7 Stetigkeit

Mit dem Begriff der Stetigkeit verbindet sich die Vorstellung einer Bewegung ohne abrupte Sprünge, oder einer Kurve, die man ›in einem Zug und ohne abzusetzen‹ zeichnen kann.

Natürlich ist dies keine mathematische Definition. So gibt es stetige Kurven, die ein Quadrat vollständig ausfüllen und sich damit jedem Zeichenversuch entziehen. Oder es gibt Funktionen, die in irrationalen Punkten stetig, in rationalen Punkten dagegen unstetig sind.

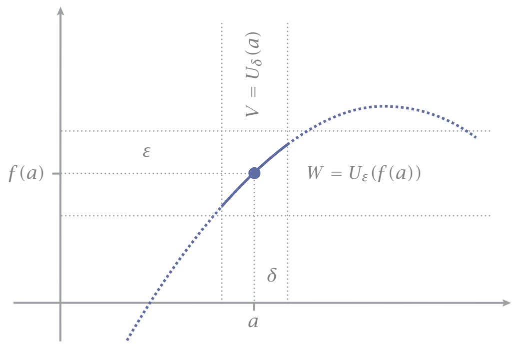
Präziser ist schon folgende Vorstellung. Wenn man sich mit dem Argument einer Funktion einem festen Punkt nähert, so sollten sich auch die zugehörigen Funktionswerte einem festen Wert nähern, und nicht wild herumspringen. Beschreiben wir den Abstand zum festen Punkt durch δ und den Abstand zum festen Wert durch ε, so erhalten wir bereits den Begriff der Stetigkeit in einem Punkt in der heute üblichen ε-δ-Charakterisierung.

Anders als in der naiven Vorstellung ist diese Stetigkeit aber lediglich eine *lokale* Eigenschaft. Sie kommt einem einzelnen Punkt im Definitionsbereich zu und hängt ausschließlich vom Verhalten der Funktion in einer kleinen Umgebung dieses Punktes ab.

Erst die Stetigkeit in *allen* Punkten des Definitionsbereichs kommt der naiven Vorstellung näher. Sie bildet die Grundlage für so fundamentale Sätze wie den Zwischenwertsatz, den Satz über Umkehrfunktionen oder den Satz über Minimum & Maximum.

Abb 1

Im Punkt a stetige Funktion



7.1 Stetige Funktionen und Abbildungen

Wir betrachten zuerst reelle Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$, wobei D eine beliebige Teilmenge der reellen Zahlen bezeichnet. Dafür schreiben wir auch kurz

$$f\colon\ \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}.$$

Typischerweise ist D ein Intervall, aber dies spielt für die folgenden Betrachtungen keine Rolle.

1 **Definition** *Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $a \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass*

$$t \in D \wedge |t - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(t) - f(a)| < \varepsilon. \qquad \rtimes \tag{1}$$

Drücken wir dies mit Umgebungen aus, so ist eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $a \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass f jeden Punkt in $U_\delta(a) \cap D$ auf einen Punkt in $U_\varepsilon(f(a))$ abbildet. Es gilt also

$$t \in U_\delta(a) \cap D \quad \Rightarrow \quad f(t) \in U_\varepsilon(f(a)), \tag{2}$$

oder noch kürzer

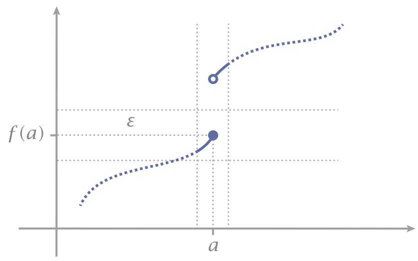
$$f(U_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(a)). \tag{3}$$

Für den Graphen von f bedeutet dies, dass es zu jedem horizontalen ε-Streifen W um den Bildpunkt $f(a)$ einen vertikalen δ-Streifen V um den Urbildpunkt a gibt, so dass der Graph von f über $V \cap D$ ganz in W enthalten ist $_{\text{Abb 1}}$.

Man beachte, dass nur solche $t \in U_\delta(a)$ betrachtet werden, die auch zum Definitionsbereich D von f gehören. Es wird nicht vorausgesetzt, dass f auf der gesamten δ-Umgebung von a definiert ist.

Abb 2

Im Punkt a unstetige Funktion



Beispiele A. Eine konstante Funktion $t \mapsto c$ ist in jedem Punkt stetig.

B. Eine lineare Funktion $t \mapsto mt + b$ ist in jedem Punkt stetig. Denn zu $\varepsilon > 0$ wähle

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1 + |m|}.$$

Für $|t - a| < \delta$ gilt dann

$$|(mt + b) - (ma + b)| \leqslant |m|\,|t - a| < |m|\,\delta < \varepsilon.$$

Dieses δ können wir unabhängig vom Punkt t wählen.

C. Für die Parabel $t \mapsto t^2$ gilt aufgrund der zweiten binomischen Formel

$$|t^2 - a^2| = |t - a|\,|t + a|\,.$$

In einer kleinen Umgebung von a ist $|t + a| < 1 + |a|$. Wählen wir also

$$|t - a| < \delta = \frac{\varepsilon}{1 + |a|}$$

für alle $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so wird

$$|t^2 - a^2| < \delta\,|t + a| < \varepsilon.$$

In diesem Fall hängt δ sowohl von ε als auch von a ab. ◂

Definition *Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ heißt unstetig im Punkt $a \in D$, wenn sie dort nicht stetig ist.* ⋊

Somit ist f im Punkt a *unstetig*, wenn es *ein* $\varepsilon > 0$ gibt, so dass in *jeder* δ-Umgebung von a *wenigstens ein* Punkt $t \in D$ existiert, so dass

$$f(t) \notin U_\varepsilon(f(a)).$$

Stetigkeit in einem Punkt ist eine *lokale Eigenschaft*. Das heißt, sie hängt nur vom Verhalten der Funktion in einer hinreichend kleinen Umgebung dieses Punktes ab. Mehr noch, man kann von der Stetigkeit in einem Punkt a *nicht* auf

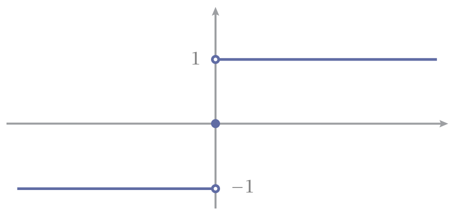


Abb 3
Signumfunktion

die Stetigkeit in einem anderen Punkt b schließen, auch wenn er noch so nahe bei a liegt. Ein Beispiel hierfür ist die Thomaefunktion A-12.

Nun noch die *globale* Stetigkeit.

Definition *Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig auf D, oder kurz stetig, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist.* ⋊

Umgekehrt ist f auf D *unstetig*, wenn sie in wenigstens *einem* Punkt von D unstetig ist. *Ein* unstetiger Punkt genügt also, um die Stetigkeit auf ganz D zu ruinieren.

2 ▷ A. Die Betragsfunktion $t \mapsto |t|$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig.

B. Die *Vorzeichen-* oder *Signumfunktion*

$$\operatorname{sgn}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

ist in 0 unstetig und in allen anderen Punkten stetig.

C. Die Gaußklammer $t \mapsto [t]$ ist in jedem Punkt $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig und in jedem Punkt $a \in \mathbb{Z}$ unstetig.

D. Die *Dirichletfunktion*

$$\delta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \delta(t) = \begin{cases} 1, & t \in \mathbb{Q} \\ 0, & t \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in keinem Punkt stetig.

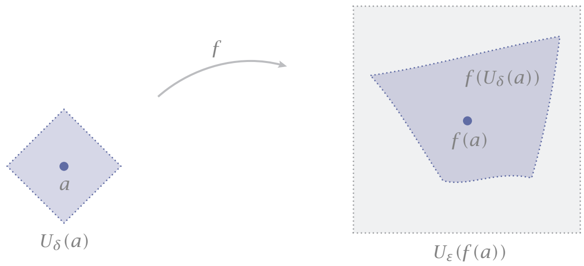
E. Ist $f: D \to \mathbb{R}$ stetig, so ist auch die Einschränkung von f auf eine beliebige Teilmenge von D stetig. Für die Stetigkeit ist es daher unerheblich, ob die Definitionsmenge D eine ›schöne‹ Menge ist. ◁

■ Stetige Abbildungen

Der Begriff der Stetigkeit ist nicht nur für reellwertige Funktionen auf der reellen Geraden erklärt. Er ist auch sinnvoll für Abbildungen zwischen Räumen,

Abb 4

Im Punkt a stetige Abbildung



in denen in irgendeiner Weise ein Abstand definiert ist. Als erste Verallgemeinerung in diese Richtung definieren wir nun Stetigkeit für Abbildungen zwischen *normierten Vektorräumen*. Für den Anfang kann man sich darunter den $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ mit der euklidischen Norm vorstellen.

Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Vektorräume und

$$f: E \supset D \to F$$

eine Abbildung, wobei D eine beliebige Teilmenge von E sein darf. Die Stetigkeitsdefinition 1 überträgt sich auf diese Situation, wenn wir den reellen Betrag durch die entsprechenden Normen ersetzen.

Definition *Eine Abbildung $f: E \supset D \to F$ heißt stetig im Punkt $a \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass*

$$x \in D \wedge \|x - a\|_E < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon. \quad \rtimes$$

Um dies wie in (2) und (3) durch Umgebungen auszudrücken, sei

$$U_\delta(a) := \{x \in E : \|x - a\|_E < \delta\},$$
$$U_\varepsilon(b) := \{y \in F : \|y - b\|_F < \varepsilon\}.$$

Dann erhalten wir folgende

Äquivalente Definition *Eine Abbildung $f: E \supset D \to F$ heißt stetig in $a \in D$, wenn zu jeder ε-Umgebung um $f(a)$ eine δ-Umgebung um a existiert, so dass*

$$f(U_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(a)). \quad \rtimes$$

Für $D \subset \mathbb{R}$ und $F = \mathbb{R}$ erhalten wir wieder unsere Definition für reelle Funktionen 1. — Globale Stetigkeit ist wie zuvor erklärt:

Definition *Eine Abbildung $f: E \supset D \to F$ heißt stetig auf D, oder kurz stetig, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist.* $\rtimes$

■ Das Folgenkriterium

Der nächste Satz charakterisiert Stetigkeit mithilfe von Folgen. Dies erlaubt uns, Stetigkeitssätze aus entsprechenden Sätzen über Folgen zu erhalten.

3 **Folgenkriterium** *Eine Abbildung* $f : E \supset D \to F$ *ist stetig im Punkt* $a \in D$ *genau dann, wenn für jede Folge* (x_n) *in* D *gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a). \quad \rtimes$$

Wichtig: Dies muss für *jede* Folge in D mit Grenzwert a gelten, nicht nur für eine, die einem gerade gut passt.

⟨⟨⟨⟨⟨ $\Rightarrow$ Sei f stetig in a und (x_n) eine beliebige gegen a konvergierende Folge in D. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert dazu ein $\delta > 0$, so dass

$$\|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon, \qquad x \in U_\delta(a) \cap D.$$

Wegen $x_n \to a$ existiert zu diesem $\delta > 0$ ein $N \geqslant 1$, so dass

$$\|x_n - a\|_E < \delta, \qquad n \geqslant N.$$

Da alle x_n in D liegen, gilt auch $x_n \in U_\delta(a) \cap D$ für $n \geqslant N$, und wir erhalten

$$\|f(x_n) - f(a)\|_F < \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Da für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches $N \geqslant 1$ existiert, gilt $f(x_n) \to f(a)$.

