9

Spezielle Funktionen

Spezielle Funktionen sind das Salz der Analysis. An erster Stelle stehen dabei die Exponenzialfunktion und die trigonometrischen Funktionen, mit deren Hilfe Wachstums- und Schwingungsvorgänge beschrieben werden. Solche Vorgänge werden, entsprechend ihrer physikalischen Natur, durch *Differenzialgleichungen* modelliert.

Das einfachste und zugleich wichtigste *Wachstumsgesetz* ist

$$\varphi' = \varphi.$$

Bezeichnet φ irgendeine positive Messgröße, so bringt diese Gleichung zum Ausdruck, dass die Veränderungsrate φ' proportional zu φ selbst ist – wobei der Proportionalitätsfaktor hier der Einfachheit halber 1 ist.

Das einfachste *Schwingungsgesetz* wird beschrieben durch die Gleichung

$$\varphi'' = -\varphi.$$

Bezeichnet φ die Auslenkung aus einer gewissen Ruhelage, so bringt sie zum Ausdruck, dass die Rückstellkraft, also im Wesentlichen die Beschleunigung φ'', proportional zur Auslenkung φ wächst und in die entgegengesetzte Richtung weist.

Lösungen des Wachstumsgesetzes werden durch Exponenzialfunktionen, Lösungen des Schwingungsgesetzes durch trigonometrische Funktionen beschrieben. Den allgemeinen Existenzsatz für Lösungen von Differenzialgleichungen benötigen wir hierfür nicht, es reicht die Theorie der Potenzreihen.

9.1

9.1 Exponenzialfunktion

Wir suchen eine Lösung des Wachstumsgesetzes

$$\varphi' = \varphi.$$

Das heißt, wir suchen eine reelle differenzierbare Funktion φ auf einem möglichst großen Intervall I, so dass $\varphi'(t) = \varphi(t)$ für alle $t \in I$ gilt.

Eine solche Lösung kann allerdings nicht eindeutig sein. Denn ist φ eine Lösung, so ist auch $\lambda\varphi$ für jedes reelle λ eine Lösung, die für $\lambda \neq 1$ und $\varphi \not\equiv 0$ von φ verschiedenen ist. Eindeutig wird eine solche Lösung erst, wenn man zum Beispiel noch einen festen Wert zu einem festen Zeitpunkt vorgibt. Man spricht dann von einem *Anfangswertproblem*.

1 **Existenz- und Eindeutigkeitssatz** *Das Anfangswertproblem*

$$\varphi' = \varphi, \qquad \varphi(0) = 1$$

besitzt die eindeutige analytische Lösung

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp(t) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^n}{n!},$$

genannt Exponenzialfunktion. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Nehmen wir zunächst an, dass es eine solche Lösung auf einem Intervall I um den Nullpunkt gibt. Dann ist sie notwendigerweise unendlich oft differenzierbar, und $\varphi^{(n)} = \varphi$ für alle $n \geqslant 1$. Insbesondere ist $\varphi^{(n)}(0) = 1, \quad n \geqslant 0$, und die Taylrorreihe von φ ist

$$T_0\varphi(t) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^n}{n!} \ .$$

Das Lagrange-Restglied $_{8.22}$ verschwindet auf jedem Intervall $[a,b] \subset I$, denn

$$\|\varphi^{(n)}\|_{[a,b]} \frac{r^n}{n!} = \|\varphi\|_{[a,b]} \frac{r^n}{n!} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Somit wird φ durch seine Taylorreihe dargestellt, und es ist $\varphi(t) = \exp(t)$. Dies beweist die *Eindeutigkeit.* — Andererseits definiert die Exponenzialreihe offensichtlich eine Lösung des Anfangswertproblems. Somit ist auch die *Existenz* einer analytischen Lösung nachgewiesen. ⟩⟩⟩⟩⟩

Genauso beweist man den etwas allgemeineren Fall.

2 **Satz** *Das allgemeine Anfangswertproblem*

$$\varphi' = \varphi, \qquad \varphi(0) = \varphi_0$$

besitzt die eindeutige analytische Lösung

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \varphi_0 \exp(t).$$ ⋊

Aus der Reihendarstellung von exp kann man allerdings kaum auf die wesentlichen Eigenschaften der Exponenzialfunktion schließen. Hierfür benötigen wir die

