Systeme ist allerdings sehr kompliziert, da eine solche Kopplung zu Resonanzen und dem Effekt sogenannter ›Kleiner Nenner‹ führt. ⊸

[1] Für $\lambda = 0$ ist $x(t) = at + b$, doch diesen Fall hatten wir ja ausgeschlossen.

16.28

16.6 Allgemeine Gleichungen

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall eines nicht diagonalisierbaren Operators A. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass A im Komplexen in eine Blockdiagonalgestalt $\operatorname{diag}(J_1, .., J_m)$ gebracht werden kann, die auf der Diagonalen aus elementaren Jordanblöcken besteht. Die Gestalt dieser *jordanschen Normalform* ist dabei bis auf die Anordnung der einzelnen Jordanblöcke eindeutig. Für unsere Zwecke ist diese Normalform allerdings zu detailliert. Es reicht die Existenz einer Zerlegung eines beliebigen Operators in einen halbeinfachen und einen nilpotenten Anteil.

Satz über die SN-Zerlegung *Jeder Operator $A \in L(V)$ besitzt im Komplexen eine eindeutige Zerlegung in zwei Operatoren $A = S + N$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *S ist im Komplexen diagonalisierbar,*
(ii) *N ist nilpotent, und*
(iii) *S und N kommutieren: $SN = NS$.* $\rtimes$

Wir geben hier nur eine Skizze des Beweises. Ausgangspunkt ist der folgende Spektralzerlegungssatz. Dabei heißt eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ *invariant unter komplexer Konjugation*, wenn sie mit jedem Element auch dessen komplex Konjugiertes enthält.

15 **Reeller Spektralzerlegungssatz** *Sei $\sigma = \sigma_1 \cup .. \cup \sigma_m$ eine Zerlegung des Spektrums σ von $A \in L(V)$ in disjunkte, unter komplexer Konjugation invariante Teilmengen. Dann existiert eine unter A invariante Zerlegung $V = V_1 \oplus .. \oplus V_m$ des Vektorraumes V derart, dass*

$$\sigma(A \mid V_k) = \sigma_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Dabei ist die Dimension von V_k gleich der Summe der Vielfachheiten der in σ_k enthaltenen Eigenwerte. Bezüglich dieser Zerlegung besitzt A die Blockdiagonalgestalt

$$A = \operatorname{diag}(A_1, .., A_m) \tag{3}$$

mit $A_k \coloneqq A \mid V_k$ für $1 \leqslant k \leqslant m$. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ *Beweisskizze zur SN-Zerlegung* Der Einfachheit halber seien alle Eigenwerte von A reell. Andernfalls betrachtet man zuerst A auf der Komplexifizierung von V und leitet aus der entsprechenden komplexen SN-Zerlegung die behauptete reelle Zerlegung ab. Die Details findet man zum Beispiel in Hirsch-Smale, Kapitel 6.

Seien $\lambda_1, .., \lambda_r$ die *verschiedenen* reellen Eigenwerte von A. Dann 15 existiert eine Zerlegung $V = V_1 \oplus .. \oplus V_r$ derart, dass

$$\sigma(A_k) = \{\lambda_k\}, \qquad A_k \coloneqq A \,|\, V_k, \qquad k = 1, .., r.$$

Wir setzen dann

$$S_k \coloneqq \lambda_k I, \qquad N_k \coloneqq A_k - S_k.$$

Dann ist S_k halbeinfach und $A_k = S_k + N_k$. Ferner ist N_k nilpotent, da

$$\sigma(N_k) = \sigma(A_k - \lambda_k I) = \{0\}.$$

Mit $S = S_1 \oplus .. \oplus S_m$ und $N = N_1 \oplus .. \oplus N_m$ erhalten wir dann eine SN-Zerlegung von A mit den gewünschten Eigenschaften.

Bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Da S und N mit $A = S + N$ kommutieren, sind die Unterräume V_k auch unter S und N invariant. Also gilt

$$S_k \coloneqq S \,|\, V_k : \; V_k \to V_k, \qquad N_k \coloneqq N \,|\, V_k : \; V_k \to V_k,$$

sowie $A_k = S_k + N_k$. Wir behaupten, dass S_k auf V_k identisch ist mit $S_k' \coloneqq \lambda_k I$. Setzen wir dazu $N_k' = A_k - S_k'$, so ist $S_k' + N_k' = A_k = S_k + N_k$ und damit

$$S_k - S_k' = N_k' - N_k.$$

Hierbei ist $S_k - S_k'$ halbeinfach, da jede Ähnlichkeitstransformation $S_k' = \lambda_k I$ unverändert lässt. Ferner ist N_k' nilpotent, da das Spektrum von N_k' nur die 0 enthält. Schließlich kommutieren N_k und N_k', da N_k mit A_k und der Identität kommutiert. Aus der binomischen Formel für $(N_k' - N_k)^m$ mit m hinreichend groß folgt, dass dann auch $N_k' - N_k$ nilpotent ist.

