6

Reihen

Unendliche Summen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots$$

reeller oder komplexer Zahlen sind Folgen besonderer Art. Da man nicht sämtliche Glieder einer Folge (a_k) auf einmal summieren kann, steht eine solche Summe genauer für die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad n \geqslant 1,$$

die man in gewohnter Weise untersuchen kann.

Übrigens kann man jede Zahlenfolge (a_n) auch als Partialsummenfolge der Reihe

$$a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (a_k - a_{k-1})$$

auffassen, denn es ist ja

$$s_n = a_1 + \sum_{k=2}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n.$$

Folgen und Reihen sind somit im Grunde zwei Erscheinungsformen ein und derselben Sache. Reihen sind allerdings in vielen Zusammenhängen das natürlichere Objekt – die Stichworte *Potenzreihe*, *Taylorreihe* und *Fourierreihe* sollen an dieser Stelle genügen.

6.1 Konvergenz

Eine *Zahlenreihe* oder kurz *Reihe* ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + ..$$

mit reellen oder komplexen *Gliedern* a_k. Die endlichen Summen

$$s_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad n \geqslant 1,$$

heißen die n-ten *Partialsummen* dieser Reihe.

Definition *Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergiert. Ihr Grenzwert heißt Wert dieser Reihe, es gilt dann*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \coloneqq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Konvergiert die Folge der Partialsummen dagegen nicht, so heißt die Reihe divergent. ⋊

Die Summation kann natürlich auch bei jedem anderen Index beginnen, nicht nur bei 1. Kommt es auf den Startindex nicht an, schreibt man auch kürzer $\sum_k a_k$.

Bemerkung Eigentlich ist zu unterscheiden zwischen der *formalen Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

deren Konvergenz noch nicht fest steht und die auch divergieren kann, und der *konvergenten Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Die *formale Reihe* steht für die *Folge* ihrer Partialsummen, unabhängig von deren Konvergenz, die *konvergente Reihe* für deren *Grenzwert*, wenn er existiert. Dieser Unterschied kommt in der allgemein üblichen Notation für Reihen nicht zum Ausdruck. ⊸

▷ *Beispiele* Die Partialsummen der *Quadratreihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ..$$

sind monoton steigend, da alle Summanden positiv sind. Sie sind auch beschränkt, denn

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Aufgrund des Satzes von der monotonen Konvergenz $_{5.14}$ konvergieren die Partialsummen, und die betrachtete Reihe ist konvergent. Übrigens wusste bereits Euler, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \qquad ◁$$

1 ▷ Die *geometrische Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + ..$$

konvergiert für $|q| < 1$. Denn für die Partialsummen gilt ja $_{3.13}$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \qquad q \neq 1.$$

Für $|q| < 1$ gilt $q^{n+1} \to 0$ $_{5.10}$. Mit den Grenzwertgleichungen $_{5.7}$ folgt die Konvergenz der Partialsummen, und wir erhalten

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}, \qquad |q| < 1.$$

Für $|q| \geqslant 1$ ist die Reihe dagegen offensichtlich divergent. ◁

▪ Zwei elementare Kriterien

2 **Cauchykriterium** *Die Zahlenreihe $\sum_k a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geqslant 1$ gibt, so dass*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon, \qquad m > n \geqslant N. \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨ Wegen

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right|, \qquad m > n,$$

ist dies gerade das Cauchykriterium $_{5.22}$ für die Folge der Partialsummen (s_n). ⟩⟩⟩⟩

3 **Nullfolgenkriterium** *Ist die Reihe $\sum_k a_k$ konvergent, so bilden ihre Glieder a_k eine Nullfolge.* ⋊

⟪⟪ Konvergiert die Folge der Partialsummen, so folgt für $a_n = s_n - s_{n-1}$ aus den Grenzwertgleichungen 5.8

$$\lim a_n = \lim (s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0. \qquad ⟫⟫$$

Konvergieren die Glieder a_k *nicht* gegen 0, so ist die Reihe $\sum_k a_k$ also divergent – und in dieser Form wird dieses Kriterium angwandt.. Denn das Nullfolgenkriterium ist natürlich nicht hinreichend für die Konvergenz einer Reihe, wie das folgende Beispiel zeigt – das wäre ja auch zu einfach, und dieses Kapitel wäre überflüssig.