$\Leftarrow$ Wir zeigen die Kontraposition. Angenommen, f ist *nicht* stetig in a. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n \geqslant 1$ einen Punkt $x_n \in U_{1/n}(a) \cap D$ mit

$$\|f(x_n) - f(a)\|_F \geqslant \varepsilon.$$

Wir erhalten eine Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$, aber $f(x_n) \nrightarrow f(a)$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Die Negation des Folgenkriteriums 3 ergibt ein handliches

4 **Unstetigkeitskriterium** *Gibt es wenigstens eine Folge* (x_n) *in* D *mit* $x_n \to a$, *aber* $f(x_n) \nrightarrow f(a)$, *so ist* f *im Punkt* a *unstetig.* $\rtimes$

▷ *Beispiele* A. Die Gaußklammer ist unstetig in jedem Punkt $m \in \mathbb{Z}$, denn

$$\lim_{n\to\infty} [m - 1/n] = m - 1 \neq [m] = m.$$

B. Die Signumfunktion ist unstetig im Punkt 0, denn

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(-1/n) = -1, \qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(1/n) = 1,$$

aber $\operatorname{sgn}(0) = 0$. ◁

Nun noch die globale Version des Folgenkriteriums. Der Beweis sei als Übung überlassen A-5.

5 **Satz** *Eine Abbildung $f\colon E \supset D \to F$ ist stetig auf ganz D, wenn sie jede konvergente Folge in D in eine konvergente Folge in F abbildet.* ⋊

Ist also f auf D stetig und konvergiert die Folge (x_n) in D, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

Bei stetigen Funktionen darf man also ›lim‹ und ›f‹ vertauschen.

Stetigkeitssätze

Wie bei der Konvergenz von Folgen fragen wir nun, wie sich Stetigkeit mit Körper- und Vektorraumoperationen verträgt. Zuerst betrachten wir reellwertige Funktionen auf einer beliebigen Teilmenge D eines normierten Vektorraums E und die Körperoperationen in $\mathbb{R}$.

6 **Satz** *Sind die Funktionen $f, g\colon E \supset D \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $a \in D$, so sind es auch die Funktionen $f + g$, fg sowie f/g, falls $g(a) \neq 0$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Betrachte zum Beispiel f/g. Ist (x_n) eine beliebige Folge in D mit Grenzwert a, so gilt aufgrund der Stetigkeit von f und g $_3$

$$f(x_n) \to f(a), \qquad g(x_n) \to g(a).$$

Wegen $g(a) \neq 0$ gilt dann auch $_{5.7}$ $f(x_n)/g(x_n) \to f(a)/g(a)$. Das ist gleichbedeutend mit

$$(f/g)(x_n) \to (f/g)(a).$$

Da dies für jede solche Folge gilt, ist f/g in a stetig $_3$. Alles Übrige beweist man genauso. ⟩⟩⟩⟩⟩

7 **Korollar** *Sind die Funktionen $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ stetig auf D, so sind es auch die Funktionen $f + g$, fg sowie f/g, falls $g \neq 0$ auf ganz D.* ⋊

Bemerkung Aufgrund dieses Satzes bildet der Raum

$$C(D) \coloneqq \{f : D \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig auf } D\}$$

einen reellen linearen Vektorraum. Da auch das Produkt zweier Elemente in ihm erklärt ist, ist er sogar eine Algebra. ⊸

▹ *Beispiel* Aus der Stetigkeit der konstanten Funktionen und der Identitätsfunktion folgt $_{6}$ die Stetigkeit aller *Polynome*, also Funktionen $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Gestalt

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + .. + a_1 t + a_0$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, .., a_n$. ◃

Für Abbildungen in einen beliebigen normierten Vektorraum F sind lediglich Linearkombinationen erklärt. Der entsprechende Satz lautet hier $_{5.37}$:

8 **Satz** *Sind die Abbildungen $f, g\colon E \supset D \to F$ stetig im Punkt $a \in D$, so ist es auch jede Linearkombination $\lambda f + \mu g\colon D \to F$. Entsprechendes gilt für die Stetigkeit auf ganz D.* ⋊

Wir betrachten nun die Komposition zweier stetiger Abbildungen. Vorausgesetzt wird dabei natürlich, dass diese Komposition wohldefiniert ist.

9 **Satz** *Die Komposition $g \circ f$ sei auf D wohldefiniert. Ist f stetig im Punkt $a \in D$ und g stetig im Punkt $f(a)$, so ist auch $g \circ f$ stetig im Punkt a.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei (x_n) eine konvergente Folge in D mit $x_n \to a$. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt dann $f(x_n) \to f(a)$ $_{3}$. Dann gilt auch $g(f(x_n)) \to g(f(a))$ wegen der Stetigkeit von g im Punkt $f(a)$ $_{3}$. Somit gilt auch

$$(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(a).$$

Da dies für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$ gilt, ist $g \circ f$ im Punkt a stetig. ⟩⟩⟩⟩⟩

10 **Korollar** *Ist f stetig auf D und g stetig auf einer Obermenge von $f(D)$, so ist auch $g \circ f$ stetig auf D.* ⋊

▹ Die Funktion

$$t \mapsto \sqrt{1 + t^2}$$

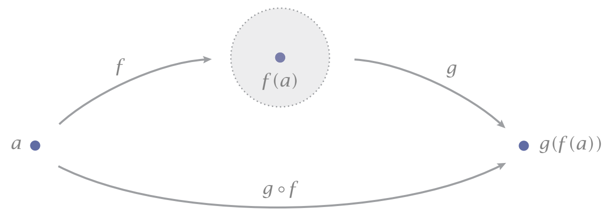
ist auf $\mathbb{R}$ stetig. Denn das Polynom $1 + t^2$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig und nichtnegativ, und die Wurzel ist auf $[0, \infty)$ ebenfalls stetig, wie wir in Abschnitt 2 sehen werden. ◃

▪ Lipschitzstetige Abbildungen

Eine wichtige und sehr handliche Klasse stetiger Abbildungen bilden die *lipschitzstetigen* Abbildungen.

Abb 5

Komposition von f und g



Definition *Eine Abbildung $f : E \supset D \to F$ heißt lipschitzstetig auf D, wenn es eine Konstante $L \geqslant 0$ gibt, genannt Lipschitzkonstante, so dass*

$$\|f(u) - f(v)\|_F \leqslant L\,\|u - v\|_E\,, \qquad u, v \in D.$$

Eine solche Funktion mit Lipschitzkonstante L heißt auch L-lipschitz. ⋊

Bemerkungen *a.* Mit L ist auch jede reelle Zahl $L' \geqslant L$ eine Lipschitzkonstante.

b. Ist f lipschitz auf D, so ist

$$L_* = \sup_{\substack{u \neq v \\ u, v \in D}} \frac{\|f(u) - f(v)\|_F}{\|u - v\|_E} < \infty,$$

und dies ist auch die kleinstmögliche Lipschitzkonstante auf D A-17.

c. Lipschitzstetige Funktionen heißen auch *dehnungsbeschränkt*, was diese Eigenschaft recht anschaulich beschreibt. ⊸

Die Berechtigung der Bezeichnung ergibt sich aus dem nächsten Lemma.

11 **Lemma** *Jede lipschitzstetige Funktion ist stetig.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei f L-lipschitz. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle man $\delta = \varepsilon/(L+1) > 0$. Für alle u, v im Definitionsbereich von f mit $\|u - v\|_E < \delta$ gilt dann

$$\|f(u) - f(v)\|_F \leqslant L\,\|u - v\|_E < L\delta = \frac{L}{L+1}\,\varepsilon < \varepsilon.$$

Da δ unabhängig vom betrachteten Punkt ist, folgt daraus die Stetigkeit von f auf dem gesamten Definitionsbereich. ⟩⟩⟩⟩⟩

⊳ A. Auf jedem normierten Raum sind konstante Funktionen 0-lipschitz, und die Identität ist 1-lipschitz.

B. Auf jedem normierten Raum ist die Norm $\|\cdot\|$ 1-lipschitz, denn dies ist gerade die umgekehrte Dreiecksungleichung,

$$\big|\,\|u\| - \|v\|\,\big| \leqslant \|u - v\|\,.$$

Insbesondere ist die Betragsfunktion $|\cdot|$ 1-lipschitz auf $\mathbb{R}$.

c. Auf $\mathbb{C}$ sind die Abbildungen

$$z \mapsto \Re z, \qquad z \mapsto \Im z, \qquad z \mapsto \overline{z}$$

sämtlich 1-lipschitz. Zum Beispiel ist

$$|\Im z - \Im w| = \left| \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}} - \frac{w - \overline{w}}{2\mathrm{i}} \right| \leqslant \frac{|z - w| + |\overline{z} - \overline{w}|}{2} = |z - w| .$$

d. Die Parabel $t \mapsto t^2$ ist auf $\mathbb{R}$ *nicht* lipschitz, denn für $u > v = 0$ ist

$$\frac{|u^2 - v^2|}{|u - v|} = \frac{|u^2|}{|u|} = |u|$$

nicht beschränkt. Sie ist aber lipschitz auf jedem beschränkten Intervall A-15 .

7.2 Stetige Funktionen auf Intervallen

Wir betrachten nun einige fundamentale Eigenschaften stetiger reellwertiger Funktionen auf einem *Intervall*, also Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Dazu zählen der Zwischenwertsatz 14 , der Satz über Umkehrfunktionen 18 , und der Satz vom Minimum & Maximum 16 . — Zuerst die Zwischenwertsätze.

12 **Zwischenwertsatz von Bolzano** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \neq f(b)$. Dann existiert zu jeder reellen Zahl w zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens ein Punkt $c \in (a,b)$ mit $f(c) = w$.*

Bemerkung Der Zwischenwertsatz gilt offensichtlich *nicht*, wenn f *nicht stetig* oder der Definitionsbereich *kein Intervall* ist – siehe Abbildung 7.

Wir können annehmen, dass $f(a) < w < f(b)$. Andernfalls gehen wir zur Funktion $-f$ und dem Zwischenwert $-w$ über und wenden den folgenden Beweis darauf an.

Betrachte die Menge

$$A \coloneqq \{t \in [a,b] : f(t) < w\} \subset [a,b] .$$

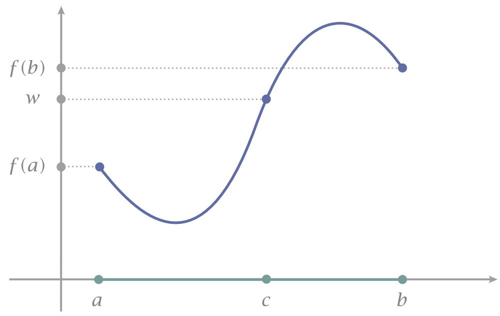
Diese Menge ist nicht leer, denn $a \in A$. Außerdem ist sie beschränkt. Somit existiert $c = \sup A$, und offensichtlich ist $c \in [a,b]$. Wir zeigen, dass $f(c) = w$.

