3

Natürliche, ganze und rationale Zahlen

Die Existenz der reellen Zahlen setzen wir von nun an voraus. Jetzt geht es darum, unter diesen die natürlichen, die ganzen, und die rationalen Zahlen zu identifizieren.

Die natürlichen Zahlen sind uns von frühester Kindheit durch das Zählen von Objekten vertraut:

$$
\begin{aligned}
1 &\coloneqq 1, \\
2 &\coloneqq 1 + 1, \\
3 &\coloneqq 2 + 1 = 1 + 1 + 1,
\end{aligned}
$$

und so weiter . . . : von einer natürlichen Zahl gelangen wir zur nächsten, indem wir 1 addieren, *ad infinitum*. Auch wissen wir, dass

$$1 < 2 < 3 < .. \ ,$$

in Übereinstimmung mit den Anordnungsaxiomen. Dies gilt übrigens in *jedem* angeordneten Körper, denn wir brauchen ja nur die Information, dass $0 < 1$. Daraus ergibt sich, dass jeder angeordnete Körper seine eigene ›Version‹ der natürlichen Zahlen enthält.

Die additiv Inversen zu den natürlichen Zahlen zuzüglich der Null ergeben den Ring der ganzen Zahlen. Die Brüche aus allen ganzen Zahlen ergeben dann den Körper der rationalen Zahlen.

3.1 Natürliche Zahlen

Um das ›und so weiter‹ der Konstruktion der natürlichen Zahlen mathematisch zu präzisieren, führen wir folgenden Begriff ein.

Definition *Eine Teilmenge J von $\mathbb{R}$ heißt induktiv, wenn gilt:*
(IN-1) $1 \in J$.
(IN-2) *Ist $m \in J$, so ist auch $m + 1 \in J$.* ⋊

Man kann auch $0 \in J$ statt $1 \in J$ fordern und damit die natürlichen Zahlen bei 0 beginnen lassen. Dies ist allein eine Frage der Konvention und mathematisch unerheblich.

Beispiele a. Die Mengen $\mathbb{R}$ ist induktiv.
b. Das Intervall $[1, \infty)$ ist induktiv.
c. Die Menge $\mathbb{M}$ der rationalen Funktionen $_{2.2}$ ist induktiv.
d. Die Menge $\mathbb{P}$ aller Primzahlen ist nicht induktiv.

Der Durchschnitt zweier und sogar beliebig vieler induktiver Mengen ist wieder eine induktive Menge, denn in *jeder* dieser Mengen sind die Bedingungen (IN-1) und (IN-2) erfüllt. Die kleinste solche Menge erhält man, indem man die Schnittmenge *aller* induktiven Teilmengen der reellen Zahlen bildet. Dies charakterisiert die natürlichen Zahlen als Teilmenge der reellen Zahlen.

Definition *Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist der Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$.* ⋊

Bezeichnet $\mathcal{J}$ die Familie aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$, so schreibt man hierfür auch

$$\mathbb{N} := \bigcap_{J \in \mathcal{J}} J.$$

Die Menge $\mathbb{N}$ enthält also genau diejenigen Elemente von $\mathbb{R}$, die in *jeder* induktiven Teilmenge von $\mathbb{R}$ enthalten sind.

1 **Induktionssatz** *Ist I eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$, so ist $I = \mathbb{N}$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Nach Voraussetzung ist $I \subset \mathbb{N}$. Andererseits ist $I \in \mathcal{J}$ und damit auch $\mathbb{N} \subset I$. Also gilt $I = \mathbb{N}$. ⟩⟩⟩⟩

▪ Vollständige Induktion

Der Induktionssatz bildet die Grundlage der vollständigen Induktion, die ebenfalls zu den fundamentalen Beweistechniken der Mathematik zählt. Die einfachste und am häufigsten gebrauchte Form ist das folgende

2 **Induktionsprinzip** *Sei $A(n)$ eine Aussageform, für die gilt:*
(1) *$A(1)$ ist wahr.*
(2) *Ist $A(n)$ wahr für irgendein $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $A(n+1)$ wahr.*
Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ *Beweis* Sei

$$N \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\}.$$

Dann ist $1 \in N$ wegen (1), und gilt $n \in N$, so gilt auch $n+1 \in N$ wegen (2). Also ist N eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$. Aufgrund des Induktionssatzes $_1$ ist somit $N = \mathbb{N}$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Um eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n mithilfe der vollständigen Induktion zu beweisen, ist also Folgendes zu tun.
(1) *Induktionsanfang:* Zeige, dass $A(1)$ wahr ist.
(2) *Induktionsschritt:* Nehme an, dass $A(n)$ für ein beliebiges $n \geqslant 1$ wahr ist. Folgere daraus, dass auch $A(n+1)$ wahr ist.
Dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Das Induktionsprinzip bereitet erfahrungsgemäß anfangs Schwierigkeiten, hat es doch den Anschein, als würde man sich nach dem Münchhausenprinzip am eigenen Schopf aus dem Sumpf ziehen. Denn im Induktionsschritt nimmt man ja an, dass $A(n)$ wahr ist – also genau das, was man eigentlich erst noch beweisen will … .

Dem ist jedoch nicht so. Der Induktionsschritt geht nur von der *Hypothese* aus, dass $A(n)$ wahr ist, und leitet daraus ab, dass auch $A(n+1)$ wahr ist. Das ist etwas völlig anderes als die *Behauptung*, dass $A(n)$ wahr ist. Diese Argumentation wird auch erst durch den Induktionsanfang vollständig. Er ist zwar oft trivial, aber trotzdem unentbehrlich. Ohne ihn wäre *nichts* bewiesen.

Eine gerne gebrauchte Metapher für die vollständige Induktion ist das Erklimmen einer Leiter. Weiß man, wie man die *erste* Sprosse einer Leiter erklimmt, und weiß man weiter, wie man von einer *beliebigen* Sprosse zur *nächsten* gelangt, so kann man jede noch so hohe Leiter erklimmen … zumindest ein Mathematiker kann das.

Die vollständige Induktion versteht man am Besten anhand von Beispielen. Daher zunächst zwei einfache Beispiele.

3 **Satz** *Für alle $n \geqslant 1$ gilt*

$$1 + 2 + .. + n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ *Induktionsanfang:* Für $n = 1$ reduziert sich die Behauptung auf

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2},$$

ist also richtig. — *Induktionsschluss:* Für ein beliebiges $n \geqslant 1$ setzen wir jetzt voraus, dass die behauptete Gleichung gilt. Dann erhalten wir für die ›nächste Sprosse der Leiter‹

$$\begin{aligned} 1 + 2 + .. + n + (n+1) &= (1 + 2 + .. + n) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Also gilt die behauptete Gleichung auch für $n + 1$, und wir sind fertig. ⟩⟩⟩⟩⟩

4 **Bernoullische Ungleichung** *Für alle reellen Zahlen $x \geqslant -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ *Induktionsanfang:* Für $n = 1$ ist

$$(1 + x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x.$$

Dies gilt sogar für *alle* reellen x, und auch für $n = 0$. — *Induktionsschluss:* Für ein beliebiges $n \geqslant 1$ machen wir die *Induktionsannahme*, dass

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx, \qquad x \geqslant -1.$$

Betrachte dann

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n.$$

Nun ist $1 + x \geqslant 0$ für $x \geqslant -1$ – hier brauchen wir erst diese Annahme – und deshalb weiter mit der Induktionsannahme

$$(1 + x)(1 + x)^n \geqslant (1 + x)(1 + nx) = 1 + x + nx + nx^2.$$

Nun ist aber $nx^2 \geqslant 0$. Daher folgt insgesamt

$$(1 + x)^{n+1} \geqslant 1 + x + nx = 1 + (n+1)x.$$

Damit ist die Induktion vollständig. ⟩⟩⟩⟩⟩

Es folgen einige elementare Tatsachen über die natürlichen Zahlen, die wir natürlich beweisen müssen.