3 **Funktionalgleichung der Exponenzialfunktion** *Für reelle s, t gilt*

$$\exp(s+t) = \exp(s)\exp(t). \tag{1}$$

Insbesondere ist $\exp(t)\exp(-t) = 1$ und $\exp(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Als Funktion nur von t betrachtet erfüllen beide Seiten von (1) die Differenzialgleichung $\varphi' = \varphi$. Zum Beispiel ist

$$(\exp(s)\exp(t))' = \exp(s)\exp(t)' = \exp(s)\exp(t).$$

Außerdem haben sie denselben Wert bei $t = 0$, nämlich $\exp(s)$. Also 2 gilt also (1). Die zweite Gleichung folgt hieraus mit $\exp(t)\exp(-t) = \exp(0) = 1$. Das aber bedeutet, dass exp keine Nullstelle besitzt. Aus Stetigkeitsgründen ist daher exp überall positiv. ⟩⟩⟩⟩⟩

4 **Satz** *Die Exponenzialfunktion ist streng monoton steigend mit*

$$\lim_{t\to\infty} \exp(t) = \infty, \qquad \lim_{t\to-\infty} \exp(t) = 0.$$

Insbesondere bildet exp die reelle Gerade bijektiv auf $(0, \infty)$ ab. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Aufgrund des letzten Satzes ist $\exp'$ überall positiv und damit exp streng monoton steigend. Aus der Reihendarstellung folgt

$$\exp(t) \geqslant 1 + t \to \infty, \qquad 0 \leqslant t \to \infty.$$

Wieder mit (1) ist dann

$$\lim_{t\to-\infty} \exp(t) = \lim_{t\to\infty} \exp(-t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\exp(t)} = 0.$$ ⟩⟩⟩⟩⟩

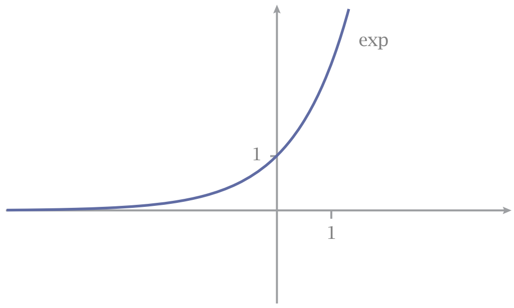


Abb 1
Exponenzialfunktion

▪ Die Funktion e^t

Bis jetzt ist noch nicht klar, was die Exponenzialfunktion mit *Exponenziation* und der *Eulerschen Zahl* $_{5.15}$

$$\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \exp(1)$$

zu tun hat. Das wollen wir jetzt klären.

5 **Lemma** *Für $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\exp(n/m) = \mathrm{e}^{n/m} \coloneqq (\mathrm{e}^{1/m})^n. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Für $n \geqslant 0$ ist aufgrund der Funktionalgleichung

$$\exp(n) = \exp(1 + .. + 1) = \exp(1) \cdot\cdot \exp(1) = \mathrm{e}^n,$$

wobei die Pünktchen für insgesamt n Summanden respektive Faktoren stehen. Also ist auch

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{\mathrm{e}^n} = \mathrm{e}^{-n}.$$

Für $m \geqslant 1$ gilt entsprechend $\exp(1/m)^m = \exp(m/m) = \mathrm{e}$. Somit ist nach Definition der m-ten Wurzel $_{7.21}$

$$\exp(1/m) = \mathrm{e}^{1/m}.$$

Die n-te Potenz beider Seiten ergibt die allgemeine Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

Aus Stetigkeitsgründen ist es sinnvoll, diese Identität *per definitionem* auf beliebige reelle Exponenten auszudehnen.

Definition *Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist*

$$\mathrm{e}^t \coloneqq \exp(t) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^n}{n!}. \qquad \rtimes$$

Damit gilt also $\mathrm{e}^{s+t} = \mathrm{e}^s \mathrm{e}^t$, wie es sich für eine Exponenzialfunktion gehört.

9.2 Logarithmusfunktion

Die Exponenzialfunktion ist streng monoton steigend, und ihre Ableitung verschwindet nirgends. Sie besitzt somit eine Umkehrfunktion, die ebenfalls streng monoton steigt und überall differenzierbar ist. Dies ist die *Logarithmusfunktion.*

6 **Definiton und Satz** *Die Umkehrfunktion der Exponenzialfunktion ist der natürliche Logarithmus* $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$. *Seine Ableitung ist*

$$\log'(t) = \frac{1}{t},$$

und es gilt die Funktionalgleichung

$$\log(uv) = \log(u) + \log(v), \qquad u, v > 0. \tag{2}$$

Insbesondere gilt $\log(u^n) = n\log(u)$ *für alle* $n \in \mathbb{Z}$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Aufgrund der Regel für die Ableitung einer Umkehrfunktion ist

$$\log'(t) = \left.\frac{1}{\exp'(s)}\right|_{s=\log(t)} = \frac{1}{\exp(\log(t))} = \frac{1}{t}.$$