4 ⊳ Die *harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ..$$

ist divergent. Denn die Partialsummen sind monoton steigend, aber es gilt

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \qquad n \geqslant 1.$$

Sie bilden somit keine Cauchyfolge. Vielmehr konvergiert die harmonische Reihe uneigentlich gegen ∞. ⊲

Die Grenzwertsätze für Folgen übertragen sich auf dem Weg über die Partialsummen zu entsprechenden Sätzen für Reihen. Sind zum Beispiel $\sum_k a_k$ und $\sum_k b_k$ konvergente Reihen, so ist auch die Reihe $\sum_k (\lambda a_k + \mu b_k)$ konvergent, und es gilt

$$\sum_k (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_k a_k + \mu \sum_k b_k.$$

Wir führen das nicht weiter aus.

⊳ Für $|q| < 1$ und $n \geqslant 0$ ist

$$\sum_{k=n}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^{n+k} = q^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q^n}{1-q}. \qquad ⊲$$

6.2 Absolute Konvergenz

In einer endlichen reellen Summe ist es kein Problem, die Reihenfolge der Summanden beliebig zu ändern – die Summe ändert sich dadurch nicht. In einer unendlichen Reihe ist dies aber keineswegs immer so. Dazu bedarf es einer stärkeren Form der Konvergenz.

Definition *Eine Reihe $\sum_k a_k$ heißt absolut konvergent, wenn ihre Absolutreihe $\sum_k |a_k|$ konvergiert. Eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe heißt bedingt konvergent.* ⋊

5 **Satz von der absoluten Konvergenz** *Eine Reihe ist absolut konvergent genau dann, wenn ihre Absolutreihe beschränkt ist. Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent, und es gilt die Dreiecksungleichung*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| . \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨ Die Folge der Partialsummen der Absolutreihe $\sum_k |a_k|$ ist monoton steigend. Aufgrund des Satzes von der monotonen Konvergenz [5.14] konvergiert sie genau dann, wenn sie beschränkt ist. In diesem Fall erfüllt sie auch das Cauchykriterium. Wegen

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|$$

erfüllt dann auch die Reihe $\sum_k a_k$ das Cauchykriterium [2], ist also konvergent. Für jede endliche Summe gilt außerdem

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| .$$

Da die rechte Seite monoton mit n steigt und konvergiert, gilt dann auch

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| , \qquad n \geqslant 1.$$

Da die Partialsummen auf der linken Seite konvergieren, folgt durch Grenzübergang die allgemeine Dreiecksungleichung. ⟩⟩⟩⟩

Die Umkehrung des Satzes gilt *nicht* – sonst wäre der Begriff der absoluten Konvergenz ja auch nicht nötig. Eine Reihe kann also konvergieren, während ihre Absolutreihe divergiert. Das klassische Beispiel hierfür ist die alternierende harmonische Reihe, die wir weiter unten betrachten [17].

Wir beschreiben nun genauer, in welchem Sinn absolut konvergente Reihen in beliebiger Reihenfolge aufsummiert werden können. Eine *Umordnung* einer Reihe $\sum_k a_k$ ist gegeben durch eine *Bijektion*

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$$

die zugehörige *umgeordnete Reihe* ist $\sum_k a_{\sigma(k)}$. Es treten also genau dieselben Summanden wie in $\sum_k a_k$ auf, nur in anderer Reihenfolge. Interessant ist dies natürlich erst, wenn *unendlich* viele Summanden umgeordnet werden.

6 **Umordnungssatz** *Ist die Reihe $\sum_k a_k$ absolut konvergent, so ist auch jede Umordnung dieser Reihe absolut konvergent, und der Wert der Reihe ändert sich nicht.* ⋊

⟪⟪⟪ Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Bijektion. Da die Reihe $\sum_{k \geqslant 1} a_k$ absolut konvergiert, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geqslant 1$, so dass

$$\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon, \qquad m > n \geqslant N.$$

Dann gilt mit $n = N$ und $m \to \infty$ auch

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \leqslant \varepsilon.$$

Die Glieder $a_1, .., a_N$ haben in der umgeordneten Reihe $\sum_{k \geqslant 1} a_{\sigma(k)}$ maximal den Index $M = \max\{\sigma(1), .., \sigma(N)\}$. Für $n \geqslant N$ und $m \geqslant M$ gilt dann

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_{\sigma(k)} \right| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \leqslant \varepsilon, \tag{1}$$

denn in der Differenz heben sich die Glieder $a_1, .., a_N$ auf, während jedes weitere Glied sich entweder ebenfalls aufhebt oder genau einmal vorkommt. Durch Grenzübergang $n \to \infty$ erhalten wir hieraus

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_{\sigma(k)} \right| \leqslant \varepsilon, \qquad m \geqslant M. \tag{2}$$