5 **Rechenregeln** *Für alle* $n, m \in \mathbb{N}$ *gilt:*

(i) $n \geqslant 1$,

(ii) $n + m \in \mathbb{N}, \quad nm \in \mathbb{N}$,

(iii) $n = 1 \lor n - 1 \in \mathbb{N}$,

(iv) $m < n \;\Rightarrow\; n - m \in \mathbb{N}$,

(v) $m < n \leqslant m + 1 \;\Rightarrow\; n = m + 1$. ⋊

⋘ (i) Die Menge $\{n \in \mathbb{N} : n \geqslant 1\}$ ist eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$. Aufgrund des Induktionssatzes [1] ist sie gleich $\mathbb{N}$.

(ii) Fixiere $m \in \mathbb{N}$ und betrachte die Aussage

$$A(n): \; n + m \in \mathbb{N}.$$

Ia: Es gilt $A(1)$, da mit $m \in \mathbb{N}$ auch $m + 1 \in \mathbb{N}$. — Is: Gilt $A(n)$, so ist also $n + m \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $(n + m) + 1 = (n + 1) + m \in \mathbb{N}$ und damit $A(n + 1)$ wahr. Somit gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $m \in \mathbb{N}$ beliebig war, ist die Aussage für alle $n, m \in \mathbb{N}$ bewiesen. — Die zweite Behauptung wird analog bewiesen.

(iii) Betrachte

$$A(n): \; n = 1 \lor n - 1 \in \mathbb{N}.$$

Ia: $A(1)$ ist offensichtlich wahr. — Is: Ist $A(n)$ wahr, so ist $n \in \mathbb{N}$. Damit ist aber auch $A(n + 1)$ wahr.

(iv) Betrachte hierzu die Aussage

$$A(n): \; n - m \in \mathbb{N} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m < n.$$

Ia: $A(1)$ ist wahr, denn wegen (i) gibt es kein $m \in \mathbb{N}$, für das wir die Behauptung prüfen müssen. — Is: Es gelte $A(n)$. Zu zeigen ist

$$A(n + 1): \; (n + 1) - m \in \mathbb{N} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m < n + 1.$$

Für $m = 1$ ist dies richtig. Ist dagegen $1 < m < n + 1$, so ist $m - 1 < n$ eine natürliche Zahl wegen (iii), und nach Induktionsannahme ist dann auch $n - (m - 1) \in \mathbb{N}$. Das ist aber äquivalent mit $(n + 1) - m \in \mathbb{N}$.

(v) Sei $m < n \leqslant m + 1$. Dann ist $n - m \leqslant 1$. Aus (iv) folgt aber $n - m \in \mathbb{N}$ und damit $n - m \geqslant 1$ wegen (i). Also ist $n - m = 1$, oder $n = m + 1$ wie behauptet. ⋙

Die letzte Aussage bedeutet, dass es zwischen m und $m + 1$ keine weitere natürliche Zahl gibt. Gilt also beispielsweise $n < A$ für eine Menge $A \subset \mathbb{N}$, so gilt auch $n + 1 \leqslant A$ [A-5].

In manchen Fällen ist es erforderlich, die Induktion nicht bei 1, sondern später zu beginnen. Der Beweis des folgenden Satzes ist als Übung überlassen $_{\text{A-2}}$.

6 **Modifiziertes Induktionsprinzip** *Sei $A(n)$ eine Aussageform, für die gilt:*
(i) *$A(n_0)$ ist wahr für ein $n_0 \in \mathbb{N}$.*
(ii) *Ist $A(n)$ wahr für irgendein $n \geqslant n_0$, so ist auch $A(n+1)$ wahr.*
Dann ist $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant n_0$ wahr. ⋊

▹ *Beispiel* Es gilt

$$2^n \geqslant n^2, \qquad n \neq 3.$$

Für $n = 1$ und $n = 2$ verifiziert man dies direkt, und für $n = 3$ ist die Aussage offensichtlich falsch. Für $n \geqslant 4$ führt man einen Induktionsbeweis. ◃

▪ Satz vom Minimum

Die natürlichen Zahlen sind in $\mathbb{R}$ nach unten beschränkt. Jede nichtleere Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ besitzt deshalb ein Infimum *innerhalb der reellen Zahlen*. Im Fall natürlicher Zahlen ist dieses Infimum sogar ein *Element von A selbst*. Man spricht von einem *minimalen Element*, an dem das Infimum *angenommen wird*.

7 **Satz vom Minimum** *Jede nichtleere Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ besitzt ein minimales Element. Das heißt, es existiert ein $m \in A$ mit $m \leqslant A$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wegen $1 \leqslant \mathbb{N}$ ist A nach unten beschränkt. Da A nicht leer ist, existiert somit die *reelle Zahl* $m = \inf A$. Zu zeigen ist, dass $m \in A$.

Da $m + 1$ keine untere Schranke von A ist, existiert aufgrund des Approximationssatzes $_{2.12}$ ein $n \in A$ mit

$$m \leqslant n < m + 1.$$

Wäre $m < n$, so folgt mit demselben Satz die Existenz eines weiteren $o \in A$ mit

$$m \leqslant o < n < m + 1.$$

Wegen $o < n$ und $n, o \in A \subset \mathbb{N}$ wäre dann $n - o$ eine natürliche Zahl $_5$ mit

$$n - o < m + 1 - o \leqslant m + 1 - m = 1,$$

was unmöglich ist. Also muss $m = n$ gelten, und dies ist das gesuchte minimale Element in A. ⟩⟩⟩⟩⟩

8 **Korollar** *Es gibt keine uninteressanten natürlichen Zahlen.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Angenommen, die Menge $U = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist uninteressant}\}$ ist nicht leer. Dann besitzt U ein minimales Element m, die kleinste uninteressante natürliche Zahl. Das ist natürlich eine interessante Zahl – Widerspruch. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Das Archimedische Prinzip

Bis hierher haben wir das Vollständigskeitsaxiom nicht benötigt. Alles in diesem Abschnitt Gesagte gilt somit in *jedem angeordneten Körper*. Somit gibt es in *jedem* angeordneten Körper $\mathbb{K}$ eine Teilmenge $\mathbb{N}$, die als kleinste induktive Teilmenge definiert ist und die wir uns als eine Version der natürlichen Zahlen in $\mathbb{K}$ vorstellen können. Ebenso gilt dort der Satz vom Minimum.