Und aufgrund der Funktionalgleichung für $\exp$ ist

$$\begin{aligned}\exp(\log(u) + \log(v)) &= \exp(\log(u))\exp(\log(v)) \\ &= uv \\ &= \exp(\log(uv)).\end{aligned}$$

Also ist $\log(u) + \log(v) = \log(uv)$. Die letzte Behauptung folgt für $n \geqslant 1$ mit Induktion, und dann für $n \leqslant -1$ aus

$$0 = \log(1) = \log(uu^{-1}) = \log(u) + \log(u^{-1}),$$

also $\log(u^{-1}) = -\log(u)$. ⟩⟩⟩⟩⟩

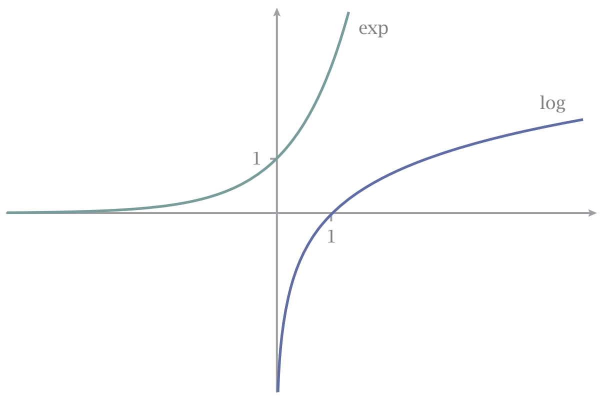
Da $\log'(t) = 1/t$ auf $(0,\infty)$ unendlich oft diffferenzierbar ist, ist es auch der Logarithmus. Tatsächlich ist er sogar reell analytisch.

7 **Satz** *Die Logarithmusfunktion ist reell analytisch auf* $(0,\infty)$ *und besitzt die Potenzreihenentwicklung*

$$\log(1+t) = \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \mp .., \qquad |t| < 1. \quad ⋊$$

Abb 2

Logarithmus- und Exponenzialfunktion



⟨⟨⟨⟨⟨ Aufgrund der Funktionalgleichung (2) gilt

$$\log(a+h) = \log\left(a\left(1+\frac{h}{a}\right)\right) = \log(a) + \log\left(1+\frac{h}{a}\right), \qquad a > 0.$$

Es genügt daher zu zeigen, dass $\log(1+t)$ um 0 durch seine Taylorreihe dargestellt wird. Dann existiert eine solche Darstellung auch um jeden anderen Punkt $a > 0$.

Sei $g(t) = \log(1+t)$. Dann ist $g'(t) = 1/t$ und

$$g^{(n)}(t) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+t)^n}, \qquad n \geqslant 1,$$

also $g(0) = 0$ und

$$\frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \qquad n \geqslant 1.$$

Somit hat die Taylorreihe $T_0 g$ die im Satz angegebene Gestalt. Für das Restglied erhalten wir für $0 \leqslant t \leqslant 1$ die Abschätzung

$$|R_0^{n-1}g(t)| \leqslant \|g^{(n)}\|_{[0,1]}\frac{t^n}{n!} \leqslant \frac{1}{n} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Die Tayloreihe stellt also dort die Logarithmusfunktion dar. Für eine entsprechende Abschätzung für $-1 < t < 0$ benötigen wir allerdings die Darstellung des Restglieds in Integralform, welche wir später nachholen $_{10.21}$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Es gilt also insbesondere

$$\log 2 = \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \,..\; .$$

Ferner gilt

$$\log \frac{1}{1-t} = \sum_{n \geqslant 1} t^n, \qquad |t| < 1. \qquad ⊸$$

- **Allgemeine Potenzen**

Für $a > 0$ und rationale Exponenten n/m vereinbaren wir

$$a^{n/m} := (a^{1/m})^n$$

wie zuvor für die e-Funktion. Mit $a = \mathrm{e}^{\log a}$ folgt hieraus $a^{n/m} = \mathrm{e}^{(n/m)\log a}$. Daher ist folgende Definition sinnvoll.