Da zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches M existiert, folgt die Konvergenz der umgeordneten Reihe gegen den Wert der ursprünglichen Reihe. Es gilt also

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Bleibt noch zu zeigen, dass auch die umgeordnete Reihe *absolut* konvergiert. Dazu genügt es zu bemerken, dass (1) und (2) mit demselben Argument auch für die Beträge gilt, also

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| - \sum_{k=1}^{m}|a_{\sigma(k)}|\right| \leqslant \varepsilon, \qquad m \geqslant M.$$

Also ist $\sum_{k\geqslant 1}|a_{\sigma(k)}|$ beschränkt und damit konvergent. ⟩⟩⟩⟩⟩

Dass dieser Satz nicht selbstverständlich ist, verdeutlicht der komplementäre Satz über bedingt konvergente Reihen.

7 **Riemannscher Umordnungssatz** *Ist eine reelle Reihe konvergent, aber nicht absolut konvergent, so existiert zu jeder reellen Zahl s eine Umordnung dieser Reihe, die gegen s konvergiert.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ *Beweisskizze* Setze

$$a^+ = \begin{cases} a, & a \geqslant 0 \\ 0, & a < 0, \end{cases} \qquad a^- = \begin{cases} 0, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Somit sind a^+ und a^- nicht-negativ, und $a = a^+ - a^-$ und $|a| = a^+ + a^-$.

Betrachte nun

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n} a_k^-.$$

Die linke Seite konvergiert für $n \to \infty$ nach Voraussetzung. Würde einer der beiden Reihen auf der rechen Seite konvergieren, dann auch die andere. Konvergieren aber beide, so konvergiert auch

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^+ + \sum_{k=1}^{n} a_k^- = \sum_{k=1}^{n} |a_k|,$$

die Reihe wäre also absolut konvergiert. Da dies nicht der Fall ist, gilt also

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \infty.$$

Dies ist die entscheidende Beobachtung.

Sei nun $s > 0$ eine beliebige reelle Zahl. Wir setzen $s_0^- = 0$ sowie $K_0^+ = K_0^- = 0$ und definieren induktiv

$$s_n^+ = s_{n-1}^- + \sum_{K_{n-1}^+ < k \leqslant K_n^+} a_k^+, \qquad s_n^- = s_n^+ - \sum_{K_{n-1}^- < k \leqslant K_n^-} a_k^-, \qquad n \geqslant 1,$$

wobei

$$K_n^+ \coloneqq \min\Big\{K : s_{n-1}^- + \sum_{K_{n-1}^+ < k \leqslant K} a_k^+ > s\Big\},$$
$$K_n^- \coloneqq \min\Big\{K : s_n^+ - \sum_{K_{n-1}^+ < k \leqslant K} a_k^- < s\Big\}.$$

Da die hier auftretenden Summen für $K \to \infty$ divergieren, sind die betrachteten Mengen nicht leer und K_n^+ und K_n^- wohldefiniert. Aus dieser Konstruktion folgt $s_n^- < s < s_n^+$ für alle n mit

$$s_n^+ - s \leqslant a_{K_n^+}^+, \qquad s - s_n^- \leqslant a_{K_n^-}^-.$$

Wegen $K_n^\pm \to \infty$ und $a_n \to 0$ für $n \to \infty$ zeigt dies, dass s_n^+ und s_n^- gegen s konvergieren. ⟫⟫⟫

6.3 Konvergenzkriterien

Das einfachste Konvergenzkriterium ergibt sich aus dem Vergleich einer Reihe mit einer konvergenten Majorante. Dabei heißt eine reelle Reihe $\sum_n b_n$ *Majorante* einer Reihe $\sum_n a_n$, wenn

$$|a_n| \leqslant b_n$$

für alle hinreichend großen n gilt. Offensichtlich ist notwendigerweise $b_n \geqslant 0$ für alle diese n.

8 **Majorantenkriterium** *Besitzt eine Reihe eine konvergente Majorante, so ist sie absolut konvergent.* ⋊

⟪⟪⟪ Nach Voraussetzung existiert ein $N \geqslant 1$, so dass

$$\sum_{n=N}^{m} |a_n| \leqslant \sum_{n=N}^{m} b_n \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} b_n < \infty.$$

Also ist die Absolutreihe $\sum_n |a_n|$ beschränkt, und die Behauptung folgt mit dem Satz von der absoluten Konvergenz 5. ⟫⟫⟫

Die Kontraposition dieses Satz ist das entsprechende

9 **Minorantenkriterium** *Besitzt eine Reihe eine divergente Minorante – gilt also $a_n \geqslant b_n \geqslant 0$ für fast alle n und divergiert $\sum_n b_n$ –, so divergiert auch $\sum_n a_n$.* ⋊

Die Wahl spezieller Majoranten führt zu handlichen Konvergenzkriterien. Besonders einfach und praktisch sind das Wurzel- 10 und das Quotientenkriterium 11, die auf der geometrischen Reihe als Majorante beruhen. Dabei greifen wir auf die Definition der n-ten Wurzel vor, die erst in Abschnitt 7.21 erfolgt. Die Ergebnisse dort sind aber unabhängig von diesem Kapitel, so dass kein Zirkelschluss vorliegt.