Da die Folge $1 < 2 < 3 < \cdots$ ›immer weiter wächst‹, scheint die Menge $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ unbeschränkt zu sein. Doch auch diese scheinbar offensichtliche Tatsache erfordert einen Beweis. Und wie sich herausstellt, erfordert dieser die Existenz eines Supremums, also das Vollständigkeitsaxiom.

9 **Prinzip des Archimedes** *Die Menge der natürlichen Zahlen ist in den reellen Zahlen nach oben unbeschränkt.* ⋊

⟪⟪⟪ Wäre $\mathbb{N}$ beschränkt, so existierte $b = \sup \mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ [2.10]. Zu $b - 1 < b$ existiert dann aufgrund des Approximationssatzes [2.12] ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$b - 1 < n \leqslant b.$$

Aber dann ist $b < n + 1$, und wegen $n + 1 \in \mathbb{N}$ ist b doch keine obere Schranke von $\mathbb{N}$ – ein Widerspruch. ⟫⟫⟫

Aus dem Prinzip des Archimedes ergeben sich zwei wichtige Folgerungen.

10 **Korollar** *Zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Zu zwei positiven reellen Zahlen x und h existiert genau ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$(n-1)h \leqslant x < nh.$$ ⋊

⟪⟪⟪ Sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund des Prinzips des Archimedes gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1/\varepsilon$. Für dieses n gilt dann die erste Behauptung.

Aus demselben Grund ist die Menge $\{m \in \mathbb{N} : x/h < m\}$ nicht leer, besitzt also wegen des Satzes vom Minimum [7] ein minimales Element n. Für dieses gilt

$$n - 1 \leqslant \frac{x}{h} < n.$$

Multiplikation mit $h > 0$ ergibt die Behauptung. Die Eindeutigkeit von n folgt aus der Eindeutigkeit des Minimums. ⟫⟫⟫

11 **Satz vom Maximum** *Jede nichtleere, beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ besitzt ein maximales Element. Das heißt, es existiert ein $m \in A$ mit $A \leqslant m$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Aufgrund der Beschränktheit von A und des Archimedischen Prinzips 9 besitzt A eine obere Schranke b in $\mathbb{N}$. Es ist also $A < b$. Dann ist die Menge

$$b - A \coloneqq \{b - a : a \in A\}$$

ebenfalls eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ 5 und besitzt daher ein minimales Element 7. Dieses hat notwendigerweise die Form $b - m$ mit $m \in A$. Es gilt dann

$$b - m \leqslant b - A,$$

was äquivalent ist mit $A \leqslant m$. Somit ist $m \in A$ das maximale Element von A. ⟩⟩⟩⟩⟩

Der Beweis des archimedischen Prinzips stützt sich auf die Existenz eines Supremums 2.10, also auf die Vollständigkeit der reellen Zahlen. Man könnte meinen, dass dies nur der Bequemlichkeit geschuldet ist, denn Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ und Unbeschränktheit von $\mathbb{N}$ haben auf den ersten Blick wenig miteinander zu tun. Dem ist aber nicht so. Es gibt angeordnete Körper, in denen das archimedische Prinzip nicht gilt, wie das folgende Beispiel zeigt.

▹ *Beispiel* Im Körper $\mathbb{M}$ der rationalen Funktionen mit rationalen Koeffizienten 2.2 spielen die konstanten Funktionen $n/1$ die Rolle der natürlichen Zahlen, und es gilt

$$\frac{n}{1} < \frac{x}{1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Somit ist $\mathbb{N}$ in $\mathbb{M}$ *beschränkt.* ◃

Das archimedische Prinzip ist somit unabhängig von den Anordnungsaxiomen und nicht aus diesen ableitbar. Andererseits gibt es angeordnete Körper, in denen das archimedische Prinzip, nicht aber das Vollständigkeitsaxiom gilt – zum Beispiel $\mathbb{Q}$. Daher ist folgende Definition sinnvoll.

Definition *Ein angeordneter Körper heißt archimedisch angeordnet, wenn $\mathbb{N}$ in ihm unbeschränkt ist.* ⋊

▹ *Beispiel* $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind archimedisch angeordnete Körper, $\mathbb{M}$ nicht. ◃

▪ Rekursion

Auf dem Prinzip der vollständigen Induktion beruht auch das Prinzip der *rekursiven Definition.* Zunächst einige Beispiele.

Die *Fakultät* $n!$ einer natürlichen Zahl n ist rekursiv definiert durch

$$1! \coloneqq 1, \qquad n! \coloneqq n \cdot (n-1)!, \qquad n \geqslant 2.$$

3.8

Der Wert von $n!$ wird also für $n > 1$ durch den Wert von $(n-1)!$ erklärt. Nach endlich vielen Schritte ist $n!$ auf $1!$ zurückgeführt:

$$\begin{aligned} 2! &= 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1, \\ 3! &= 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1, \\ &\vdots \\ n! &= n \cdot (n-1) \cdot .. \cdot 2 \cdot 1. \end{aligned}$$

Außerdem definiert man $0! \coloneqq 1$. Die Rekursionsformel gilt damit sogar ab $n = 0$:

$$0! \coloneqq 1, \qquad n! \coloneqq n \cdot (n-1)!, \qquad n \geqslant 1.$$

Die *Potenzen* a^n eines Elementes a eines beliebigen Körpers $\mathbb{K}$ sind rekursiv definiert durch

$$a^0 \coloneqq 1, \qquad a^n \coloneqq a\, a^{n-1}, \quad n \geqslant 1.$$

Mit Induktion beweist man die üblichen *Potenzgesetze* A-11

$$a^n a^m = a^{n+m}, \qquad (a^n)^m = a^{nm}, \qquad n, m \geqslant 0.$$

Die *allgemeine Summe* von n Elementen $a_1, .., a_n$ in einem beliebigen Körper schreibt man als

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + .. + a_n.$$

Deren rekursive Definition ist

$$\sum_{k=1}^{0} a_k \coloneqq 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k \coloneqq \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) + a_n, \qquad n \geqslant 1.$$

Entsprechend erklärt man das *allgemeine Produkt*

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \cdot\cdot\, a_n.$$

Da in einem Körper Addition und Multiplikation assoziativ und kommutativ sind, sind Klammern entbehrlich und die Reihenfolge unerheblich. Dies spielt erst eine Rolle bei *Reihen*, also unendlichen Summen.

▹ *Beispiele* Es gilt

$$na = \sum_{k=1}^{n} a, \qquad a^n = \prod_{k=1}^{n} a, \qquad n! = \prod_{k=1}^{n} k. \quad ◃$$

Als Summationsindex kann man übrigens jedes Symbol verwenden. Ebenso kann man umnummerieren. So ist beispielsweise

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \sum_{l=0}^{n-1} a_{l+1}.$$

Allgemeiner erklärt man

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := \sum_{m\leqslant k\leqslant n} a_k := \begin{cases} a_m + .. + a_n, & m \leqslant n, \\ 0, & m > n. \end{cases}$$

Entsprechendes gilt für Produkte.