Aufgrund des Approximationssatzes 5.28 existiert eine Folge (t_n) in A mit $\lim_{n\to\infty} t_n = c$. Mit der Stetigkeit von f und $f(t_n) < w$ für alle n folgt 5.9

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(c) \leqslant w .$$

Abb 6

Zwischenwertsatz von Bolzano



Wegen $w < f(b)$ ist $c \neq b$ und somit $c < b$. Wäre nun $f(c) < w$, so wäre f aus Stetigkeitsgründen auch in einer kleinen, ganz in $[a,b]$ enthaltenen Umgebung von c kleiner als w. Es gäbe also ein $d \in [a,b]$ mit

$$c < d < b, \qquad f(d) < w.$$

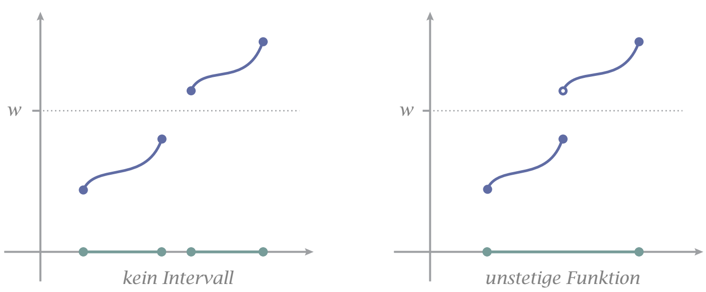
Dann aber wäre $d \in A$, im Widerspruch zur Definition von c als dem Supremum von A. Also gilt nicht $f(c) < w$, sondern $f(c) = w$. ⟫⟫⟫

Ein wichtiger Spezialfall des Zwischenwertsatzes liefert die Existenz einer *Nullstelle* einer Funktion, also eines Punktes x mit $f(x) = 0$.

13 **Nullstellensatz** *Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a)f(b) < 0$, so besitzt f in (a,b) mindestens eine Nullstelle.* ⋊

⟪⟪⟪ Entweder ist $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(a) > 0 > f(b)$. In beiden Fällen können wir den Satz von Bolzano 12 mit $w = 0$ anwenden. ⟫⟫⟫

Abb 7 Zwischenwertsatz von Bolzano nicht anwendbar



Beispiel Jedes reelle Polynom p ungeraden Grades,

$$p(t) = t^{2n+1} + a_{2n}t^{2n} + .. + a_1 t + a_0,$$

besitzt mindestens eine reelle Nullstelle. Denn ein solches Polynom definiert eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$, die für hinreichend große t positiv und hinreichend kleine t negativ wird. Die Existenz einer Nullstelle folgt damit aus dem Nullstellensatz $_{13}$.

Dies gilt natürlich nicht für Polynome geraden Grades. Das Polynom $t^2 + 1$ beispielsweise besitzt keine reelle Nullstelle. ◂

Der Zwischenwertsatz von Bolzano lässt sich noch verallgemeiner formulieren. Sei dazu

$$\sup_I f \coloneqq \sup f(I) = \sup\{f(t) : t \in I\},$$

und analog $\inf_I f$. Diese dürfen auch den Wert ∞ respektive $-\infty$ annehmen.

14 **Allgemeiner Zwischenwertsatz** *Sei I ein beliebiges Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $\inf_I f$ und $\sup_I f$ mindestens einmal an.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $\inf_I f < w < \sup_I f$. Dann gibt es aufgrund des Approximationssatzes $_{2.12}$ Punkte $a \in I$ und $b \in I$ mit $f(a) < w < f(b)$. Wenden wir den Satz von Bolzano $_{12}$ auf die Einschränkung von f auf das abgeschlossene Intervall mit den Endpunkten a und b an, so erhalten wir die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Alle drei Zwischenwertsätze sind tatsächlich *äquivalent:* aus jedem lassen sich die beiden anderen ableiten $_{\text{A-9}}$. ⊸

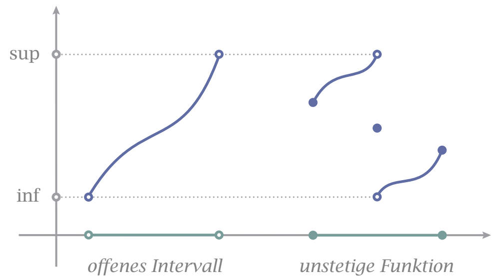
Geometrisch betrachtet ist der allgemeine Zwischenwertsatz äquivalent zu folgender Formulierung.

15 **Intervallabbildungssatz** *Stetige Bilder von Intervallen sind wieder Intervalle. Das heißt, ist I ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(I)$ ebenfalls ein Intervall.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Besteht $f(I)$ nur aus einem Punkt, so sind wir fertig. Gehören zwei Punkte $u < v$ zu $f(I)$, so nimmt f also die Werte u und v an. Dann nimmt f aufgrund des Zwischenwertsatzes $_{14}$ auf I auch jeden dazwischen liegenden Wert an. Es gilt also auch $[u, v] \subset f(I)$. Somit enthält $f(I)$ mit je zwei Punkten auch alle dazwischen liegenden Punkte. *Per definitionem* ist $f(I)$ damit ein Intervall. ⟩⟩⟩⟩⟩

Abb 8

Kein Minimum oder Maximum



▪ Minimum & Maximum

Für eine beliebige Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ existiert immer $\sup_I f$ auf der erweiterten Zahlengeraden. Dies kann auch den Wert ∞ annehmen. Es muss auch keinen Punkt in I geben, an dem f diesen Wert annimmt, auch wenn f beschränkt ist. Einfache Beispiele sind in Abbildung 8 skizziert.

Gibt es dagegen einen Punkt $c \in I$ mit $f(c) = \sup_I f$, so spricht man von einem *Maximum* und sagt, f *nimmt sein Supremum im Punkt* c *an* [1]. Man schreibt

$$\sup_I f = \max_I f = f(c)$$

und nennt c selbst eine *Maximalstelle* von f. Ein Maximum ist in jedem Fall endlich. Entsprechend sind das *Minimum* $\min_I f$ und eine *Minimalstelle* erklärt.

16 **Satz vom Minimum & Maximum** *Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existieren Punkte $u, v \in [a,b]$ mit*

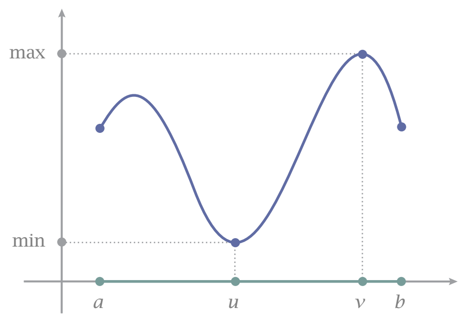
$$f(u) \leqslant f(t) \leqslant f(v), \qquad t \in [a,b].$$

Insbesondere gilt also

[1] Gebräuchlicher ist die nicht ganz korrekte Formulierung, f nehme sein *Maximum* an.

Abb 9

Satz vom Minimum & Maximum



$$f(u) = \inf_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f, \qquad f(v) = \sup_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f. \quad \rtimes$$

Eine *stetige* Funktion auf einem *abgeschlossenen* Intervall nimmt also immer ihre Extrema an. Dies gilt im Allgemeinen *nicht*, wenn das Intervall nicht abgeschlossen oder die Funktion nicht stetig ist $_{\text{Abb 8}}$.

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $m \coloneqq \inf_{[a,b]} f$, wobei im Moment auch $-\infty$ zugelassen ist. Aufgrund des erweiterten Approximationssatzes $_{5.28}$ existiert eine Folge (t_n) in $[a,b]$ mit $f(t_n) \to m$. Da diese Folge beschränkt ist, besitzt sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß $_{5.17}$ eine konvergente Teilfolge (t_{n_k}) mit Grenzwert u. Da $a \leqslant t_n \leqslant b$ für alle n, ist auch $a \leqslant u \leqslant b$. Es gilt also

$$\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = u \in [a,b].$$

Aufgrund der Stetigkeit von f ist

$$\lim_{k\to\infty} f(t_{n_k}) = f(u).$$

Da aber $f(t_{n_k})$ Teilfolge der konvergenten Folge $f(t_n)$ ist, erhalten wir insgesamt

$$f(u) = \lim_{k\to\infty} f(t_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(t_n) = m = \inf_{[a,b]} f.$$

Insbesondere ist m *endlich.* – Entsprechend für das Supremum. ⟩⟩⟩⟩⟩

Damit erhalten wir auch eine Verbesserung des Intervallabbildungssatzes $_{15}$ für abgeschlossene Intervalle.

17 **Korollar** *Eine stetige reelle Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ist beschränkt und bildet dieses auf ein abgeschlossenes Intervall ab.* $\rtimes$

Für die anderen Intervalltypen gilt dieses Korollar nicht. Eine stetige Funktion kann auf einem offenen Intervall unbeschränkt sein, oder das Bild kann ein abgeschlossenes Intervall sein.

▪ Umkehrfunktionen

Wir betrachten nun eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die außerdem *injektiv* ist. Aufgrund des Intervallabbildungssatzes $_{15}$ ist $J = f(I)$ ebenfalls ein Intervall, und aufgrund der Injektivität existiert die Umkehrfunktion f^{-1} auf J. Diese Funktion ist ebenfalls stetig:

18 **Satz über stetige Umkehrfunktionen** *Sei I ein Intervall. Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv, so ist auch $f^{-1} : J \to I$ mit $J = f(I)$ stetig.* $\rtimes$

Da Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, können wir $I = [a,b]$ annehmen. In diesem Fall ist auch J ein abgeschlossenes Intervall [17]. Sei nun (s_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert s in J, und (t_n) die Folge ihrer Bilder unter f^{-1} in $I = [a,b]$. Aufgrund des Satzes von Bolzano-Weierstrass besitzt diese Folge eine konvergente Teilfolge (t'_n). Für deren Grenzwert t gilt dann, aufgrund der Stetigkeit von f,

$$f(t) = \lim f(t'_n) = \lim s'_n = s,$$

denn jede Teilfolge von (s_n) hat ja denselben Grenzwert s. Also ist

$$t = f^{-1}(s).$$

Das aber bedeutet, dass *jede* konvergente Teilfolge von (t_n) denselben Grenzwert t hat. Da die Folge selbst beschränkt ist, ist sie damit auch konvergent [A-5.20], und wir erhalten

$$\lim f^{-1}(s_n) = f^{-1}(s).$$

Also ist f^{-1} stetig im Punkt s. Da s beliebig war, ist f^{-1} stetig auf J.

Für stetige Funktionen auf einem beliebigen Definitionsbereich kann es recht schwierig sein, ihre Injektivität festzustellen. Auf Intervallen reduziert sich das Problem allerdings auf die einfache Frage, ob f streng monoton ist.

19 **Definition** *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ heißt monoton steigend, falls*

$$u < v \quad \Rightarrow \quad f(u) \leqslant f(v)$$

für alle $u, v \in D$. Sie heißt streng monoton steigend, falls sogar

$$u < v \quad \Rightarrow \quad f(u) < f(v)$$

für alle $u, v \in D$. Analog sind monoton fallend und streng monoton fallend definiert. Schließlich heißt eine Funktion (streng) monoton, wenn sie (streng) monoton steigt oder fällt.

A. Jede konstante Funktionen $t \mapsto c$ ist auf $\mathbb{R}$ monoton steigend *und* monoton fallend, aber natürlich nicht streng monoton.

B. Die Identitätsfunktion $t \mapsto t$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton steigend.

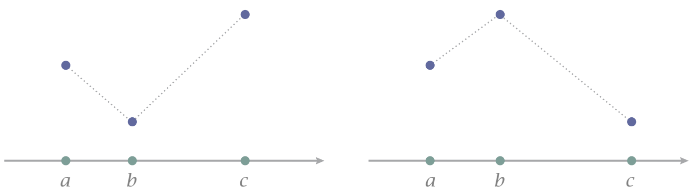
C. Die Parabel $t \mapsto t^2$ ist auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und auf $[0, \infty)$ streng monoton steigend.