10 **Wurzelkriterium** *Konvergiert die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})$ und gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

so ist die Reihe $\sum_n a_n$ absolut konvergent. Gilt dagegen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

so ist diese Reihe divergent. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Im ersten Fall existiert ein q mit $0 < q < 1$ und ein $N \geqslant 1$, so dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} < q < 1, \qquad n \geqslant N.$$

Also gilt $|a_n| \leqslant q^n$ für $n \geqslant N$, und die geometrische Reihe $\sum_n q^n$ bildet eine konvergente Majorante zu $\sum_n a_n$. Im anderen Fall ist $|a_n| \geqslant 1$ für fast alle n. Somit bilden die a_n keine Nullfolge, und die Reihe divergiert 3. ⟩⟩⟩⟩

▹ *Beispiel* Für $z \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ betrachte man die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^r z^n = z + 2^r z^2 + 3^r z^3 + \,..\;.$$

Man erhält 5.13

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^r\,|z|^n} = \Big(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\Big)^r |z| = |z|\,.$$

Somit ist die Reihe absolut konvergent für $|z| < 1$, und divergend für $|z| > 1$. Für $|z| = 1$ macht das Wurzelkriterium keine Aussage. ◂

11 **Quotientenkriterium** *Gilt $a_n \neq 0$ für fast alle n und konvergiert die Folge sukzessiver Quotienten mit*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

so ist die Reihe $\sum_n a_n$ absolut konvergent. Gilt dagegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1,$$

so ist diese Reihe divergent. ⋊

⟪⟪ Im ersten Fall gibt es ein q mit $0 < q < 1$ und ein $N \geqslant 1$, so dass

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leqslant q < 1, \qquad n \geqslant N.$$

Also ist $|a_{n+1}| \leqslant q\,|a_n|$ für $n \geqslant N$. Mit Induktion folgt hieraus

$$|a_n| \leqslant q^{n-N}\,|a_N| = cq^n, \qquad n \geqslant N,$$

mit der Konstanten $c = q^{-N}\,|a_N|$. Also ist $\sum_n cq^n$ eine konvergente Majorante. Im anderen Fall gibt es ein $N \geqslant 1$, so dass $|a_n| \geqslant |a_{n-1}| \geqslant .. \geqslant |a_N| > 0$ für $n \geqslant N$. Somit bilden die a_n keine Nullfolge, und die Reihe divergiert. ⟫⟫

12 ▷ Die *Exponenzialreihe*

$$\exp(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ..$$

ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent. Für $z = 0$ ist dies trivial, und für $z \neq 0$ gilt

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Dasselbe Ergebnis erhält man auch mit dem Wurzelkriterium, denn

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{|z|^n}{n!}} = \frac{|z|}{\sqrt[n]{n!}} \to 0, \qquad n \to \infty. \quad ◁$$

Konvergieren im Wurzel- und Quotientenkriterium die entsprechenden Ausdrücke gegen 1, so ist völlig offen, wie sich die Reihe verhält. Dann müssen andere Kriterien herangezogen werden, wie zum Beispiel das

13 **Verdichtungskriterium** *Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge. Dann haben die beiden Reihen*

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n, \qquad \sum_{n\geqslant 0} 2^n a_{2^n}.$$

dasselbe Konvergenzverhalten. Das heißt, beide Reihen sind entweder absolut konvergent oder divergent. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $m \geqslant 0$. Auf Grund der Monotonie der a_n gilt

$$\sum_{2^m < k \leqslant 2^{m+1}} a_{2^{m+1}} \leqslant \sum_{2^m < k \leqslant 2^{m+1}} a_k \leqslant \sum_{2^m < k \leqslant 2^{m+1}} a_{2^m},$$

also

$$2^m a_{2^{m+1}} \leqslant \sum_{2^m < k \leqslant 2^{m+1}} a_k \leqslant 2^m a_{2^m}.$$

Summieren wir über $m = 0, .., n$, so erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^{k+1}} \leqslant \sum_{k=2}^{2^{n+1}} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}.$$