12 **Rechenregeln für Summen** *In einem Körper gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k), \qquad a\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} ab_k$$

sowie

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{l=1}^{m} b_l = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} a_k b_l = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant l\leqslant m}} a_k b_l,$$

wobei sich die Doppelsumme über alle möglichen Kombinationen der Indizes k und l mit $1 \leqslant k \leqslant n$ und $1 \leqslant l \leqslant m$ erstreckt und damit nm Summanden umfasst. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir zeigen nur die letzte Behauptung mit Induktion über n. Für $n = 1$ reduziert sich die Aussage auf die korrekte Gleichung

$$a_1 \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 b_k.$$

Für $n + 1$ anstelle von n haben wir

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k \cdot \sum_{l=1}^{m} b_l = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}\right) \cdot \sum_{l=1}^{m} b_l = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{l=1}^{m} b_l + a_{n+1} \sum_{l=1}^{m} b_l.$$

Ist die Gleichung wahr für n und alle $m \geqslant 1$, so folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k \cdot \sum_{l=1}^{m} b_l = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant l\leqslant m}} a_k b_l + \sum_{\substack{k=n+1 \\ 1\leqslant l\leqslant m}} a_k b_l = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n+1 \\ 1\leqslant l\leqslant m}} a_k b_l.$$

Also gilt sie auch für $n + 1$ und alle $m \geqslant 1$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Entsprechend werden andere Sätze auf allgemeine Summen und Produkte verallgemeinert. Beispielsweise lautet die *allgemeine Dreiecksungleichung*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| .$$

Mit diesen Rechenregeln lassen sich viele Summen und Produkte ohne expliziten Rückgriff auf die vollständige Induktion bestimmen. Ein Beispiel ist die

13 **Geometrische Summe** *Für jedes reelle q und alle $n \geqslant 0$ gilt*

$$(1-q)(1+q+..+q^n) = 1-q^{n+1}.$$

Für $q \neq 1$ gilt also

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨ Für $n = 0$ ist die Gleichungg korrekt. Sei also $n \geqslant 1$. Dann ist

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = q^0 + \sum_{k=1}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1} - q^{n+1}.$$

Die beiden mittleren Terme annullieren sich, denn

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} q^k.$$

Somit erhalten wir

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1-q^{n+1}.$$

Das entspricht der Behauptung. ⟩⟩⟩⟩

▪ Allgemeine Rekursion

Das Rekursionsprinzip mag auf den ersten Blick einleuchten, so wie auch das Induktionsprinzip. Dennoch bedarf es eines Beweises, dass durch rekursive Definitionen tatsächlich *Folgen*[1] in eindeutiger Weise definiert werden. Dies leistet der folgende Satz, der durch Induktion bewiesen wird und beim ersten Lesen übergangen werden kann.

[1] Folgen werden im übernächsten Kapitel behandelt.

14 **Rekursionssatz** *Sei X eine beliebige Menge, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei*

$$\phi_n : X^n \to X$$

eine beliebige Abbildung. Dann existiert zu jedem $a \in X$ eine eindeutige Folge $(f_n)_{n \geqslant 1}$ in X mit

$$f_1 = a, \qquad f_{n+1} = \phi_n(f_1, .., f_n), \qquad n \geqslant 1. \qquad ⋊$$

Das bedeutet, dass mit dem *Startwert* $f_1 \coloneqq a$ sukzessive die Werte

$$\begin{aligned} f_2 &\coloneqq \phi_1(f_1), \\ f_3 &\coloneqq \phi_2(f_1, f_2), \\ &\ \vdots \\ f_{n+1} &\coloneqq \phi_n(f_1, .., f_n) \end{aligned}$$

eindeutig erklärt sind. Die Abbildung ϕ_n definiert den nächsten Wert f_{n+1} als Funktion der ersten n Werte $f_1, .., f_n$.

Unsere bisherigen Beispielen sind allerdings viel einfacher gebaut. Alle Funktionen ϕ_n sind identisch und haben nur ein Argument.

15 ⊳ *Beispiel* Die *Fibonacchifolge*

$$(f_n)_{n \geqslant 1} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..)$$

ist rekursiv erklärt durch

$$f_1 = f_2 = 1, \qquad f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

Die Rekursionsvorschriften sind

$$\begin{aligned} \phi_1(f_1) &= f_1, \\ \phi_n(f_1, .., f_n) &= f_{n-1} + f_n, \qquad n \geqslant 2, \end{aligned}$$

und die Fibonacchifolge resultiert aus den Startwert $f_1 = 1$. ◅

3.2 Ganze und rationale Zahlen

Definition und Satz

$$\mathbb{Z} \coloneqq \{m - n : n, m \in \mathbb{N}\}$$

heißt Menge der ganzen Zahlen. Für diese gilt

$$\mathbb{Z} = \{-n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N} = \{.., -2, -1, 0, 1, 2, ..\}. \qquad ⋊$$

⟪⟪⟪ Sei $G = \{..,-2,-1,0,1,2,..\}$. Dann gilt $G \subset \mathbb{Z}$, denn jedes Element von G kann als Differenz zweier natürlicher Zahlen geschrieben werden.

Um auch $\mathbb{Z} \subset G$ zu zeigen, sei $m - n \in \mathbb{Z}$. Ist $m = n$, so ist $m - n = 0 \in G$. Ist $m > n$, so ist $m - n \in \mathbb{N} \subset G$. Ist aber $m < n$, so ist mit demselben Argument $-(m-n) \in \mathbb{N}$ und damit $m - n$ ebenfalls Element von G. Da damit alle Möglichkeiten erfasst sind, gilt auch $\mathbb{Z} \subset G$. ⟫⟫⟫

16 **Satz** *In der Menge $\mathbb{Z}$ gelten alle Axiome eines angeordneten Körpers mit Ausnahme der Existenz eines multiplikativen Inversen. Insbesondere ist die Gleichung*

$$m + x = n$$

in $\mathbb{Z}$ immer eindeutig lösbar, und zwar mit $x = n - m$. ⋊

Man sagt, die ganzen Zahlen bilden einen *Ring mit Eins*. Der Beweis dieses Satzes ist Routine.

Die Sätze vom Minimum 7 und Maximum 11 gelten in $\mathbb{Z}$ entsprechend. Der einzige Unterschied ist, dass Teilmengen von $\mathbb{Z}$ *a priori* nicht nach unten beschränkt sind. Der folgende Satz wird auf die entsprechenden Sätze für natürliche Zahlen zurückgeführt A-14.