Also ist $S_k - S_k'$ halbeinfach und nilpotent. Diese Eigenschaft hat aber nur der Nulloperator. Es ist also $S_k = S_k'$, und weiter $N_k' = N_k$. Da dies für jedes k gilt, ist die Eindeutigkeit der SN-Zerlegung gezeigt. ⟫⟫⟫

Bemerkung Die jordansche Normalform geht über die SN-Zerlegung hinaus, indem sie noch eine Aussage über die Normalform nilpotenter Operatoren macht. ⊸

Lemma *Ist $A = S + N$ eine SN-Zerlegung von A mit $N^{m+1} = 0$, so gilt*

$$\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^S \left(1 + N + .. + \frac{1}{m!} N^m\right). \qquad ⋊$$

⟪⟪⟪ Da S und N kommutieren, gilt $\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{S+N} = \mathrm{e}^S \mathrm{e}^N$. Wegen $N^{m+1} = 0$ bricht die Exponenzialreihe von e^N spätestens nach dem m-ten Term ab. ⟫⟫⟫

Um die Gestalt der allgemeinen Lösung von $\dot{x} = Ax$ zu bestimmen, genügt es nun, jede Komponente $A_k = S_k + N_k$ der Zerlegung (3) einzeln zu betrachten.

Bezeichnet ν_k die Vielfachheit des k-ten Eigenwerts, so ist $N_k^{\nu_k} = 0$. Im reellen Fall folgt dies aus $\dim V_k = \nu_k$, im komplexen Fall aus der Tatsache, dass V_k aus der Reellifizierung zweier komplexer Unterräume der Dimension ν_k entsteht. Aufgrund des letzten Lemmas treten daher in $\mathrm{e}^{A_k t}$ nur Polynome vom Grad kleiner ν_k auf.

Wir formulieren den reellen und komplexen Fall wieder getrennt. Ein *Quasipolynom* ist ein Produkt aus einer Exponenzialfunktion und einem Polynom.

Reeller Fall *Der Operator $A \in L(V)$ habe nur reelle Eigenwerte $\lambda_1, .., \lambda_m$ mit Vielfachheiten $\nu_1, .., \nu_m$. Dann ist in einer beliebigen Basis jede Komponente einer Lösung von $\dot{x} = Ax$ eine Linearkombination aus Quasipolynomen*

$$p_k(t)\mathrm{e}^{\lambda_k t}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

wobei $\operatorname{grad} p_k < \nu_k$ *für alle* k. ⋊

Bemerkungen *a.* Sind alle Eigenwerte einfach, so ist $\nu_k = 1$ für alle k. Somit ist $k = n$, alle Polynome p_k sind konstant, und wir erhalten wieder den Satz für einfache reelle Eigenwerte 13.

b. Der maximale Grad von p_k kann kleiner als $\nu_k - 1$ sein. Dies hängt von der Jordanschen Normalform von A ab. Beispielsweise sind alle p_k konstant genau dann, wenn A halbeinfach ist. ⊸

16 **Allgemeiner Fall** *Der Operator $A \in L(V)$ habe die Eigenwerte*

$$\lambda_1, .., \lambda_r,\ \alpha_{r+1} \pm \mathrm{i}\omega_{r+1}, .., \alpha_m \pm \mathrm{i}\omega_m$$

mit Vielfachheiten $\nu_1, .., \nu_m$. Dann ist in einer beliebigen Basis jede Komponente einer Lösung von $\dot{x} = Ax$ eine Linearkombination aus den Quasipolynomen

$$p_k(t)\mathrm{e}^{\lambda_k t}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant r,$$

und den Funktionen

$$p_k(t)\mathrm{e}^{\alpha_k t}\cos\omega_k t, \quad q_k(t)\mathrm{e}^{\alpha_k t}\sin\omega_k t, \qquad r < k \leqslant m,$$

wobei $\operatorname{grad} p_k, \operatorname{grad} q_k < \nu_k$ *für alle* k. ⋊

Man beachte, dass im Unterschied zu den Ergebnissen für halbeinfache Operatoren *nicht jede* Linearkombination aus den genannten Funktionen eine Lösung darstellt.

▪ Schlussfolgerungen

17 **Satz** *Das Spektrum von A liegt in der linken komplexen Halbebene genau dann, wenn*

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$$

für jede Lösung φ von $\dot{x} = Ax$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ ⇒ Für ein Produkt r aus einem Polynom und einer trigonometrischen Funktion und $\alpha < 0$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\alpha t} r(t) = 0.$$

Da jede Komponente einer Lösung φ von $\dot{x} = Ax$ aufgrund des letzten Satzes aus einer Linearkombination solcher Funktionen besteht, gilt daher auch $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$.

⇐ Dies zeigen wir indirekt. Existiert wenigstens ein reeller oder komplexer Eigenwert $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\omega$ mit $\alpha \geqslant 0$, so existiert dazu auch wenigstens ein reeller oder komplexer Eigenvektor v und damit eine reelle oder komplexe Lösung $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v$ dieser Differenzialgleichung. Ihr Real- oder Imaginärteil liefert eine reelle Lösung φ, die für $t \to \infty$ *nicht* gegen Null konvergiert. ⟩⟩⟩⟩⟩

Satz *Das Spektrum von A liegt in der rechten komplexen Halbebene genau dann, wenn*

$$\lim_{t\to\infty} |\varphi(t)| = \infty$$

für jede Lösung φ von $\dot{x} = Ax$ außer der Gleichgewichtslösung. Es liegt auf der imaginären Achse genau dann, wenn

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \log|\varphi(t)| = 0$$

für jede Lösung φ von $\dot{x} = Ax$ außer der Gleichgewichtslösung. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Dies sei als Übung überlassen. ⟩⟩⟩⟩⟩