Konvergiert die rechts stehende Reihe, so konvergiert auch $\sum_k a_k$. Konvergiert letztere Reihe, so konvergiert auch die linke Seite, und damit auch wieder die rechte Seite. Im Fall der Divergenz argumentiert man ebenso. Somit haben beide Reihen dasselbe Konvergenzverhalten. ⟩⟩⟩⟩⟩

14 ▹ Betrachte die *allgemeine harmonische Reihe*

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ..$$

für $\alpha > 0$. Das Wurzel- und das Quotientenkriterium sind nicht anwendbar, denn

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^\alpha \to 1$$

und

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n-1)^\alpha}{n^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{n} \right)^\alpha \to 1.$$

Ihre verdichtete Reihe ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n - \alpha n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n.$$

Wegen $2^{1-\alpha} < 1$ für $\alpha > 1$ konvergiert die allgemeine harmonische Reihe also für $\alpha > 1$. Ihre Divergenz für $\alpha \leqslant 1$ ist ohnehin klar, da dann die harmonische Reihe eine divergente Minorante ist. ◂

Die allgemeine harmonische Reihe konvergiert langsamer als die geometrische Reihe. Als Majorante liefert sie daher ein Konvergenzkriterium, dass in Situationen hilft, wo das Wurzel- oder Quotientenkriterium keine Aussage ermöglichen. Dies führt zum

15 **Raabe-Kriterium** *Eine Reihe $\sum_n a_n$ mit positiven Gliedern ist konvergent, wenn es ein $\alpha > 1$ gibt, so das*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{\alpha}{n}$$

für fast alle n. Gilt dagegen

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 - \frac{1}{n}$$

für fast alle n, so ist die Reihe divergent. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Gilt die Ungleichung für alle $n \geqslant N$, so folgt induktiv

$$a_{n+1} \leqslant a_N \prod_{k=N}^{n} \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right).$$

Also gilt mit einer hinreichend großen Konstanten c für *alle* n

$$a_{n+1} \leqslant c \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right).$$

Es gilt aber

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) \leqslant \frac{1}{n^\alpha}, \qquad n \geqslant 1.$$

Für $n = 1$ ist dies richtig, und der Induktionsschritt von $n - 1$ auf n reduziert sich auf

$$\frac{1}{(n-1)^\alpha} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Dies ist aber äquivalent zur Bernoullischen Ungleichung

$$1 - \frac{\alpha}{n} \leqslant \left(\frac{n-1}{n}\right)^\alpha = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha.$$

Somit ist ein Vielfaches der allgemeinen harmonischen Reihe eine konvergente Majorante für $\sum_n a_n$. Die Divergenzbehauptung folgt analog. ⟩⟩⟩⟩

▹ *Beispiel* Betrachte die Reihe

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n+2)}.$$

Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder ist

$$q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+4}.$$

Da dieser gegen 1 konvergiert, ist das Quotientenkriterium nicht anwendbar. Wegen

$$\frac{2n+1}{2n+4} = 1 - \frac{3}{2n+4} \leqslant 1 - \frac{4}{3n}, \qquad n \geqslant 16,$$

ist aber das Raabe-Kriterium anwendbar, die Reihe also konvergent. ◂

Die bisherigen Konvergenzkriterien betreffen die absolute Konvergenz. Die bedingte Konvergenz ist subtiler. Daher erwähnen wir nur das einfachste Kriterium für sogenannte *alternierende Reihen*. Dies sind *reelle* Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - ..$$

mit $a_n \geqslant 0$ für alle n.

16 **Leibniz-Kriterium** *Ist (a_n) eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die alternierende Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - .. \,. \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Für die Partialsummen dieser Reihe erhalten wir

$$\begin{aligned} s_{2n+1} - s_{2n-1} &= a_{2n} - a_{2n+1} \geqslant 0, \\ s_{2n+2} - s_{2n} &= a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0, \\ s_{2n+2} - s_{2n+1} &= a_{2n+2} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$s_1 \leqslant s_3 \leqslant .. \leqslant s_{2n-1} \leqslant s_{2n+1} \leqslant s_{2n+2} \leqslant s_{2n} \leqslant .. \leqslant s_2 \leqslant s_0, \qquad n \geqslant 1.$$