17 **Satz vom Minimum & Maximum** *In $\mathbb{Z}$ besitzt jede nach unten beschränkte Menge ein Minimum und jede nach oben beschränkte Menge ein Maximum.* ⋊

18 ▷ *Beispiel* Die Funktion

$$[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto [x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant x\}$$

weist jeder reellen Zahl x die größte ganze Zahl $m \leqslant x$ zu und wird als *Gaußklammer* bezeichnet. Andere Bezeichnungen sind *Abrundungs-* oder *Ganzzahl-Funktion*. Zum Beispiel ist

$$[\pi] = 3, \qquad [-\pi] = -4.$$

Der Graph dieser Funktion ist in Abbildung 1 dargestellt. ◁

Definition und Satz *Die Menge*

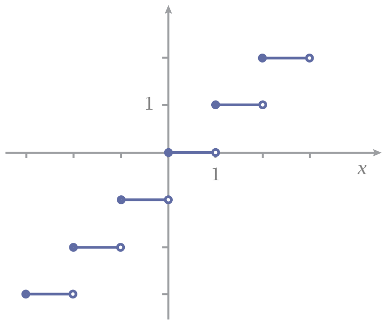
$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{n}{m} : n \in \mathbb{Z} \wedge m \in \mathbb{N} \right\}$$

heißt Menge der rationalen Zahlen. Mit der von $\mathbb{R}$ induzierten totalen Ordnung bildet $\mathbb{Q}$ einen archimedisch angeordneten Körper. In ihm ist auch die Gleichung

$$mx = n, \qquad m \neq 0,$$

Abb 1

Graph der Gaußklammer



immer eindeutig lösbar, und zwar mit $x = \dfrac{n}{m}$. ⋊

Auch der Beweis dieses Satzes ist Routine. Es ist im Wesentlichen nur zu zeigen, dass alle Operationen nicht aus $\mathbb{Q}$ herausführen.

Bemerkung Die totale Ordnung von $\mathbb{Q}$ lässt sich auf die natürliche Ordnung von $\mathbb{Z}$ zurückführen, in dem man

$$\frac{n}{m} < \frac{p}{q} \quad :\Leftrightarrow \quad nq < mp$$

definiert. Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Darstellung einer rationalen Zahl ab, solange man verlangt, dass die Nenner positiv sind. Für verschiedene Darstellungen derselben rationalen Zahl gilt ja

$$\frac{n}{m} = \frac{p}{q} \quad \Leftrightarrow \quad nq = mp. \qquad ⊸$$

Die rationalen Zahlen bilden eine echte Teilmenge der reellen Zahlen. Sie liegen aber *dicht* in $\mathbb{R}$.

19 **Satz** *Zu zwei beliebigen reellen Zahlen* $a < b$ *existiert immer eine rationale Zahl* r *mit* $a < r < b$. ⋊

⟪⟪⟪ Sei $a < b$. Dann ist $b - a > 0$, und es existiert $_{10}$ eine *natürliche* Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit

$$0 < \frac{1}{m} < b - a.$$

Dies ist äquivalent mit $1 < bm - am$ oder $am + 1 < bm$. Für die nach dem Satz vom Minimum $_{17}$ existierende *ganze* Zahl

$$n \coloneqq \min\{k \in \mathbb{Z} : k > am\}$$

gilt dann $am < n \leqslant am + 1 < bm$. Division durch $m > 0$ ergibt

$$a < \frac{n}{m} < b.$$

Die rationale Zahl $r = n/m$ hat also die gewünschte Eigenschaft. ⟫⟫⟫

3.3 Eindeutigkeit der reellen Zahlen

Nachdem $\mathbb{Q}$ als dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$ definiert ist, können wir noch kurz die Eindeutigkeit der reellen Zahlen ansprechen. Es ist durchaus möglich, ganz unterschiedliche *Modelle* der reellen Zahlen zu konstruieren – also total geordnete Mengen mit zwei Operationen, in denen sämtliche geforderten Axiome gelten. Diese verschiedenen Modelle sind jedoch alle von derselben *Gestalt* – man kann sie mitsamt ihren Strukturen eins-zu-eins aufeinander abbilden. Mathematisch gesprochen sind sie *isomorph*.

Im Fall der reellen Zahlen bedeutet dies Folgendes.

20 **Isomorphiesatz** *Sind* $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ *und* $(\mathbb{K}, \boxplus, \boxtimes, \sqsubset)$ *zwei vollständige angeordnete Körper, so existiert eine bijektive Abbildung* $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ *derart, dass*

$$\begin{aligned} \Phi(x+y) &= \Phi(x) \boxplus \Phi(y), \\ \Phi(x \cdot y) &= \Phi(x) \boxtimes \Phi(y) \end{aligned}$$

und

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x) \sqsubset \Phi(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt.* ⋊

Es spielt also zum Beispiel keine Rolle, ob ich zwei Operanden zuerst in $\mathbb{R}$ addiere und das Ergebnis mit Φ abbilde, oder ob ich zuerst die Operanden mit Φ abbilde und danach in $\mathbb{K}$ addiere.

⟪⟪⟪ *Beweisskizze* Für jede Abbildung Φ mit den geforderten Eigenschaften gilt beispielsweise

$$\Phi(x) = \Phi(x+0) = \Phi(x) \boxplus \Phi(0)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist notwendigerweise $\Phi(0) = \mathsf{0}$, das neutrale Element der Addition in $\mathbb{K}$. Analog ist $\Phi(1) = \mathsf{1}$ das neutrale Element der Multiplikation in $\mathbb{K}$. Daher *definieren* wir

$$\Phi(0) := \mathsf{0}, \qquad \Phi(1) := \mathsf{1}$$

Damit ist aber Φ auch schon für alle natürlichen Zahlen festgelegt, wie beispielsweise

$$\Phi(2) = \Phi(1+1) = \Phi(1) \boxplus \Phi(1) = 1 \boxplus 1 = 2.$$

Mithilfe der Körperoperationen ist damit Φ auch für die ganzen und rationalen Zahlen eindeutig festgelegt. Und mithilfe der Vollständigkeit dann auch für alle nicht-reellen, also irrationalen Zahlen $_{\text{A-2.21}}$. ⟫⟫⟫

3.4 Abzählbarkeit und Mächtigkeit

Gibt es mehr rationale Zahlen als natürliche Zahlen? Gibt es mehr reelle Zahlen als rationale Zahlen? Und gibt es Mengen, die ›noch größer‹ sind als die Menge der reellen Zahlen? Um diese Fragen zu beantworten, definieren wir zuerst, wann wir zwei Mengen als ›gleich groß‹ ansehen wollen.

Definition *Zwei nichtleere Mengen A und B heißen gleichmächtig, geschrieben $A \sim B$, wenn sie bijektiv aufeinander abgebildet werden können.* ⋊

Diese Definition entspricht der intuitiven Vorstellung. Können wir die Elemente zweier Mengen paarweise zuordnen, ohne dass am Ende ein Element übrig bleibt, so betrachten wir diese Mengen als gleich groß. Dazu müssen wir die Mengen nicht einmal abzählen oder auf andere Weise ihre Größe quantifizieren.

Offensichtlich definiert $\sim$ eine Äquivalenzrelation, deren Klassen aus gleichmächtigen Mengen bestehen.

▹ A. Die Mengen $\{\mathrm{H}, \mathrm{i}, \mathrm{l}, \mathrm{f}, \mathrm{e}\}$ und $\{\ominus, \oplus, \oslash, \odot, \otimes\}$ sind gleichmächtig.