D. Die Cosinusfunktion [9.3] ist auf den abgeschlossenen Intervallen

$$I_n^- = [(2n-1)\pi, 2n\pi], \qquad I_n^+ = [2n\pi, (2n+1)\pi], \qquad n \in \mathbb{Z},$$

streng monoton steigend respektive streng monoton fallend.

Abb 10 Zum Beweis des Lemmas



20 **Lemma** *Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f injektiv genau dann, wenn f streng monoton ist.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ $\Leftarrow$ Das ist klar.

$\Rightarrow$ Angenommen, f ist nicht streng monoton. Dann muss es in I je ein Segment geben, auf dem f steigt respektive fällt. Dann gibt es aber auch drei Punkte $a < b < c$ in I, so dass

$$f(a) > f(b) < f(c) \qquad \text{oder} \qquad f(a) < f(b) > f(c).$$

In jedem Fall folgt aus dem Zwischenwertsatz die Existenz von mindestens zwei Punkten in I, an denen f denselben Wert annimmt, also nicht injektiv ist. ⟩⟩⟩⟩⟩

Als erste Anwendung erhalten wir – *endlich* – die Existenz der n-ten Wurzel als stetige Funktion auf der Halbgeraden $[0, \infty)$.

21 **Wurzelsatz** *Für jedes $n \geqslant 2$ besitzt die Funktion $t \mapsto t^n$ auf $[0, \infty)$ eine streng monoton steigende, stetige Umkehrfunktion*

$$[0, \infty) \to [0, \infty), \quad t \mapsto \sqrt[n]{t},$$

genannt die n-te Wurzelfunktion. ⋊

7.3 Funktionsgrenzwerte

Ist eine Funktion f in einem Punkt a ihres Definitionsbereichs stetig, so ist

$$f(a) = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$$

für jede Folge (x_n) im Definitionsbereich von f, die gegen a konvergiert [3]. Ein solcher Grenzwert kann aber auch dann existieren, wenn f im Punkt a gar nicht definiert oder dort unstetig ist.

▹ *Beispiel* Es ist [3.13]

$$\frac{t^3-1}{t-1} = t^2+t+1.$$

Die links stehende Funktion ist bei $t=1$ nicht definiert, die rechts stehende dagegen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Man kann daher erwarten, dass

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t-1} = 3.$$ ◃

Wir wollen solche Grenzwerte unabhängig von einem eventuell vorliegenden Funktionswert definieren, und das auch in solchen Punkten, wo die Funktion nur in einer Umgebung, aber nicht im Punkt selbst definiert ist. Dazu benötigen wir den Begriff des *Häufungspunktes* einer Menge.

Definition *Sei E ein normierter Vektorraum und $D \subset E$. Ein Punkt $a \in E$ heißt Häufungspunkt von D, wenn in jeder Umgebung von a unendlich viele Punkte von D liegen.* ⋊

▹ A. Eine endliche Menge besitzt *keine* Häufungspunkte.

B. Die Menge $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ besitzt 0 als einzigen Häufungspunkt.

C. Die Menge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ besitzt jede reelle Zahl als Häufungspunkt.

D. Ist die Zahlenfolge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergent mit Grenzwert a und sind unendlich viele Folgenglieder verschieden, so ist a der einzige Häufungspunkt der Menge $A = \{a_n : n \geqslant 1\}$. Gibt es dagegegen nur endlich viele verschiedene Folgenglieder, so ist A endlich und hat keinen Häufungspunkt. ◃

Definition *Sei $f : E \supset D \to F$ eine Abbildung und a ein Häufungspunkt von D. Dann heißt $w \in F$ der Grenzwert von f im Punkt a, geschrieben*

$$\lim_{x\to a} f(x) = w,$$

wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$f(\dot U_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(w), \tag{4}$$

wobei

$$\dot U_\delta(a) \coloneqq U_\delta(a) \setminus \{a\} = \{x \in E : 0 < \|x-a\|_E < \delta\}$$

die punktierte δ-Umgebung des Punktes $a \in E$ bezeichnet. ⋊

Die Bedingung (4) ähnelt der Stetigkeitsbedingung in (3), nur wird hier die Funktion f an der Stelle a *nicht* ausgewertet. Sie muss daher auch nicht in a definiert sein. Andererseits ist für einen Häufunspunkt a die Menge $\dot U_\delta(a) \cap D$ für alle $\delta > 0$ nicht leer. Andernfalls wäre Bedingung (4) automatisch erfüllt.

22 **Folgenkriterium für Funktionsgrenzwerte** *Sei $f\colon E \supset D \to F$ und a ein Häufungspunkt von D. Dann gilt*

$$\lim_{x\to a} f(x) = w$$

genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = w$$

für jede gegen a konvergierende Folge (x_n) in $D\setminus\{a\}$. ⋊

⟪⟪⟪ Der Beweis ist praktisch identisch mit dem Beweis des Folgenkriteriums für Stetigkeit in einem Punkt $_3$. Wir wiederholen ihn hier der Einfachheit halber.

⇒ Gilt $\lim_{x\to a} f(x) = w$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass (4) gilt. Ist (x_n) eine Folge in $D\setminus\{a\}$ mit Grenzwert a, so existiert zu diesem δ wiederum ein $N \geqslant 1$, so dass $x_n \in U_\delta(a)$ für alle $n \geqslant N$. Es gilt sogar

$$x_n \in \dot{U}_\delta(a) \cap D, \qquad n \geqslant N.$$

da die Folgenglieder ja in $D\setminus\{a\}$ liegen. Also gilt

$$f(x_n) \in U_\varepsilon(w), \qquad n \geqslant N.$$

Da für jedes $\varepsilon > 0$ solch ein N existiert, gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = w$.

⇐ Angenommen, es gilt *nicht* $\lim_{x\to a} f(x) = w$. Da *jede* punktierte Umgebung von a Punkte aus D enthält, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass in jeder punktierten $1/n$-Umgebung von a ein $x_n \in D$ existiert mit

$$f(x_n) \notin U_\varepsilon(w).$$

Diese x_n bilden eine konvergente Folge in $D\setminus\{a\}$ mit Grenzwert a, für die $f(x_n)$ sicher *nicht* gegen w konvergiert. Wir erhalten damit einen Widerspruch. ⟫⟫⟫

Aus diesem Kriterium ergibt sich die folgende Charakterisierung der Stetigkeit, die oft auch als deren Definition dient.

23 **Korollar** *Sei $D \subset E$ und $a \in D$ Häufungspunkt von D. Dann ist $f\colon D \to F$ stetig in a genau dann, wenn $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.* ⋊

Bemerkung Jeder Punkt einer Menge D ist entweder ein Häufungspunkt oder ein *isolierter Punkt* von D. In letzterem Fall existiert also eine Umgebung von a, die keine weiteren Punkte von D enthält. In einem isolierten Punkt ist *jede Funktion* stetig $_{\text{A-4}}$. ⊸

Mit dem Folgenkriterium $_{22}$ erhalten wir Grenzwertsätze für Funktionen aus den Grenzwertsätzen für Folgen $_{5.7}$. Der Beweis der folgenden Ergebnisse ist als Übung überlassen.

24 **Grenzwertsätze** *Sei a ein Häufungspunkt von D. Besitzen die Funktionen $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ im Punkt a die Grenzwerte*

$$\lim_{x \to a} f(x) = u, \qquad \lim_{x \to a} g(x) = v,$$

so gilt auch

(i) $\lim_{x \to a} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda u + \mu v$,

(ii) $\lim_{x \to a} (fg)(x) = uv$,

(iii) $\lim_{x \to a} (f/g)(x) = u/v$, *falls* $v \neq 0$. ⋊

25 ▷ A. Da die Sinusfunktion beschränkt ist, gilt $\lim_{t \to 0} t \sin t^{-1} = 0$.

B. Die Funktion $t \mapsto \sin t^{-1}$ dagegen hat in 0 keinen Grenzwert.

C. Die Dirichletfunktion $_2$ δ besitzt in keinem einzigen Punkt der reellen Gerade einen Grenzwert.

D. Identität (i) gilt übrigens auch für Abbildungen in einen beliebigen Banachraum F. ◁

▪ Einseitige Grenzwerte

Auf der reellen Geraden kann man noch unterscheiden, ob man sich einem Punkt von links oder von rechts nähert. Für eine Funktion $f \colon I \to F$ mit $I \subset \mathbb{R}$ erklärt man deshalb noch den *linksseitigen Grenzwert*

$$f_{-}(a) \coloneqq \lim_{x \nearrow a} f(x) \coloneqq \lim_{x \to a} (f \mid I_a^-)(x), \qquad I_a^- \coloneqq I \cap (-\infty, a),$$

und den *rechtsseitigen Grenzwert*

$$f_{+}(a) \coloneqq \lim_{x \searrow a} f(x) \coloneqq \lim_{x \to a} (f \mid I_a^+)(x), \qquad I_a^+ \coloneqq I \cap (a, \infty),$$

vorausgesetzt, a ist ein Häufungswert von I_a^- respektive I_a^+. Man betrachtet also nur Argumente links oder rechts des Punktes a. Andere für diese Grenzwerte übliche Bezeichnungen sind $f(a-)$ und $f(a+)$.

▷ A. Für die Wurzelfunktion gilt $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = \lim_{x \searrow 0} \sqrt{x} = 0$.

B. Für die Gaußklammer oder Ganzzahlfunktion $_{3.18}$ $[\cdot] \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt in jedem Punkt $m \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \searrow m} [x] = m = [m], \qquad \lim_{x \nearrow m} [x] = m - 1.$$

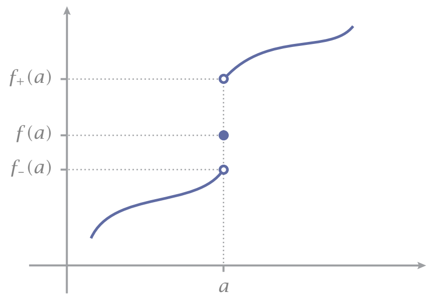
Man sagt dazu auch, $[\cdot]$ ist in m *rechtsseitig stetig*.

C. Die Funktion $t \mapsto \sin t^{-1}$ besitzt in 0 weder einen links- noch einen rechtsseitigen Grenzwert. ◁

Einseitige Grenzwerte existieren insbesondere immer für *monotone* Funktionen, ohne jede Stetigkeitsannahme. Das macht sie besonders nützlich.

Abb 11

Einseitige Grenzwerte einer monotonen Funktion



26 **Satz** *Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton, so existieren in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von f. Genauer gilt*

$$\sup_{(-\infty,a)} f = f_-(a) \leqslant f(a) \leqslant f_+(a) = \inf_{(a,\infty)} f$$

im Fall einer monoton steigenden Funktion, und

$$\inf_{(-\infty,a)} f = f_-(a) \geqslant f(a) \geqslant f_+(a) = \sup_{(a,\infty)} f$$

im Fall einer monoton fallenden Funktion. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Sei zum Beispiel f monoton steigend und $a \in \mathbb{R}$. Dann ist f auf $(-\infty, a)$ nach oben durch $f(a)$ beschränkt, und es gilt

$$\lambda \coloneqq \sup_{(-\infty,a)} f \leqslant f(a).$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert aufgrund des Approximationssatzes 2.12 ein $t_\varepsilon < a$ mit

$$\lambda - \varepsilon < f(t_\varepsilon) \leqslant \lambda.$$

Aufgrund der Monotonie von f gilt dann aber auch

$$\lambda - \varepsilon < f(t) \leqslant \lambda, \qquad t_\varepsilon < t < a.$$

Das aber bedeutet, dass

$$f_-(a) = \lim_{t \nearrow a} f(t) = \lambda = \sup_{(-\infty,a)} f.$$

Entsprechend argumentiert man für den rechtsseitigen Grenzwert. ⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Eine monotone Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig in a genau dann, wenn $f_-(a) = f_+(a)$. Andernfalls nennt man $|f_+(a) - f_-(a)|$ die *Sprunghöhe* von f in a. ⊸

Uneigentliche Grenzwerte

Für Funktionen auf der reellen Geraden sind auch *uneigentliche Grenzwerte* bei ∞ und $-\infty$ erklärt. Wir müssen dazu nur die entsprechende Umgebungen wie zuvor $_{5.6}$ betrachten, also

$$U_\delta(\infty) = (\delta^{-1}, \infty), \qquad U_\delta(-\infty) = (-\infty, -\delta^{-1}), \qquad \delta > 0.$$

In diesem Fall sind dies bereits punktierte Umgebungen.