Die ›ungeraden‹ Partialsummen sind also monoton steigend, die ›geraden‹ Partialsummen monoton fallend, und beide sind beschränkt. Somit konvergieren (s_{2n}) und (s_{2n-1}). Wegen

$$0 \leqslant s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n} \searrow 0$$

haben sie auch denselben Grenzwert. Also konvergiert die gesamte Reihe. ⟩⟩⟩⟩⟩

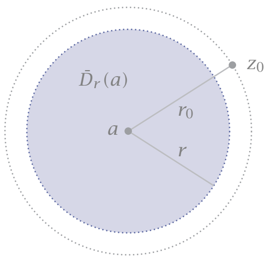
17 ▹ Die *alternierende harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ..$$

konvergiert nach dem Leibnizkriterium $_{16}$, denn $1/n \searrow 0$. Ihr Wert ist übrigens $\log 2$. ◂

Abb 1

Absolute und gleichmäßige Konvergenz auf $\bar{D}_r(a)$



6.4 Potenzreihen

Eine Reihe der Gestalt

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^n$$

mit komplexen Koeffizienten heißt *komplexe Potenzreihe* um den *Entwicklungspunkt* a. Sind die Koeffizienten a_n und a wie auch die Variable z reell, so spricht man von einer *reellen Potenzreihe*. Die Theorie für beide Arten von Potenzreihen ist jedoch dieselbe. Wir betrachten daher von vornherein den komplexen Fall und sprechen einfach von *Potenzreihen*.

Bei Potenzreihen stellt sich die Frage der Konvergenz der Reihe eigentlich für jedes einzelne Argument. Tatsächlich sind die Verhältnisse aber wesentlich einfacher.

18 **Lemma** *Konvergiert die Potenzreihe*

$$\phi(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^n$$

in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, *so konvergiert sie auch in jedem Punkt* $z \in \mathbb{C}$ *mit*

$$|z-a| \leqslant |z_0-a|. \quad \rtimes$$

Die Konvergenz ist sogar *gleichmäßig* auf jeder Kreisscheibe $|z-a| \leqslant r$ mit $r < |z_0-a|$. Aber dieser Aspekt wird uns erst später beschäftigen, wenn es um Fragen wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit geht.

⟨⟨⟨⟨⟨ Konvergiert ϕ im Punkt z_0, so bilden die Koeffizienten von $\phi(z_0)$ eine Nullfolge. Es gilt also

$$c = \sup_{n\geqslant 0} |a_n(z_0-a)^n| < \infty.$$

Mit diesem c gilt somit

$$|a_n| \leqslant \frac{c}{|z_0 - a|^n}, \qquad n \geqslant 0.$$

Betrachten wir nun einen beliebigen anderen Punkt z mit $|z - a| \leqslant r < |z_0 - a|$, so ist dort

$$|a_n(z-a)^n| \leqslant |a_n|\, r^n \leqslant \frac{cr^n}{|z_0 - a|^n} = cq^n$$

mit

$$q = \frac{r}{|z_0 - a|} < 1.$$

Somit besitzt die Potenzreihe für alle diese z eine konvergente geometrische Reihe als gemeinsame Majorante, und es ist alles gezeigt. ⟫⟫⟫

Dieses Lemma beinhaltet folgende Umkehrung. *Divergiert* die Potenzreihe in einem Punkt z_0, so divergiert sie in jedem Punkt z mit $|z - a| > |z_0 - a|$. Denn konvergierte sie in z, so müsste sie ja aufgrund dieses Lemmas auch in z_0 konvergieren. Aus diesen Überlegungen folgt, dass jede Potenzreihe einen eindeutigen *Konvergenzradius* besitzt.

19 **Konvergenzsatz für Potenzreihen** *Zu jeder Potenzreihe*

$$\phi(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z-a)^n$$

existiert ein eindeutiger Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$ *derart, dass sie für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z - a| < R$ *konvergiert, und für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z - a| > R$ *divergiert.* ⋊

⟪⟪⟪ Die Menge

$$K = \{ z \in \mathbb{C} : \phi(z) \text{ ist konvergent} \}$$

enthält immer den Punkt a, ist also nicht leer. Somit ist

$$R = \sup \{ |z - a| \ : z \in K \}$$

ein wohldefiniertes Element von $[0, \infty]$. Für dieses R folgen die Behauptungen mit dem vorangehenden Lemma. Denn ist beispielsweise $|z - a| < R$, so muss es ein $z_0 \in K$ geben mit $|z_0 - a| > |z - a|$. Mit dem vorangehehenden Lemma folgt somit die Kovergenz im Punkt z. ⟫⟫⟫

Für den Konvergenzradius R einer Potenzreihe ϕ gilt damit:

(i) Im Fall $R = 0$ divergiert ϕ für jedes $z \neq a$.