B. Die Mengen $\mathbb{N}$ und $2\mathbb{N} = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ sind gleichmächtig, eine Bijektion ist zum Beispiel $n \mapsto 2n$.

C. Ebenso sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig, eine Bijektion ist beispielsweise

$$\mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad n \mapsto \begin{cases} n/2, & n \text{ gerade}, \\ (1-n)/2, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Diese nummeriert $\mathbb{Z}$ als Folge $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ..$ durch. ◃

Als *Standardmengen* für endliche Mengen definieren wir

$$\mathbb{A}_0 \coloneqq \varnothing,$$
$$\mathbb{A}_n \coloneqq \mathbb{A}_{n-1} \cup \{n\} = \{1, .., n\}, \qquad n \geqslant 1.$$

Die Mengen $\mathbb{A}_n$ sind tatsächlich nicht gleichmächtig und von $\mathbb{N}$ verschieden, wie die beiden folgenden Sätze zeigen.

21 **Satz** *Es gilt $\mathbb{A}_m \sim \mathbb{A}_n$ genau dann, wenn $m = n$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ $\Leftarrow$ Ist $m = n$, so sind die beiden Mengen gleich, also erst recht gleichmächtig.

$\Rightarrow$ Sei umgekehrt $\mathbb{A}_m \sim \mathbb{A}_n$, wobei wir $1 \leqslant m \leqslant n$ annehmen dürfen. Wir argumentieren induktiv bezüglich n. Für $n = 1$ ist $m = n$, und die Behauptung ist wahr. Ist $n > 1$, so existiert nach Annahme zwischen beiden Mengen eine Bijektion. Dann gibt es aber auch eine Bijektion mit $m \mapsto n$. Die Einschränkung dieser Bijektion auf $\mathbb{A}_{m-1}$ ist dann auch eine Bijektion zwischen $\mathbb{A}_{m-1}$ und $\mathbb{A}_{n-1}$, es ist also $\mathbb{A}_{m-1} \sim \mathbb{A}_{n-1}$. Nach Induktionsannahme folgt hieraus $m - 1 = n - 1$. Also ist $m = n$, und wir sind fertig. ⟩⟩⟩⟩⟩

22 **Satz** *Es ist $\mathbb{A}_n \nsim \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Der Beweis ist als Übungsaufgabe überlassen $_{\text{A-15}}$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Definition *Eine nichtleere Menge M heißt*

(i) *endlich, falls $M \sim \mathbb{A}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$,*

(ii) *abzählbar unendlich, falls $M \sim \mathbb{N}$,*

(iii) *abzählbar, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist,*

(iv) *überabzählbar, wenn sie nicht abzählbar ist.* ⋊

Wegen des vorangehenden Satzes ist eine Menge nicht gleichzeitig endlich und abzählbar unendlich. Die Definition ist also sinnvoll.

Definition *Die Kardinalität einer Menge ist* [2]

$$|M| := \begin{cases} n & \text{falls } M \sim \mathbb{A}_n, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$ ⋊

Andere gebräuchliche Bezeichnungen sind $\operatorname{card} M$, $\operatorname{Anz}(M)$ oder $\# M$. Die so definierte Anzahlfunktion macht keinen Unterschied zwischen ›abzählbar unendlich‹ und ›überabzählbar‹.

[2] Die Striche $|\cdot|$ werden in der Mathematik vielfach verwendet – für den Betrag einer reellen Zahl, die Länge eines Intervalls, die Kardinalität einer Menge, und manches andere. Es sollte jeweils aus dem Kontext erkennbar sein, was gemeint ist.

▪ Abzählbare Mengen

Zunächst einige Beobachtungen zu abzählbaren Mengen. Es überrascht nicht, dass Teilmengen abzählbarer Mengen wieder abzählbar sind. Zuerst betrachten wir die Menge $\mathbb{N}$ selbst.

23 **Satz** *Jede Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist entweder endlich oder abzählbar unendlich.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Man zeigt durch Induktion über das Maximum, dass jede beschränkte Teilmenge A von $\mathbb{N}$ endlich ist A-13. Ist also A *nicht* endlich, so ist A jedenfalls unbeschränkt. Wir können dann eine Abbildung

$$\phi : \mathbb{N} \to A$$

induktiv definieren durch

$$\begin{aligned} \phi(1) &\coloneqq \min A, \\ \phi(n+1) &\coloneqq \min\{q \in A : q > \phi(n)\}, \qquad n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Aus dieser Definition folgt $\phi(1) < \phi(2) < ..$ und allgemein

$$\phi(n) < \phi(m), \qquad n < m.$$

Die Funktion ϕ ist, wie man sagt 7.19, *streng monoton steigend*. Hieraus folgt, dass sie auch *injektiv* ist.

Bleibt zu zeigen, dass ϕ *surjektiv* auf A ist. Zu beliebigen $p \in A$ sollte

$$n \coloneqq \min\{m \in \mathbb{N} : \phi(m) \geqslant p\}$$

der richtige Kandidat sein. In der Tat folgt unmittelbar aus dieser Definition

$$\phi(n) \geqslant p.$$

Für $n > 1$ gilt außerdem $\phi(n-1) < p$, denn $\phi(n-1) \geqslant p$ widerspräche der Definition von n. Mit der Definition von ϕ erhalten wir

$$\phi(n) = \min\{q \in A : q > \phi(n-1)\} \leqslant p,$$

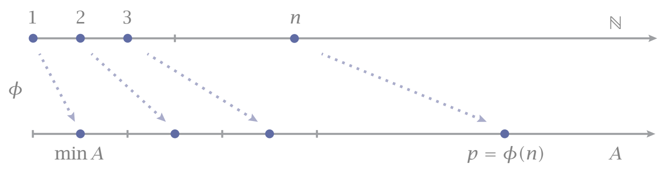
denn p ist ja Element der Menge in der Mitte. Aus den beiden letzten Ungleichungen folgt $\phi(n) = p$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Eine Bijektion $\phi : \mathbb{N} \to M$ kann man als ›Durchnummerierung‹ aller Elemente von M auffassen. Sie erlaubt es, alle Elemente in Form einer Folge $m_1, m_2, m_3, ..$ mit $m_n = \phi(n)$ hinzuschreiben, so dass

$$M = \phi(\mathbb{N}) = \{m_n : n \geqslant 1\}.$$

Obendrein tritt jedes Folgenglied *genau einmal* auf. ⊸

Abb 2 Zum Beweis von Satz 23



Da jede abzählbare Menge bijektiv auf $\mathbb{N}$ oder eine der Mengen $\mathbb{A}_n$ abgebildet werden kann, folgt aus diesem Satz das entsprechende Result für beliebige abzählbare Mengen.

24 **Korollar** *Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.* $\rtimes$

Abzählbarkeit ›vererbt‹ sich also auf Teilmengen – was nicht wirklich überrascht. Interessanter ist da die Frage, ob zum Beispiel ›abzählbar $\times$ abzählbar = abzählbar‹ gilt. Das ist in der Tat richtig.