So ist zum Beispiel ∞ ein Häufungspunkt von $I \subset \mathbb{R}$, wenn I nach oben unbeschränkt ist. Es gilt dann

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = w,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(t) - w| < \varepsilon, \qquad t \in U_\delta(\infty) \cap I.$$

Und dies gilt genau dann, wenn für jede Folge (t_n) in I mit $t_n \to \infty$ auch

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = w.$$

Entsprechend sind uneigentliche Grenzwerte für die *Werte* von Funktionen erklärt, indem in (4) die Umgebungen von w entsprechend gewählt werden.

A. $$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} = 0, \qquad \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{t} = 0.$$

B. $$\lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t} = \infty, \qquad \lim_{t\nearrow 0} \frac{1}{t} = -\infty.$$

C. Für jedes Polynom p mit $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + .. + a_0$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \infty, \qquad \lim_{t\to-\infty} p(t) = (-1)^n \cdot \infty.$$

D. Eine reelle *Folge* (a_n) können wir als Funktion $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $\alpha(n) = a_n$ betrachgten. Ist die Folge konvergent, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{t\to\infty} \alpha(t).$$

7.4 Topologische Grundbegriffe

Der Begriff der Stetigkeit ist eng mit dem Begriff der Umgebung verbunden. Dieser Begriff, und die damit verbundenen Begriffe wie *offene* und *abgeschlossene Menge*, spielen eine fundamentale Rolle für die Analysis. Wir führen diese Begriffe hier nur für normierte Räume ein, da dies für unsere Zwecke völlig ausreicht und noch hinreichend anschaulich ist.

Offene Mengen

Sei E ein beliebiger normierter Raum. Mit Hilfe der δ-Umgebungen eines Punktes a in E,

$$U_\delta(a) \coloneqq \{x \in E : \ \|x-a\| < \delta\},$$

definieren wir den grundlegenden topologischen Begriff der *offenen Menge*.

27 **Definition** *Eine Teilmenge A eines normierten Raumes E heißt offen, wenn sie mit jedem Punkt auch eine δ-Umgebung dieses Punktes enthält. Zu jedem $a \in A$ existiert also ein $\delta > 0$, so dass $U_\delta(a) \subset A$.* ⋊

▹ *Beispiele* A. In $\mathbb{R}$ mit der Betragsnorm $|\cdot|$ ist jedes offene Intervall

$$(a,b) \subset \mathbb{R}, \qquad -\infty \leqslant a < b \leqslant \infty,$$

topologisch offen. Denn für jedes $c \in (a,b)$ ist $\delta = \min\{1, c-a, b-c\} > 0$, und für dieses δ gilt

$$U_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta) \subset (a,b).$$

Dies gilt auch für $a = -\infty$ und $b = \infty$. Die Bezeichnung ›offenes Intervall‹ ist somit konsistent mit der obigen Definition von ›offen‹.

B. Die Intervalle $\varnothing$ und $\mathbb{R}$ sind ebenfalls offen in $\mathbb{R}$.

C. In einem normierten Raum E ist jede *offene Kugel*

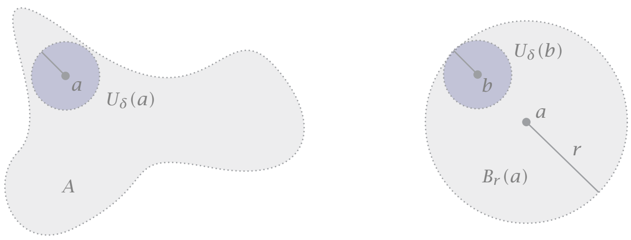
$$B_r(a) \coloneqq \{x \in E : \ \|x-a\| < r\}, \qquad r > 0,$$

topologisch offen. Denn für $b \in B_r(a)$ ist $\rho = \|b-a\| < r$ und $\delta = r - \rho > 0$. Damit gilt $U_\delta(b) \subset B_r(a)$, denn für jedes $x \in U_\delta(b)$ ist

$$\|x-a\| \leqslant \|x-b\| + \|b-a\| < \delta + \rho = r.$$

Da jeder Punkt in $B_r(a)$ eine solche Umgebung besitzt, ist $B_r(a)$ offen. Die Bezeichnung ›offene Kugel‹ ist somit konsistent mit der obigen Definition.

Abb 12 Offene Menge A und offene Kugel $B_r(a)$



D. Ein abgeschlossenes Intervall $[a,b]$ ist *nicht* offen in $\mathbb{R}$, denn jede Umgebung von a oder b enthält auch Punkte, die nicht zu $[a,b]$ gehören.

E. Ein-Punkt-Mengen eines normierten Raumes sind nicht offen.

F. Die reelle Gerade $\mathbb{R}$ ist offen in $\mathbb{R}$, aber aufgefasst als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist $\mathbb{R}$ nicht offen. Daher ist es gelegentlich wichtig anzugeben, auf welchen Raum man sich bezieht, wenn man von einer offenen Menge spricht. ◅

Der folgende Satz beschreibt die grundlegenden topologischen Eigenschaften offener Mengen.

28 **Satz** *In einem normierten Raum E gilt:*

(i) $\varnothing$ *und E sind offen.*

(ii) *Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.*

(iii) *Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.* ⋊

Bemerkung In der allgemeinen Theorie topologischer Räume spielen diese Eigenschaften die Rolle von *Axiomen* für Familien offener Mengen. Eine beliebige Familie von Teilmengen einer Menge X heißt eine *Topologie auf X*, wenn sie diese drei Eigenschaften besitzt. ⊸

⟨⟨⟨⟨ (i) Die leere Menge ist offen, da es gar keine Punkte gibt, für die eine Umgebung gebraucht wird. E ist offen, da E jede Umgebung enthält.

(ii) Sei $(A_\lambda)_{\lambda\in I}$ eine beliebige Familie offener Teilmengen von E und

$$a \in \bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda.$$

Dann ist $a \in A_\mu$ für wenigstens ein $\mu \in I$. Da A_μ offen ist, enthält A_μ auch eine δ-Umgebung von a. Somit gilt auch

$$U_\delta(a) \subset A_\mu \subset \bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda.$$

Also ist die Vereinigung ebenfalls offen.

(iii) Sei $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ eine *endliche* Familie offener Teilmengen von E und

$$a \in \bigcap_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k.$$

Zu jedem k existiert ein $U_{\delta_k}(a) \subset A_k$. Dann ist $\delta = \min\{\delta_1, .., \delta_n\} > 0$, und für dieses δ gilt dann

$$U_\delta(a) \subset U_{\delta_k}(a) \subset A_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Also gilt auch

$$U_\delta(a) \subset \bigcap_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k.$$

Somit ist auch dieser Durchschnitt offen. »»»

Bemerkungen *a.* Die Indexmenge I in (ii) ist völlig beliebig. Sie kann auch überabzählbar sein.

b. Wesentlich für (iii) ist offensichtlich, dass das Minimum *endlich* vieler positiver Zahlen wieder positiv ist. Dies gilt *nicht* für unendlich viele positive Zahlen, und (iii) ist im Allgemeinen auch falsch für unendlich viele Durchschnitte. So ist beispielsweise

$$\bigcap_{n \geqslant 1} (-2^{-n}, 2^{-n}) = \{0\}$$

nicht offen. ⊸

▪ Abgeschlossene Mengen

Abgeschlossene Mengen werden als Komplemente offener Mengen erklärt.

Definition *Eine Teilmenge A eines normierten Raumes E heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement $A^c = E \setminus A$ offen ist.* ⋊

▹ *Beispiele* A. Die Intervalle $\varnothing$ und $\mathbb{R}$ sind abgeschlossen, denn $\varnothing^c = \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^c = \varnothing$ sind offen.

B. Jedes abgeschlossene Intervall $[a, b]$ ist abgeschlossen, denn

$$[a, b]^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$$

ist offen. Ebenso sind $[a, \infty)$ und $(-\infty, b]$ abgeschlossen.

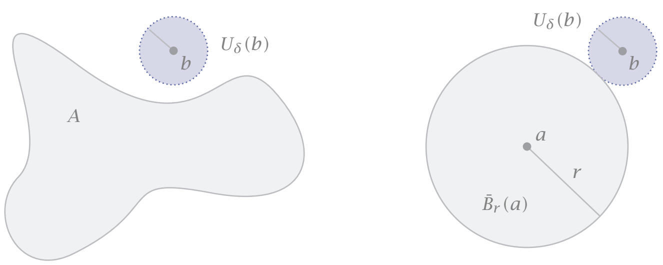
C. Die *abgeschlossenen Kugeln*

$$\bar{B}_r(a) := \{x \in E : \|x - a\| \leqslant r\}, \qquad r \geqslant 0,$$

sind abgeschlossen. Denn für $b \notin \bar{B}_r(a)$ ist

$$U_\delta(b) \cap \bar{B}_r(a) = \varnothing, \qquad \delta = \|b - a\| - r > 0.$$

Abb 13 Abgeschlossene Menge A und abgeschlossene Kugel $\bar{B}_r(a)$



Also ist das Komplement von $\bar{B}_r(a)$ offen, und $\bar{B}_r(a)$ selbst ist abgeschlossen.

D. Ein-Punkt-Mengen in normierten Räumen sind abgeschlossen, denn $\{a\} = \bar{B}_0(a)$.

E. Halboffene Intervalle $[a, b)$ und $(a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ sind weder offen noch abgeschlossen. ◂

Nun die grundlegenden topologischen Eigenschaften abgeschlossener Mengen.

29 **Satz** *In einem normierten Raum E gilt:*
(i) *$\varnothing$ und E sind abgeschlossen.*
(ii) *Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*
(iii) *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Für *beliebige* Familien von Teilmengen eines Raumes gelten die *Regeln von de Morgan* A-1.15,

$$\Big(\bigcup_\lambda A_\lambda\Big)^c = \bigcap_\lambda A_\lambda^c, \qquad \Big(\bigcap_\lambda A_\lambda\Big)^c = \bigcup_\lambda A_\lambda^c.$$

Damit folgen alle Aussagen über abgeschlossene Mengen aus den entsprechenden Aussagen über offene Mengen, indem man die Komplemente betrachtet A-??. ⟩⟩⟩⟩

▹ A. Jede endliche Punktmenge ist abgeschlossen, denn diese ist die endliche Vereinigung von Ein-Punkt-Mengen, welche abgeschlossen sind.

B. Die Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener Mengen ist im Allgemeinen nicht mehr abgeschlossen. Beispielsweise ist

$$\bigcup_{n\geqslant 1} [-1 + 2^{-n}, 1 - 2^{-n}] = (-1, 1)$$

eine offene Menge. ◂

Bemerkung Man beachte, dass ›abgeschlossen‹ nicht die logische Negation von ›offen‹ darstellt. Denn der Gesamtraum und die leere Menge sind gleichzeitig offen *und* abgeschlossen. Ebenso gibt es Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind. ⊸

▪ Rand, Inneres und Abschluss

Das Konzept der offenen und abgeschlossen Mengen wird klarer, wenn wir auch noch den *Rand* einer Menge betrachten.