Definition und Satz *Für $a > 0$ und $t \in \mathbb{R}$ ist*

$$a^t := \mathrm{e}^{t \log a}.$$

Die Funktion $t \mapsto a^t$ ist stetig differenzierbar mit $(a^t)' = a^t \log a$ und

$$a^{s+t} = a^s a^t, \qquad a^{st} = (a^s)^t, \qquad (ab)^t = a^t b^t$$

für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und $a, b > 0$. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Alle Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition, zum Beispiel

$$(a^t)' = (\mathrm{e}^{t \log a})' = \mathrm{e}^{t \log a} \log a = a^t \log a. \qquad ⟩⟩⟩⟩$$

Betrachten wir nicht t, sondern a als Variable, so haben wir mit a^t zugleich auch für jedes reelle α die Potenz

$$t^\alpha := \mathrm{e}^{\alpha \log t}, \qquad t > 0,$$

erklärt. Für diese gilt

$$(t^\alpha)' = (\mathrm{e}^{\alpha \log t})' = \mathrm{e}^{\alpha \log t} \frac{\alpha}{t} = \frac{\alpha t^\alpha}{t} = \alpha t^{\alpha - 1}.$$

Die Differenziationsregel für ganzzahlige Exponenten 8.4 gilt damit ebenso für beliebige reelle Exponenten.

9.3 Sinus und Cosinus

Die Sinus- und Cosinusfunktion erhalten wir als spezielle Lösungen der *Schwingungsgleichung* $\varphi'' = -\varphi$.

8 **Satz und Definition** *Das Anfangswertproblem*

$$\varphi'' = -\varphi, \qquad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1,$$

besitzt die eindeutige analytische, Sinusfunktion genannte Lösung

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sin(t) := \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ebenso besitzt das Anfangswertproblem

$$\varphi'' = -\varphi, \qquad \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0,$$

die eindeutige analytische, Cosinusfunktion genannte Lösung

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cos(t) := \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir betrachten die erste Gleichung und nehmen zunächst an, dass es eine Lösung φ auf einem Intervall I um den Nullpunkt gibt. Dann ist φ notwendigerweise unendlich oft differenzierbar, und

$$\varphi^{(2n)} = (-1)^n \varphi, \qquad n \geqslant 1.$$

Insbesondere gilt dann

$$\varphi^{(2n)}(0) = 0, \qquad \varphi^{(2n+1)}(0) = (-1)^n, \qquad n \geqslant 0.$$

Die Tayloreihe von φ bei 0 ist also

$$T_0\varphi(t) = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad .$$

Das Lagrange-Restglied $_{8.22}$ verschwindet auf jedem Intervall $[-r, r] \subset I$ wie bei der Expoenzialfunktion. Somit wird φ durch seine Taylorreihe dargestellt, und es ist $\varphi(t) = \sin(t)$. Dies beweist die *Eindeutigkeit.* — Andererseits definiert die Sinusreihe offensichtlich eine Lösung des Anfangswertproblems. Somit ist auch die *Existenz* einer analytischen Lösung nachgewiesen. ⟩⟩⟩⟩⟩

Aufgrund der Linearität der Schwingungsgleichung erhält man die Lösung eines beliebigen Anfangswertproblems als Linearkombination dieser beiden Basislösungen.

9 **Satz** *Das Anfangswertproblem*

$$\varphi'' = -\varphi, \qquad \varphi(0) = a, \quad \varphi'(0) = b$$

besitzt die eindeutige analytische Lösung

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = a\cos(t) + b\sin(t). \qquad \rtimes$$

Im Folgenden geht es darum, die wesentlichen Eigenschaften dieser Funktionen zu bestimmen. Die Potenzreihenentwicklungen sind dabei allerdings wenig hilfreich. So sieht man ihnen nicht im Geringsten an, dass sie periodische Funktionen definieren. Vielmehr stützen wir uns im Folgenden auf die Differenzialgleichung.

10 **Satz** *Für alle* $s, t \in \mathbb{R}$ *gilt*

(i) $\sin(-t) = -\sin(t), \quad \cos(-t) = \cos(t)\,,$

(ii) $\sin'(t) = \cos(t), \quad \cos'(t) = -\sin(t)\,,$

(iii) $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1\,,$

(iv) $\sin(s+t) = \sin(s)\cos(t) + \cos(s)\sin(t)\,,$

(v) $\cos(s+t) = \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t)\,.$ ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Die ersten zwei Behauptungen folgen unmittelbar aus der Potenzreihendarstellung. Die nächste Behauptung ergibt sich aus

$$(s^2 + c^2)' = 2ss' + 2cc' = 2sc - 2cs = 0,$$

wobei $s = \sin$ und $c = \cos$. Die Funktion $s^2 + c^2$ ist somit konstant und gleich ihrem Wert 1 bei 0. Die letzten beiden Gleichungen ergeben sich aus dem Eindeutigkeitssatz. Denn beide Seiten jeder Gleichung sind Lösungen der Gleichung $\varphi'' = -\varphi$ mit denselben Anfangswerten bei 0. ⟩⟩⟩⟩⟩

Aussage (i) bedeutet, dass der Sinus eine ungerade, der Cosinus eine gerade Funktion ist. Ihre Graphen sind demnach symmetrisch zum Ursprung respektive zur Ordinatenachse.