25 **Satz** *Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.* $\rtimes$

⟪⟪⟪ Wir ordnen die Elemente von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in folgendem Matrixschema an:

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \cdots \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \cdots \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Dieses zählen wir mit dem *Cantorschen Diagonalverfahren* ab, indem wir sukzessive die *Diagonalen* durchnummerieren, deren Elemente (n,m) dieselbe Summe $n+m$ haben. Die ersten Glieder dieser Diagonalnummerierung sind

$$\begin{aligned} &(1,1), \\ &(2,1), (1,2), \\ &(3,1), (2,2), (1,3), \\ &(4,1), (3,2), (2,3), (1,4), \quad \ldots \ . \end{aligned}$$

Dies ist möglich, da jede dieser Diagonalen nur *endlich* viele Elemente besitzt, und liefert eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ⟫⟫⟫

26 **Korollar** *Das kartesische Produkt zweier und allgemeiner endlich vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar.* $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir betrachten nur den Fall zweier abzählbar *unendlicher* Mengen. Es sei also $A \sim \mathbb{N}$ und $B \sim \mathbb{N}$. Dann aber ist $A \times B \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, und die Behauptung folgt mit $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ aus dem vorangehenden Satz.

Das kartesische Produkt von mehr als zwei, aber endlich vielen abzählbaren Mengen behandelt man mit Induktion über die Anzahl der Faktoren. ⟩⟩⟩⟩⟩

27 **Satz** *Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wählen wir für jede rationale Zahl auf irgendeine Weise eine eindeutige Darstellung $r = n/m$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$, so erhalten wir eine Bijektion zwischen $\mathbb{Q}$ und einer Teilmenge von $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Da diese Teilmenge abzählbar ist, ist auch $\mathbb{Q}$ abzählbar. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Überabzählbare Mengen

Wir klären zunächst die Frage, ob es überhaupt überabzählbare Mengen gibt. Der nächste Satz führt zu einer positiven Antwort.

28 **Satz** *Es gibt keine Surjektion einer beliebigen Menge X auf $\mathcal{P}(X)$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Für $X = \varnothing$ ist $\mathcal{P}(X) = \{\varnothing\}$. Da die Bildmenge einer auf der leeren Menge definierten Abbildung ebenfalls leer ist und somit $\varnothing$ nicht zu deren Bild gehören kann, ist die Behauptung in diesem Fall richtig.

Sei jetzt $X \neq \varnothing$ und $\Phi\colon X \to \mathcal{P}(X)$ eine *beliebige* Abbildung. Betrachte

$$A := \{x \in X : x \notin \Phi(x)\} \in \mathcal{P}(X).$$

Angenommen, es gibt ein $\alpha \in X$ mit

$$\Phi(\alpha) = A.$$

Wäre $\alpha \in A$, so folgt $\alpha \notin \Phi(\alpha) = A$ aufgrund der Definition von A. Wäre aber $\alpha \notin A$, so bedeutet dies $\alpha \notin \Phi(\alpha)$, und es folgt $\alpha = A$. Das klappt also hinten und vorne nicht, und so kann es kein $\alpha \in X$ mit $\Phi(\alpha) = A$ geben. Also ist Φ *nicht* surjektiv. ⟩⟩⟩⟩⟩

Da man die Menge X durch

$$X \to \mathcal{P}(X), \quad x \mapsto \{x\}$$

bijektiv auf eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ abbilden kann, ist $\mathcal{P}(X)$ *immer mächtiger* als X. Somit ist $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mächtiger als $\mathbb{N}$ und damit *überabzählbar*. Es ist sogar jede der Mengen

$$\mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))), \quad \ldots$$

mächtiger als die vorangehende, *ad infinitum*. Es gibt somit mindestens unendlich viele verschiedene Unendlichkeiten … . — Aber was gilt für die reellen Zahlen?

29 **Satz** *Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Angenommen, $\mathbb{R}$ ist abzählbar. Dann gibt es eine Nummerierung [3]

$$x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, ..$$

aller reellen Zahlen. Wir konstruieren dann eine weitere reelle Zahl ξ, die *nicht* in dieser Nummerierung vorkommt.

Wir konstruieren ξ mithilfe einer fallenden Folge von Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n], \qquad n \geqslant 0,$$

die wir induktiv definieren. Als I_0 wählen wir ein beliebiges abgeschlossenes Intervall, das *nicht* den Punkt x_0 enthält:

$$I_0 \coloneqq [a_0, b_0] \not\ni x_0.$$

Ist nun I_{n-1} für $n > 0$ bereits konstruiert, so wählen wir I_n als linkes oder rechtes abgeschlossenes Drittel von I_{n-1} so, dass

$$I_n \coloneqq [a_n, b_n] \not\ni x_n.$$

Das ist immer möglich, da x_n nicht in beiden Dritteln gleichzeitig enthalten sein kein. Offensichtlich ist $I_n \subset I_{n-1}$.

Für die Randpunkte der so definierten Intervalle gilt

$$a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant .. \leqslant a_n < b_n \leqslant .. \leqslant b_2 \leqslant b_1 \leqslant b_0, \qquad n \geqslant 0.$$

Also gilt auch

$$A \coloneqq \{a_n : n \geqslant 0\} < B \coloneqq \{b_n : n \geqslant 0\}.$$

Insbesondere ist A nach oben beschränkt, und es existiert $\xi = \sup A$ wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Es gilt dann

$$A \leqslant \xi \leqslant B,$$

denn alle Elemente von B sind obere Schranken von A, und ξ ist die kleinste obere Schranke. Somit gilt

$$\xi \in I_n, \qquad n \geqslant 0.$$

Aufgrund der Konstruktion der Intervalle I_n bedeutet dies aber, dass $\xi \neq x_n$ für alle $n \geqslant 0$. Wir haben also eine reelle Zahl ξ gefunden, die nicht in der Aufzählung $x_0, x_1, x_2, ..$ enthalten ist – ein Widerspruch. ⟩⟩⟩⟩⟩

[3] Wir fangen zur Abwechslung bei 0 an.

Bemerkungen *a.* Die Intervalle I_n bilden eine sogenannte *Intervallschachtelung* A-2.39 .

b. Aus der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen ergibt sich, dass auch das kartesische Produkt abzählbar unendlich vieler endlicher Mengen mit mindestens zwei Elementen überabzählbar ist. ⊸

3.5 Etwas Kombinatorik

Wir erwähnen noch einige elementare Sätze der Kombinatorik, die sämtlich mittels vollständiger Induktion bewiesen werden, beispielsweise Sätze über die Anzahl von Teilmengen, Permutationen, und Auswahlmengen. Ein wesentliches Ergebnis ist hierbei die allgemeine binomische Formel.