30 **Definition** *Sei $A \subset E$ eine beliebige Menge. Ein Punkt $a \in E$ heißt Randpunkt von A, wenn jede Umgebung von a Punkte sowohl aus A wie auch aus A^c enthält. Der Rand einer Menge A ist die Menge aller ihrer Randpunkte und wird mit ∂A bezeichnet.* ⋊

Man beachte, dass ein Randpunkt von A nicht Element von A sein muss, denn ein Randpunkt von A ist immer auch Randpunkt von A^c:

$$\partial A = \partial(A^c).$$

Ein Punkt a ist *kein Randpunkt* von A genau dann, wenn er eine Umgebung besitzt, die entweder ganz in A oder ganz in A^c enthalten ist.

▷ A. $\partial\varnothing = \varnothing$ und $\partial E = \varnothing$.
B. $\partial[a,b] = \partial(a,b) = \{a,b\}$.
C. $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.
D. $\partial B_r(a) = \{x \in E : \|x-a\| = r\}$ für $r > 0$.
E. $\partial A = A$ für $A = [a,b] \times \{c\} \subset \mathbb{R}^2$. ◁

31 **Satz** *Für jede Menge $A \subset E$ gilt:*
(i) *∂A ist abgeschlossen.*
(ii) *A ist offen genau dann, wenn $\partial A \cap A = \varnothing$.*
(iii) *A ist abgeschlossen genau dann, wenn $\partial A \subset A$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ (i) Ist $a \notin \partial A$, so gibt es eine Umgebung $U(a)$, die ganz in A oder ganz in A^c enthalten ist. Damit ist *jeder Punkt* in $U(a)$ kein Randpunkt von A, und es gilt $U(a) \subset (\partial A)^c$. Also ist das Komplement von ∂A offen, und ∂A selbst ist abgeschlossen.

(ii) Ist A offen, so gibt es zu jedem Punkt $a \in A$ eine Umgebung $U(a)$, die ganz in A enthalten. Also ist kein Punkt in A ein Randpunkt von A. Enthält umgekehrt A keine Randpunkte, so muss es zu jedem $a \in A$ eine Umgebung $U(a)$ geben, die ganz in A enthalten ist, denn keine Umgebung von a kann ganz in A^c enthalten sein.

(iii) A ist abgeschlossen genau dann, wenn A^c offen ist, also mit (iii) genau dann, wenn $\partial A \cap A^c = \varnothing$. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn $\partial A \subset A$.

Somit ist eine Menge offen genau dann, wenn sie keinen ihrer Randpunkte, und abgeschlossen genau dann, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält. Auf diese Weise kann man jeder Menge auch ihr *Inneres* und ihren *Abschluss* zuordnen.

32 **Definition** *Sei $A \subset E$ eine beliebige Menge. Dann heißen*

$$A^\circ \coloneqq A \setminus \partial A, \qquad A^- \coloneqq A \cup \partial A$$

das Innere oder der offene Kern respektive der Abschluss von A.

Aus dieser Defintion folgt unmittelbar, dass

$$A^\circ \subset A \subset A^-, \qquad \partial A = A^- \setminus A^\circ.$$

Außerdem hat der vorangehende Satz folgendes

33 **Korollar** *Für jede Teilmenge $A \subset E$ gilt:*
(i) *A° ist offen, und A ist offen genau dann, wenn $A = A^\circ$.*
(ii) *A^- ist abgeschlossen, und A ist abgeschlossen genau dann, wenn $A = A^-$.*

A. Es gilt $\varnothing^\circ = \varnothing^- = \varnothing$ und ebenso $E^\circ = E^- = E$.
B. Für $I = [a,b)$ ist $I^\circ = (a,b)$ und $I^- = [a,b]$.
C. Für die rationalen Zahlen gilt $\mathbb{Q}^\circ = \varnothing$ und $\mathbb{Q}^- = \mathbb{R}$.
D. Für $r \geqslant 0$ gilt $\bar{B}_r(a)^\circ = B_r(a)$.
E. Für $r > 0$ gilt $B_r(a)^- = \bar{B}_r(a)$, aber nicht für $r = 0$.
F. Für $A = [a,b) \times \{c\} \subset \mathbb{R}^2$ ist $A^\circ = \varnothing$ und $A^- = [a,b] \times \{c\}$.

▪ Stetigkeit

Wir charakterisieren nun Stetigkeit mit Hilfe von offenen Mengen. Da wir als Definitionsbereiche nicht nur offene, sondern beliebige Teilmengen eines normierten Raumes zulassen wollen, benötigen wir dazu noch eine Verallgemeinerung des Begriffs der Umgebung. Ist $D \subset E$ eine beliebige Menge und $a \in D$, so definieren wir die Mengen

$$U_\delta(a) \cap D, \qquad \delta > 0,$$

als die *D-relativen Umgebungen* von a. Ist die Bezugsmenge D aus dem Kontext klar, so sprechen wir auch einfacher von *relativen* Umgebungen.

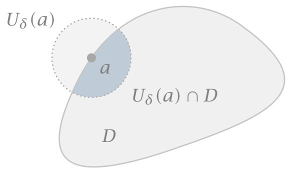


Abb 14
D-relative δ-Umgebung

A. Ist D offen und $a \in D$, so ist für alle $\delta > 0$ hinreichend klein

$$U_\delta(a) \cap D = U_\delta(a).$$

In diesem Fall handelt es sich also um ›normale‹ Umgebungen.

B. Für ein abgeschlossenes Intervall $[a,b]$ gilt

$$U_\delta(a) \cap [a,b] = [a, a+\delta), \qquad 0 < \delta \leqslant b-a.$$

Also ist jedes halboffene Intervall $[a, a+\delta)$ mit $0 < \delta \leqslant b-a$ eine $[a,b]$-relativ offene Umgebung von a.

Bemerkung Beim ersten Lesen genügt es, jeden Definitionsbereich D einer Abbildung als offen anzunehmen. *D-relativ offen* ist dann nichts anderes als *offen* im Sinne der ersten Definition 27.

Es besteht nun folgender Zusammenhang zwischen stetigen Abbildungen und offenen Mengen. Zuerst die lokale Situation.

34 **Satz** *Eine Abbildung $f: E \supset D \to F$ ist stetig im Punkt $a \in D$ genau dann, wenn das Urbild jeder ε-Umgebung von $f(a)$ eine D-relative δ-Umgebung von a enthält.*

⟨⟨⟨⟨⟨ $\Rightarrow$ Sei f stetig in a und $U_\varepsilon(f(a))$ eine ε-Umgebung von $f(a)$. Dann existiert zu diesem ε ein positives δ, so dass

$$f(U_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(a)). \tag{5}$$

Also gilt auch

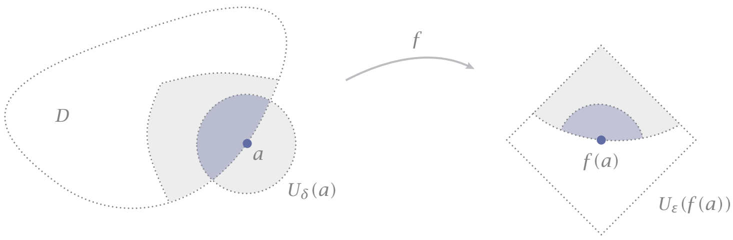
$$U_\delta(a) \cap D \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(a))). \tag{6}$$

Somit enthält das Urbild dieser ε-Umgebung von $f(a)$ – die Menge rechts – wie gefordert eine D-relative δ-Umgebung von a.

$\Leftarrow$ Sei $\varepsilon > 0$. Dann enthält das Urbild der ε-Umgebung von $f(a)$ eine D-relative δ-Umgebung von a. Es gilt also (6) mit einem geeigneten $\delta > 0$. Dann gilt aber auch (5). Also ist f in a stetig gemäß unserer ε-δ-Definition. ⟩⟩⟩⟩⟩

Um den globalen Sachverhalt zu beschreiben, nennen wir eine Menge $A \subset E$ *D-relativ offen*, wenn sie mit jedem Punkt auch eine D-relativ offene Umgebung

Abb 15 Stetiges Urbild einer ε-Umgebung mit relativer δ-Umgebung



dieses Punktes enthält – also zu jedem $a \in A$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $U_\delta(a) \cap D \subset A$. Dies ist gleichbedeutend mit der Existenz einer in E offenen Menge U, so dass $A = U \cap D$. $_{\text{A-??}}$.

35 **Satz** *Eine Abbildung $f : E \supset D \to F$ ist stetig auf D genau dann, wenn das Urbild jeder offenen Menge in F D-relativ offen in E ist.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ $\Rightarrow$ Sei $W \subset F$ offen und $V = f^{-1}(W)$. Ist V leer, so ist V offen, und wir sind fertig. Ist dagegen $a \in V$, so ist $f(a) \in W$, und da W offen ist, enthält W auch eine ε-Umgebung von $f(a)$. Aufgrund des vorangehenden Satzes enthält V eine D-relative δ-Umgebung von a. Da dies für jedes $a \in V$ gilt, ist V D-relativ offen.

$\Leftarrow$ Mit dem vorangehenden Satz folgt, dass f in jedem Punkt von D stetig ist. Also ist f auf ganz D stetig. ⟩⟩⟩⟩⟩

Dieser Satz ist in zweierlei Hinsicht interessant. Einerseits charakterisiert er Stetigkeit durch rein topologische Begriffe, indem er nur Bezug auf offene und relativ-offene Teilmengen nimmt. Dies ermöglicht es, Stetigkeit in allgemeinen topologischen Räumen zu definieren, ohne Bezug auf eine Norm, Metrik oder Ähnliches. Dies werden wir allerdings im Rahmen dieser Analysis nicht weiter betrachten.

Andererseits können wir damit Mengen als offen erkennen, die als Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen dargestellt werden können. Dasselbe gilt dann auch für abgeschlossene Mengen als Komplemente offener Mengen:

36 **Satz** *Ist $f : E \to F$ stetig, so ist das Urbild jeder abgeschlossenen Menge in F eine abgeschlossene Menge in E.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist A abgeschlossen in F, so ist A^c offen in F. Wegen der Stetigkeit von f ist dann auch $f^{-1}(A^c)$ offen in E. Wegen $_{\text{A-1.32}}$ $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ ist damit $f^{-1}(A)$ selbst abgeschlossen in E. ⟩⟩⟩⟩⟩

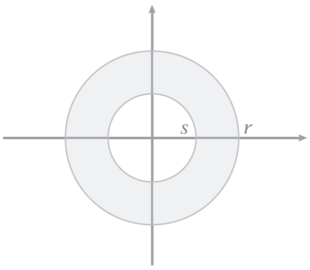


Abb 16

Der Annulus $A_{s,r}$

A. Ist $f : E \to \mathbb{R}$ stetig, so ist die *Nullstellenmenge* von f,

$$N(f) \coloneqq f^{-1}(0) \coloneqq \{x \in E : f(x) = 0\},$$

abgeschlossen, denn dieser ist das Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$.

B. Dasselbe gilt für jede *Niveaumenge* $M^c = f^{-1}(c)$.

C. In einem normierten Raum ist jeder *Annulus* Abb 16

$$A_{s,r} = \{x \in E : s \leqslant \|x\| \leqslant r\}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant r < \infty,$$

abgeschlossen, denn dies ist das Urbild des abgeschlossenen Intervalls $[r,s]$ unter der stetigen Funktion $\|\cdot\|_E$.