(ii) Im Fall $R = \infty$ konvergiert ϕ für jedes $z \in \mathbb{C}$.

(iii) Im Fall $0 < R < \infty$ konvergiert ϕ in jedem Punkt z mit $|z-a| < R$ und divergiert in jedem Punkt z mit $|z-a| > R$.
Man nennt die abgeschlossene Kreisscheibe

$$\{z \in \mathbb{C} : \ |z-a| \leqslant R\},$$

den *Konvergenzkreis* der Potenzreihe. Über Konvergenz oder Divergenz in Punkten auf dem *Rand* $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| = R\}$ dieses Konvergenzkreises lässt sich allerdings ohne weitere Annahmen *nichts sagen*. Dort kann das Verhalten sogar außerordentlich ›wild‹ sein.

Es gilt übrigens folgende Formel, die wir allerdings nicht benötigen und deren Beweis wir als Übung überlassen $_{\text{A-18}}$.

20 **Formel von Hadamard** *Für den Konvergenzradius R einer Potenzreihe $\sum_n a_n(z-a)^n$ gilt*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

mit den Vereinbarungen $1/0 = \infty$ und $1/\infty = 0$. ⋊

▹ *Beispiel* Betrachte die Potenzreihe

$$\phi(z) = \sum_{n\geqslant 0} z^n.$$

Aufgrund des Wurzelkriteriums konvergiert sie für $|z| < 1$ und divergiert für $|z| > 1$. Ihr Konvergenzradius ist also $R = 1$. Tatsächlich ist dies die geometrische Reihe zum Faktor z. Es ist also

$$\phi(z) = \sum_{n\geqslant 0} z^n = \frac{1}{1-z}, \qquad |z| < 1,$$

und man spricht von der *Entwicklung* der Funktion $(1-z)^{-1}$ in ihre Potenzreihe am Punkt $a = 0$.

Die Funktion $(1-z)^{-1}$ ist allerdings auf ganz $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ erklärt, und tatsächlich können wir sie auch in jedem anderen Punkt $a \neq 1$ in eine Potenzreihe entwickeln. In diesem Fall ist die Rechnung auch nicht schwer. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-a)-(z-a)} &= \frac{1}{1-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{1-a}} \\ &= \frac{1}{1-a}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{z-a}{1-a}\right)^n = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(1-a)^{n-1}}(z-a)^n.\end{aligned}$$

Diese Reihe hat den Konvergenzradius $R = |a-1|$. Größer kann er nicht sein, da die Reihe ja nicht in einem Punkt konvergieren kann, wo die Funktion $(1-z)^{-1}$ nicht erklärt ist. ◃

6.16

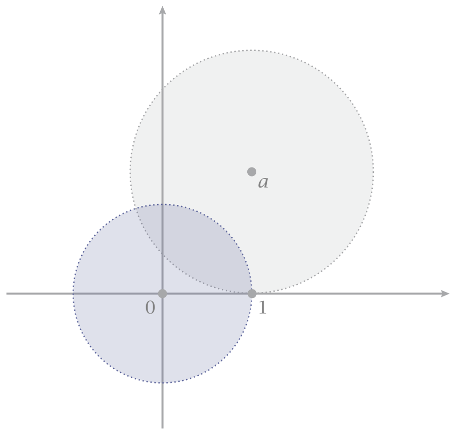


Abb 2

Zwei Konvergenzkreise für $(1 - z)^{-1}$

6.5 Reihen in Banachräumen

Bisher haben wir Reihen mit reellen oder komplexen Gliedern betrachtet. Reihen kann man aber auch aus Elementen eines beliebigen Banachraumes bilden, denn wir benötigen ja nur die Operation der Addition und die Konvergenz der Partialsummen.

Eine *Reihe* in einem Banachraum E ist also ein Ausdruck der Form $\sum_n a_n$ mit Gliedern $a_n \in E$. Die Reihe heißt *konvergent* in E, wenn die Folge ihrer Partialsummen *in E konvergiert*.

Das Cauchykriterium $_2$, das Nullfolgenkriterium $_3$ und der Satz von der absoluten Konvergenz $_5$ *gelten unverändert weiter*, wir müssen lediglich den Betrag durch die Norm von E ersetzen. Dasselbe gilt für das Wurzel- und Quotientenkriterium, welches zum Beispiel wie folgt lautet.