30 **Satz** *Eine n-elementige Menge M besitzt genau 2^n verschiedene Teilmengen:*

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}. \qquad \rtimes$$

⟪⟪ *Induktionsanfang:* Dies gilt bereits für $n = 0$, also $M = \varnothing$, denn

$$|\varnothing| = 0, \qquad |\mathcal{P}(\varnothing)| = |\{\varnothing\}| = 1 = 2^0.$$

Für $n = 1$ rechnet man dies genau so nach. *Induktionsschluss:* Der Satz gelte für jede n-elementige Menge M. Sei

$$M_+ = M \cup \{+\}$$

eine $n + 1$-elementige Menge – wir nehmen also $+ \notin M$ an. Dann gilt

$$\mathcal{P}(M_+) = P_+ \cup P_-,$$

wobei P_+ alle Teilmengen von M_+ umfasst, die $+$ enthalten, und P_- die übrigen, die dieses Element nicht enthalten. Diese beiden Familien sind also disjunkt. Außerdem können wir P_- unmittelbar mit der Potenzmenge von M identifizieren. Dasselbe gilt für P_+, denn jede Menge in P_+ entsteht durch Hinzunahme von $+$ zu einer Teilmenge von M. Daher gilt mit der Induktionsannahme

$$|\mathcal{P}(M_+)| = |P_+| + |P_-| = |\mathcal{P}(M)| + |\mathcal{P}(M)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Damit sind wir fertig. ⟫⟫

Als Nächstes betrachten wir die Anzahl aller möglichen Bijektionen einer n-elementigen Menge auf sich. Dies ist gleichbedeutend mit der Frage, wieviele Vertauschungen der Elemente eines n-Tupels es gibt.

31 **Satz** *Es gibt genau $n!$ verschiedene Permutationen von n Objekten.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ *Induktionsanfang:* Für ein einziges Objekt gibt es genau eine Möglichkeit der Anordung, die Anzahl ist also $1 = 1!$.

Induktionsschluss: Haben wir $n+1$ Objekte, so haben wir für die Wahl des ersten Elements der Anordnung genau $n+1$ Möglichkeiten. Danach bleiben uns noch n Elemente für die weitere Anordnung. Wenden wir hierauf die Induktionsannahme an, so erhalten wir als Gesamtzahl der Anordungsmöglichkeiten

$$(n+1)\cdot n! = (n+1)!.$$ ⟩⟩⟩⟩

Schließlich fragen wir nach der Zahl aller möglichen m-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

32 **Satz** *Eine n-elementige Menge M besitzt genau*

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

m-elementige Teilmengen, wobei $0 \leqslant m \leqslant n$. ⋊

An dieser Stelle zeigt sich der Sinn der Vereinbarung $0! = 1$. Denn

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad n \geqslant 0,$$

ist die korrekte Anzahl von Teilmengen für diese Fälle.

⟨⟨⟨⟨ Die Gesamtzahl aller m-*Tupel*, die sich aus $n \geqslant m$ Elementen bilden lassen, ist

$$n(n-1)\cdot\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!},$$

denn sukzessive können wir aus n, $n-1, \dots, n-m+1$ Elementen für die nächste Komponente auswählen. Da es bei Mengen aber nicht auf die Reihenfolge der Elemente ankommt, müssen wir noch durch die Anzahl aller möglichen Permutationen von m Elementen dividieren. Somit ist die Anzahl aller *m-elementigen Teilmengen* gleich

$$\frac{1}{m!}\cdot\frac{n!}{(n-m)!} = \binom{n}{m}.$$ ⟩⟩⟩⟩

▹ *Beispiel* Es gibt

$$\binom{49}{6} = 10\,068\,347\,520$$

Möglichkeiten, 6 aus 49 zu spielen. ◃

Die im vorangehenden Satz auftretenden Ausdrücke heißen *Binomialkoeffizienten* und treten in vielen Fragestellungen der Kombinatorik und Statistik auf. Für uns spielen sie vor allem eine Rolle in der binomischen Formel und der Produktregel der Differenziation. — Zunächst die elementarsten Eigenschaften dieser Koeffizienten.

33 **Satz** *Für alle* $0 \leqslant m \leqslant n$ *gilt*

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

sowie für $1 \leqslant m \leqslant n$

$$\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}.$$

Man beachte, dass dies die binomischen Koeffizienten rekursiv beschreibt.

Die erste Identität ergibt sich sofort. Die zweite Identität ist eine direkte Rechnung:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} &= \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m+1)!} + \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \\
&= \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m)!}\left(\frac{1}{n-m+1} + \frac{1}{m}\right) \\
&= \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m)!} \cdot \frac{n+1}{m(n-m+1)} \\
&= \frac{(n+1)!}{m!\,(n-m+1)!} = \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

Aus der letzten Formel ergibt sich, dass bei Anordnung der Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck wie in Abbildung 3 – mit $\binom{n}{m}$ an der m-ten Stelle in der n-ten Zeile, wobei die Zählung bei Null beginnt – jedes Element die Summe der beiden direkt über ihm stehenden Elemente ist.

34 **Binomische Formel** *Für alle reellen Zahlen* a *und* b *und alle* $n \geqslant 0$ *gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Induktionsanfang: Für $n = 0$ reduziert sich die Behauptung auf $1 = 1$, und für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = a^1 b^0 + a^0 b^1 = a + b = (a+b)^1.$$

Abb 3 Die ersten sieben Zeilen des Pascalschen Dreiecks

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&& \binom{0}{0} &&&&&& \\
&&&&& \binom{1}{0} && \binom{1}{1} &&&&& \\
&&&& \binom{2}{0} && \binom{2}{1} && \binom{2}{2} &&&& \\
&&& \binom{3}{0} && \binom{3}{1} && \binom{3}{2} && \binom{3}{3} &&& \\
&& \binom{4}{0} && \binom{4}{1} && \binom{4}{2} && \binom{4}{3} && \binom{4}{4} && \\
& \binom{5}{0} && \binom{5}{1} && \binom{5}{2} && \binom{5}{3} && \binom{5}{4} && \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} && \binom{6}{1} && \binom{6}{2} && \binom{6}{3} && \binom{6}{4} && \binom{6}{5} && \binom{6}{6}
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& 1 && 1 &&&&& \\
&&&& 1 && 2 && 1 &&&& \\
&&& 1 && 3 && 3 && 1 &&& \\
&& 1 && 4 && 6 && 4 && 1 && \\
& 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 & \\
1 && 6 && 15 && 20 && 15 && 6 && 1
\end{array}
$$

Dies ist also korrekt. *Induktionsschluss:* Nehmen wir die Gültigkeit der Formel für irgendein $n \geqslant 1$ an, so folgt

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}.
\end{aligned}
$$

Nach Umnummerierung $k+1 \to k$ wird

$$
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + a^0 b^{n+1},
$$

während

$$
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k = a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k.
$$

Mit 33

$$
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}
$$

erhalten wir also

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + a^0 b^{n+1} \\
= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k,
\end{aligned}
$$

was der Behauptung für $n+1$ entspricht. ⟩⟩⟩⟩⟩

3.25

Mit den binomischen Formeln für $(1+1)^n = 2^n$ und $(1-1)^n = 0$ erhalten wir zum Beispiel folgendes

35 **Korollar** *Für alle* $n \geqslant 1$ *gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0. \qquad \rtimes$$