D. Insbesondere gilt dies für die *Einheitskugel* $\mathbb{B} = A_{0,1}$ und die *Einheitssphäre* $\mathbb{S} = A_{1,1}$.

7.5 Kompaktheit

Der Beweis des Satzes vom Minimum & Maximum 16 basiert auf dem Argument, dass jede beliebige Folge innerhalb eines *abgeschlossenen Intervalls* eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert ebenfalls zu diesem Intervall gehört. Es stellt sich heraus, dass dies eine eminent wichtige und nützliche Eigenschaft von Mengen in beliebigen Räumen ist. Sie hat daher auch einen eigenen Namen.

Definition *Eine Teilmenge K eines normierten Raumes E heißt kompakt, wenn jede Folge in K eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert ebenfalls zu K gehört.* $\rtimes$

Wesentlich ist, dass die Teilfolge nicht nur konvergent ist, sondern dass ihr Grenzwert ebenfalls in der Menge K liegt. — Zunächst zwei einfache Beobachtungen, wie aus kompakten Mengen neue kompakte Mengen entstehen.

37 **Satz** *Die Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen ist kompakt, und jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Seien $K_1, .., K_n$ kompakt, $K = K_1 \cup .. \cup K_n$, und (a_n) eine Folge in K. Dann muss wenigstens eine Menge K_ν unendlich viele Folgenglieder enthalten. Die aus diesen Gliedern gebildete Teilfolge ist ganz in K_ν enthalten. Da K_ν kompakt ist, enthält sie ihrerseits eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K_ν. Diese zweite Teilfolge ist dann auch in der Obermenge K konvergent. Somit ist K kompakt.

Sei nun A eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge K. Ist (a_n) eine Folge in A, so auch in K. Sie besitzt somit eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K. Da A abgeschlossen ist, gehört dieser Grenzwert ebenfalls zu A. Also ist auch A kompakt. ⟩⟩⟩⟩

- A. Die leere Menge $\varnothing$ und jede Ein-Punkt-Menge ist kompakt.
- B. Jede endliche Teilmenge eines normierten Raumes E ist kompakt.
- C. Ein abgeschlossenes Intervall ist kompakt $_{39}$.
- D. Offene, nichtleere Mengen sind niemals kompakt.

Wir notieren jetzt zwei *notwendige* Eigenschaften kompakter Mengen.

38 **Satz** *Eine kompakte Teilmenge eines normierten Raumes ist abgeschlossen und beschränkt.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ *Abgeschlossen:* Sei K kompakt. Ist a ein Randpunkt von K, so ist a auch Grenzwert einer Folge in K. Folglich gehört auch a zu K, da K kompakt ist. Somit enthält K alle seine Randpunkte und ist abgeschlossen $_{31}$.

Beschränkt: Angenommen, K ist *nicht* beschränkt. Dann existiert zu jedem $n \geqslant 1$ ein $a_n \in K$ mit $\|a_n\| \geqslant n$. Die so gewonnene Folge in K besitzt keine konvergente Teilfolge, denn eine solche müsste ja beschränkt sein. ⟩⟩⟩⟩

Die Umkehrung dieses Satzes gilt im Allgemeinen *nicht*. So ist in einem *unendlich dimensionalen* Vektorraum eine abgeschlossene und beschränkte Menge im Allgemeinen nicht kompakt $_{\text{A-??}}$. Anders ist dies in endlichen Dimensionen:

39 **Satz** *Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ $\Rightarrow$ Dies ist der vorangehende Satz.

$\Leftarrow$ Sei K abgeschlossen und beschränkt und (a_n) eine Folge in K. Da K beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß $_{5.17}$ eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}). Da K abgeschlossen ist, gehört deren Grenzwert ebenfalls zu K. Also besitzt (a_n) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K. ⟩⟩⟩⟩

▷ A. Unter allen Intervallen sind genau die abgeschlossenen Intervalle $[a,b]$ kompakt.

B. Die abgeschlossene Einheitskugel $\mathbb{B}$ und die Einheitssphäre $\mathbb{S}$ im $\mathbb{R}^n$ sind kompakt.

C. Die Nullstellenmenge einer stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist kompakt genau dann, wenn sie beschränkt ist. ◁

■ Stetige Abbildungen auf kompakten Mengen

Wir haben bereits gesehen, dass das stetige Bild eines abgeschlossenen Intervalls wieder ein abgeschlossenes Intervall ist. Dies ist tatsächlich ein Spezialfall des folgenden Satzes über stetige Bilder *kompakter* Mengen.

40 **Satz** *Ist K kompakt und $f\colon K \to F$ stetig, so ist auch $f(K)$ kompakt.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei (w_n) eine beliebige Folge in $f(K)$. Zu jedem n existiert mindestens ein $a_n \in K$ mit $w_n = f(a_n)$. Die Folge (a_n) besitzt in der kompakten Menge K eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}) mit Grenzwert $a \in K$. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt dann auch

$$w_{n_k} = f(a_{n_k}) \to w = f(a) \in f(K).$$

Somit besitzt (w_n) eine in $f(K)$ konvergente Teilfolge. Da dies für jede beliebige Folge in $f(K)$ gilt, ist diese Menge kompakt. ⟩⟩⟩⟩⟩

Jetzt betrachten wir speziell *reellwertige* Funktionen auf kompakten Mengen.

41 **Satz vom Minimum & Maximum** *Ist K kompakt und $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig, so existieren Punkte u und v in K mit*

$$f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v), \qquad x \in K.$$

Insbesondere gilt

$$f(u) = \inf_K f = \min_K f, \qquad f(v) = \sup_K f = \max_K f.$$

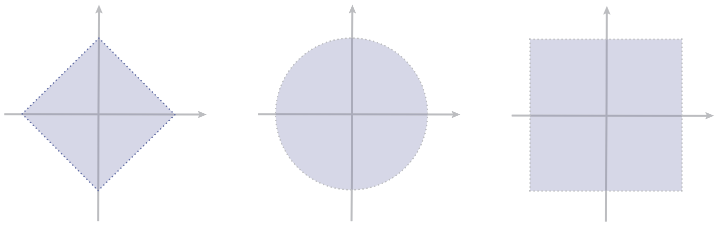
Die Funktion f nimmt also auf K ihr Infimum und Supremum an und ist beschränkt. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Nach dem vorangehenden Satz ist $f(K)$ kompakt in $\mathbb{R}$ und damit beschränkt. Also ist zum Beispiel $m = \inf_K f > -\infty$. Dazu existiert eine Folge (u_n) in K mit $f(u_n) \to m$. Da K kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge (u_{n_k}) mit Grenzwert $u \in K$. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt dann

$$f(u) = \lim f(u_{n_k}) = \lim f(u_n) = m.$$

Das Infimum wird also bei u angenommen. Entsprechend für das Supremum. ⟩⟩⟩⟩⟩

Abb 17 Kugeln in äquivalenten Normen



Als Anwendung des Satzes über Minimum und Maximum 41 zeigen wir, dass alle Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind im folgenden Sinn.

42 **Definition** *Zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ auf einem Vektorraum E heißen äquivalent, wenn es eine Konstante $c \geqslant 1$ gibt, so dass*

$$c^{-1}\,\|x\|_a \leqslant \|x\|_b \leqslant c\,\|x\|_a\,, \qquad x \in E. \qquad \rtimes$$

Geometrisch betrachtet bedeutet dies, dass jede ε-Umgebung in der einen Norm eine δ-Umgebung bezüglich der anderen Norm enthält. Beide Normen definieren in diesem Fall dieselben offenen und abgeschlossenen Mengen. Damit ist auch der Stetigkeitsbegriff derselbe: Eine Abbildung, die bezüglich einer Norm stetig ist, ist es auch bezüglich jeder äquivalenten Norm. — Offensichtlich stellt die Äquivalenz von Normen eine *Äquivalenzrelation* dar.

43 **Satz** *Alle Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.* $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨ Seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_*$ zwei beliebige Normen auf dem $\mathbb{R}^n$. Die Einheitssphäre $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ bezüglich der ersten Norm ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt 39 bezuglich der euklidischen Norm. Da die zweite Norm stetig bezüglich der euklidischen norm ist, nimmt sie auf $\mathbb{S}$ ihr Minimum und Maximum an. Das Minimum kann nicht Null sein, denn $\|\cdot\|_*$ nimmt diesen Wert nur im Nullpunkt an, der nicht zu $\mathbb{S}$ gehört. Somit existieren Konstanten $0 < m \leqslant M$, so dass

$$m \leqslant \|x\|_* \leqslant M, \qquad \|x\| = 1.$$

Aus Homogenitätsgründen gilt dann auch $m\,\|x\| \leqslant \|x\|_* \leqslant M\,\|x\|$ für alle x. ⟩⟩⟩⟩

▪ Gleichmäßige Stetigkeit

Bei der ε-δ-Charaktersierung der Stetigkeit hängt die Wahl von δ im Allgemeinen vom betrachten Punkt ab. ›Funktioniert‹ dagegen ein δ für alle Punkte, so spricht man von *gleichmäßiger* Stetigkeit.

Definition *Eine Abbildung $f: E \supset D \to F$ heißt gleichmäßig stetig auf D, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass*

$$\|u - v\|_E < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(u) - f(v)\|_F < \varepsilon$$

für alle $u, v \in D$ gilt. ⋊

▹ A. Jede lipschitzstetige Abbildung ist gleichmäßig stetig.
B. Die Wurzelfunktion ist gleichmäßig stetig auf $[0, \infty)$.
C. Die Parabel $t \mapsto t^2$ ist *nicht* gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.
D. Ebenso ist $t \mapsto t^{-1}$ nicht gleichmäßig stetig auf $ioc0, 1$. ◃

44 **Satz** *Ist K kompakt und $f: K \to F$ stetig, so ist f sogar gleichmäßig stetig.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Angenommen, f ist auf K *nicht* gleichmäßig stetig. Dann existieren ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n \geqslant 1$ zwei Punkte $u_n \neq v_n$ in K mit

$$\|u_n - v_n\|_E < \frac{1}{n}, \qquad \|f(u_n) - f(v_n)\|_F \geqslant \varepsilon.$$

Da K kompakt ist, besitzt die Folge (u_n) eine konvergente Teilfolge (u_{n_k}) mit Grenzwert a in K. Wegen $\|u_n - v_n\|_E < 1/n$ konvergiert auch (v_{n_k}) gegen denselben Grenzwert a. Dann aber ist aufgrund der Stetigkeit von f

$$\lim_{n \to \infty} \|f(u_{n_k}) - f(v_{n_k})\|_F = \|f(a) - f(a)\|_F = 0,$$

ein Widerspruch zu $\|f(u_n) - f(v_n)\|_F \geqslant \varepsilon$ für alle n. ⟩⟩⟩⟩⟩

Wir werden diesen Satz erst in der mehrdimensionalen Analysis benötigen, zum Beispiel bei der Vertauschbarkeit von Differenziation und Integration.

7.6 Funktionenfolgen und Funktionenräume

Sei D eine beliebige Teilmenge eines normierten Raumes E, und $F(D)$ der Vektorraum aller reellwertigen Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$. Wir wollen Folgen in $F(D)$ und deren Konvergenz betrachten. Für solche Folgen gibt es vielfältige Möglichkeiten, die Konvergenz gegen eine Funktion f in $F(D)$ zu definieren. Die einfachste ist die *punktweise* Konvergenz.