21 **Quotientenkriterium für Banachraumreihen** *Gilt $a_n \neq 0$ für fast alle n und*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} < 1,$$

so konvergieren die Reihen $\sum_n a_n$ und $\sum_n \|a_n\|$ – man sagt, die Reihe ist normal konvergent. Gilt dagegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} > 1,$$

so ist die Reihe divergent. ⋊

Nicht mehr gelten solche Sätze, die auf der Anordnung von $\mathbb{R}$ gründen, die also – wie das Leibnizkriterium – zum Beispiel den Begriff der Monotonie verwenden.

▪ Reihen beschränkter linearer Operatoren

Sei $(E, |\cdot|)$ ein Banachraum, wobei wir die Norm diesmal mit *einem* Strich bezeichnen. Für einen linearen Operator $A\colon E \to E$ sei

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Ax| ,$$

wobei auch der Wert ∞ zugelassen ist. Man nennt A *beschränkt*, falls $\|A\| < \infty$, und bezeichnet mit

$$L(E) = \{A\colon\ E \to E :\ \|A\| < \infty\}$$

den Raum aller beschränkten linearen Operatoren auf E. Für $A \in L(E)$ gilt immer

$$|Ax| \leqslant \|A\| \, |x| , \qquad x \in E. \tag{3}$$

22 **Satz** *Auf $L(E)$ definiert $\|\cdot\|$ eine Norm, die von $|\cdot|$ induzierte Operatornorm. Mit dieser wird $L(E)$ ein Banachraum.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Der Beweis ist nicht schwierig, wir übergehen ihn hier aber. Einen etwas allgemeineren Satz beweisen wir im Kapitel ›Mehrdimensionale Differenziation‹ im zweiten Band ›Etwas mehr Analysis‹. ⟩⟩⟩⟩⟩

▹ *Beispiel* Für $E = \mathbb{R}^n$ ist $L(E)$ der Raum aller linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^n$ in sich selbst. Diesen kann man mit dem Raum aller reellen $n \times n$-Matrizen identifizieren, seine Dimension ist also n^2. Als endlich-dimensionaler normierter Raum ist er vollständig ??. ◃

Operatoren in $L(E)$ können wir *multiplizieren*, indem wir sie hintereinander ausführen. Das Ergebnis ist wieder ein beschränkter Operator, denn für Operatoren $A, B \in L(E)$ gilt

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\| .$$

Denn aus (3) folgt ja

$$|ABx| \leqslant \|A\| \, |Bx| \leqslant \|A\| \, \|B\| \, |x| , \qquad x \in E.$$

$L(E)$ bildet daher eine *Banachalgebra*: in ihr können wir addieren und multiplizieren, und diese Operationen vertragen sich mit der Norm. — Ein erstes Beispiel ist die *Neumannreihe*.

23 **Satz** *Sei $A \in L(E)$. Gilt $\|A\| < 1$, so ist $I - A$ umkehrbar, und es ist*

$$(I-A)^{-1} = \sum_{k \geqslant 0} A^k,$$

genannt die Neumannreihe von A. ⋊

⟪⟪⟪ Für $\|A\| < 1$ ist die rechts stehende Reihe normal konvergent, und

$$(I-A)\Bigl(\sum_{k \geqslant 0} A^k\Bigr) = \sum_{k \geqslant 0} A^k - \sum_{k \geqslant 1} A^k = I.$$

Dasselbe git, wenn die Faktoren vertauscht werden. Also definiert die Neumannreihe die Umkehrabbildung von $I - A$. ⟫⟫⟫

Ein zweites Beispiel ist die *Exponenzialreihe*, die eine zentrale Rolle in der Untersuchung und Beschreibung linearer Differenzial- und Evolutionsgleichungen spielt. Wir kommen darauf im nächsten Band ›Etwas mehr Analysis‹ zurück.

24 **Definition und Satz** *Das Exponenzial von $A \in L(E)$ ist die Reihe*

$$\exp(A) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \,..\;.$$

Diese Reihe ist normal konvergent in $L(E)$, und es gilt

$$\|\exp(A)\| \leqslant \exp(\|A\|).$$ ⋊

⟪⟪⟪ Aus $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$ folgt mit vollständiger Induktion

$$\|A^k\| \leqslant \|A\|^k, \qquad k \geqslant 1.$$

Daher gilt wegen der absoluten Konvergenz der *reellen* Exponenzialreihe

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\|A^k\|}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{\|A\|^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = \exp(\|A\|) < \infty$$

für alle $n \geqslant 1$. Somit konvergiert die Reihe $\exp(A)$ normal in $L(E)$. Die behauptete Ungleichung folgt dann aus

$$\biggl\|\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\biggr\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{\|A^k\|}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = \exp(\|A\|)$$

und Grenzübergang $n \to \infty$. ⟫⟫⟫