Definition *Eine Folge (f_n) in $F(D)$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f \in F(D)$, falls $f_n(x) \to f(x)$ für jedes $x \in D$.* ⋊

Bei der punktweisen Konvergenz betrachtet man die Folge der Funktionswerte $(f_n(x))$ einzeln in jedem Punkt x, *unabhängig* von allen anderen Punkten im Definitionsbereich D. Daher werden Eigenschaften der Funktionen in der Folge – wie zum Beispiel Stetigkeit – im Limes im Allgemeinen verlorengehen.

▷ A. Für $0 \leqslant t \leqslant 1$ gilt

$$p_n(t) \coloneqq t^n \to \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < 1, \\ 1, & t = 1. \end{cases}$$

Im Raum $F([0,1])$ konvergieren also die stetigen Funktionen p_n punktweise gegen eine im Punkt 1 unstetige Funktion Abb 18.

B. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$g_n(t) \coloneqq \frac{nt}{1+|nt|} \to \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Im Raum $F(\mathbb{R})$ konvergieren also die stetigen Funktionen g_n punktweise gegen die unstetige Signumfunktion Abb 19. ◁

Ein stärkerer Konvergenzbegriff erhält die Stetigkeit beim Grenzübergang.

Definition *Eine Folge (f_n) in $F(D)$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in F(D)$, geschrieben $f_n \rightrightarrows f$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \geqslant 1$ existiert, so dass*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle $x \in D$ und $n \geqslant N$. ⋊

Abb 18

Die Parabeln $t \mapsto t^n$ auf $[0,1]$ und ihre Grenzfunktion

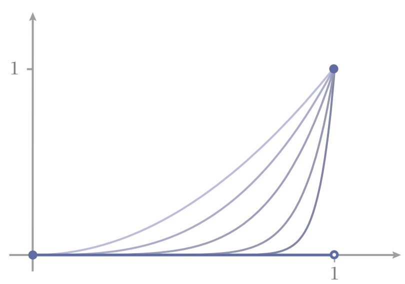
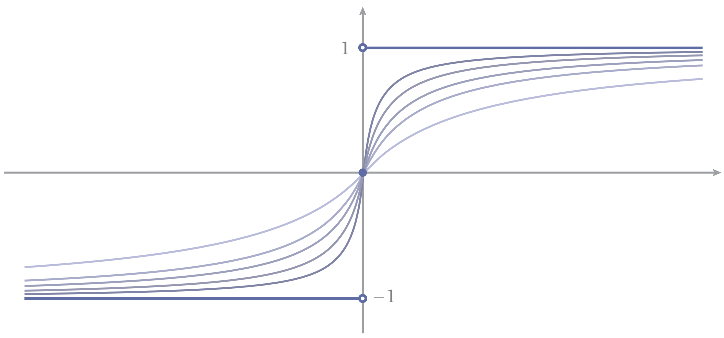


Abb 19 Die Funktionen g_n und ihre Grenzfunktion sgn



Anders als bei der punktweisen Konvergenz müssen also die Folgen $(f_n(x))$ für *alle* $x \in D$ den ε-N-Test *gleichzeitig* bestehen. Anschaulich bedeutet dies, dass in jedem ε-Schlauch um den Graphen der Grenzfunktion f die Graphen fast aller Funktionen f_n liegen müssen Abb 21.

Umgekehrt konvergiert eine Folge (f_n) *nicht gleichmäßig* gegen f, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$$

für unendlich viele n gilt Abb 20.

Unter gleichmäßiger Konvergenz bleibt Stetigkeit nun erhalten.

45 **Satz** *Konvergiert die Folge (f_n) in $F(D)$ gleichmäßig gegen f und sind alle f_n stetig, so ist auch f stetig. Mit anderen Worten, der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist ebenfalls stetig.* ⋊

Abb 20

Nicht-gleichmäßige Konvergenz

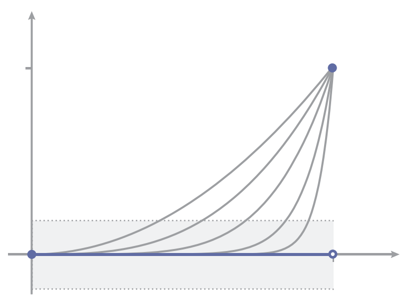
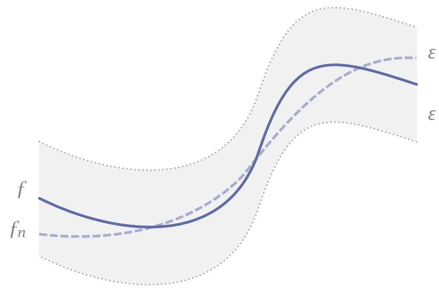


Abb 21

ε-Schlauch um f



⟪⟪ Sei $a \in D$ und $\varepsilon > 0$. Da die Folge (f_n) gleichmäßig konvergiert, gibt es ein $m \geqslant 1$, so dass

$$|f(x) - f_m(x)| < \varepsilon/3, \qquad x \in D.$$

Da f_m stetig ist, existiert ferner zum Punkt a ein $\delta > 0$, so dass

$$|f_m(x) - f_m(a)| < \varepsilon/3, \qquad x \in U_\delta(a) \cap D.$$

Daraus folgt für f und alle $x \in U_\delta(a) \cap D$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} &|f(x) - f(a)| \\ &\quad \leqslant |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(a)| + |f_m(a) - f(a)| \\ &\quad < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\ &\quad = \varepsilon. \end{aligned}$$

Da für jedes $a \in D$ und $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$ existiert, ist f stetig. ⟫⟫

▪ Supremumsnorm

Interessant ist, dass sich die gleichmäßige Konvergenz in $F(D)$ mithilfe einer Norm ausdrücken lässt. — Dazu definieren wir die *Supremumsnorm* über der Menge D,

$$\|f\|_D \coloneqq \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

Für eine unbeschränkte Funktion ist allerdings $\|f\|_D = \infty$, was für eine Norm nicht zulässig ist. Erst auf Räumen *beschränkter* Funktionen wird dies tatsächlich eine *Norm*. Daher führen wir folgende Räume ein.

46 **Definition und Notiz** *Die Räume*

$$B(D) \coloneqq \{f \in F(D) : \|f\|_D < \infty\},$$
$$CB(D) \coloneqq \{f \in B(D) : f \text{ ist stetig}\}$$

mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_D$ *sind normierte Vektorräume.* ⋊

⟪⟪ Linearkombinationen beschränkter Funktionen sind wieder beschränkt. Dasselbe gilt für stetige Funktionen. Somit sind beide Räume Vektorräume, und die Funktion $\|\cdot\|_D$ ist dort *per definitionem* endlich. Von den Normeigenschaften benötigt nur die Dreiecksungleichung etwas Aufmerksamkeit. Es ist aber aufgrund der Dreiecksungleichung des reellen Betrages

$$\begin{aligned}\|f+g\|_D &= \sup_{x\in D} |f(x)+g(x)| \\ &\leqslant \sup_{x\in D} (|f(x)|+|g(x)|) \\ &\leqslant \sup_{x\in D} |f(x)| + \sup_{x\in D} |g(x)| = \|f\|_D + \|g\|_D. \end{aligned}$$ ⟫⟫

Konvergenz bezüglich der Supremumsnorm ist nun nichts anderes als gleichmäßige Konvergenz, denn

$$\|f_n - f\|_D \leqslant \varepsilon$$

ist gleichbedeutend mit

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon, \qquad x \in D.$$

Zusammen mit dem Satz über den gleichmäßigen Limes stetiger Funktionen können wir daher die letzte Notiz $_{46}$ verbessern.

47 **Satz** *Die Räume* $B(D)$ *und* $CB(D)$ *mit der Supremumsnorm sind vollständige normierte Vektorräume, also Banachräume.* ⋊

⟪⟪ Wir betrachten zuerst $B(D)$. Sei (f_n) eine Cauchyfolge in $B(D)$ bezüglich der Supremumsnorm. Dann ist $(f_n(x))$ für jedes $x \in D$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und damit wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ konvergent. Wir können daher eine Funktion $f\colon D \to F$ in jedem Punkt von D definieren durch

$$f(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad x \in D.$$

Diese Funktion ist offensichtlich der punktweise Limes der Folge (f_n). Zu zeigen ist, dass dies auch der *gleichmäßige Limes in* $B(D)$ ist – das also auch $f \in B(D)$ und $\|f_n - f\|_D \to 0$ gilt.

Nun, aus der Cauchy-Eigenschaft der Folge (f_n),

$$\|f_n - f_m\|_D = \sup_{x\in D} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2, \qquad n, m \geqslant N(\varepsilon),$$

folgt durch punktweisen Grenzübergang $m \to \infty$ auch 5.9

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon/2, \qquad n \geqslant N(\varepsilon), \quad x \in D.$$

Also gilt auch

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_D \leqslant \varepsilon/2, \qquad n \geqslant N(\varepsilon),$$

und damit

$$\|f_n - f\|_D < \varepsilon, \qquad n \geqslant N(\varepsilon).$$

Also konvergiert (f_n) in der Norm $\|\cdot\|_D$ gegen f.

Mit $\varepsilon = 1$ und einem geeigneten f_m folgt außerdem

$$\|f\|_D \leqslant \|f_m\|_D + 1 < \infty.$$

Also ist f beschränkt und damit $f \in B(D)$. Damit ist gezeigt, dass jede Cauchyfolge in $B(D)$ einen Grenzwert in *diesem Raum* hat. Also ist $B(D)$ vollständig.

Nun betrachten wir noch den Unterraum $CB(D)$ von $B(D)$. Sind alle f_n stetig, so ist auch f als deren gleichmäßiger Limes stetig 45. Also hat eine Cauchyfolge in $CB(D)$ einen Grenzwert, der ebenfalls wieder zu $CB(D)$ gehört. Also ist auch dieser Raum vollständig. »»»

Der vorangehende Satz macht keine weiteren Annahmen über den Definitionsbereich. Dieser kann also eine beliebige Menge sein. Besonders elegant ist der Sachverhalt allerdings für kompakte Definitionsbereiche, da wir hier die Beschränktheit für stetige Funktionen nicht explizit fordern müssen.

Sei dazu

$$C(D) \coloneqq \{f \in F(D) : f \text{ ist stetig}\}.$$

Es gilt dann $CB(D) = C(D) \cap B(D)$.

48 **Korollar** *Ist K kompakt, so ist der Raum $C(K)$ aller stetigen reellwertigen Funktionen mit der Supremumsnorm vollständig, also ein Banachraum.* ⋊

«««« Nach dem zweiten Satz vom Minimum & Maximum 41 ist jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge beschränkt. Also ist $C(K) \subset B(K)$ und deshalb auch

$$C(K) = CB(K).$$

Die Behauptung folgt dann aus dem letzten Satz 47. »»»

Wir werden dieses Korollar vor allem auf die Räume $C([a,b])$ stetiger reeller Funktionen auf kompakten Intervallen anwenden.

Bemerkung Alles Vorhergehende gilt auch für Abbildungen in einen beliebigen *Banachraum* F. So bildet

$$C(D,F) \coloneqq \{f : D \to F \text{ stetig}\}$$

einen Vektorraum, und der Unterraum

$$CB(D,F) \coloneqq \{f \in C(D,F) : \|f\|_{D,F} < \infty\}$$

bildet einen Banachraum, wobei $\|f\|_{D,F} \coloneqq \sup_{x\in D} \|f(x)\|_F$. Dasselbe gilt für $C(K,F)$, wenn K kompakt ist. Die Beweise sind praktisch dieselben. ⊸