■ Die Zahl π

Wir kommen nun zur Zahl π, einer der wichtigsten Zahlen der Mathematik. Wir definieren sie als die erste positive Nullstelle der Sinusfunktion.

11 **Satz** *Es gibt eine eindeutig bestimmte reelle Zahl* $\pi > 0$*, so dass*

$$\sin(\pi) = 0, \qquad \sin(t) > 0, \quad 0 < t < \pi. \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei wieder $s = \sin$ und $c = \cos$. Aus Stetigkeitsgründen gibt es wegen $c(0) = 1$ ein $\delta > 0$, so dass

$$c(t) > 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \delta.$$

Wegen $s' = c$ 10 ist s strikt wachsend auf $[0, \delta]$?? und damit

$$s(t) > 0, \qquad 0 < t \leqslant \delta.$$

Zu zeigen bleibt damit, dass s überhaupt eine positive Nullstelle besitzt. Dann ist das Infimum aller positiven Nullstellen die kleinste positive Nullstelle von s.

Angenommen, es ist $s > 0$ auf $(0, \infty)$. Dann ist c wegen $c' = -s$ dort streng fallend, und es gibt zwei Möglichkeiten: c hat eine positive Nullstelle, oder eben nicht. Im ersten Fall gibt es auch ein a mit $c(a) < 0$. Dann aber wäre wegen der Monotonie von c

$$s'(t) = c(t) \leqslant c(a) < 0, \qquad t \geqslant a.$$

Also fällt s ab dem Punkt a mit nicht nachlassender Rate und muss daher doch eine Nullstelle haben. Im anderen Fall aber wäre s wegen $s' = c$ strikt wachsend, und aus

$$c'(t) = -s(t) \leqslant -s(a) < 0, \qquad t \geqslant a,$$

folgt analog wie zuvor, dass jetzt c eine Nullstelle rechts von a haben müsste.

In beiden Fällen gelangen wir also zu einem Widerspruch. Also hat sin doch eine positive Nullstelle, und wir sind fertig. ⟩⟩⟩⟩⟩

12 **Satz** *Die Cosinusfunktion bildet das Intervall* $[0, \pi]$ *streng monoton fallend auf* $[-1, 1]$ *ab, und es gilt*

$$\cos(\pi/2) = 0, \qquad \sin(\pi/2) = 1. \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei wieder $s = \sin$ und $c = \cos$. Aufgrund des letzten Satzes ist

$$c'(t) = -s(t) < 0, \qquad 0 < t < \pi.$$

Also ist c streng monoton fallend auf $[0, \pi]$. Aus [10] $c^2(t) + s^2(t) = 1$ für alle t und $s(\pi) = 0$ folgt weiter $c^2(\pi) = 1$. Da aber bereits $c(0) = 1$, muss $c(\pi) = -1$ gelten. Mit den Additionstheoremen des vorletzten Satzes [10] ist dann noch

$$2s(\pi/2)c(\pi/2) = s(\pi) = 0.$$

Wegen $s(\pi/2) > 0$ ist also und $c(\pi/2) = 0$ und weiter $s(\pi/2) = 1$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Nun können wir feststellen, dass sin und cos *periodische Funktionen* sind.

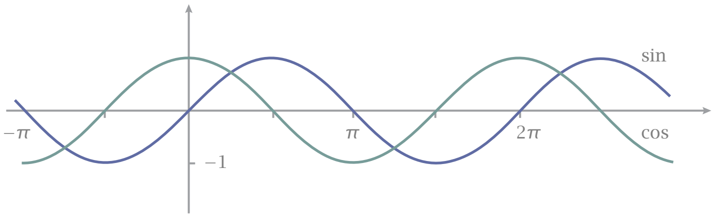
13 **Satz** *Sinus und Cosinus sind antiperiodisch mit der Periode* π *und daher periodisch mit der Periode* 2π. *Das heißt, es gilt*

$$\sin(t + \pi) = -\sin(t), \qquad \sin(t + 2\pi) = \sin(t),$$

und dasselbe für cos. *Außerdem gilt*

$$\sin(t + \pi/2) = \cos(t), \qquad \cos(t + \pi/2) = -\sin(t). \qquad ⋊$$

Abb 3 Sinus und Cosinus



⟨⟨⟨⟨⟨ Dies folgt direkt aus den Additionstheoremen für sin und cos 10 und deren speziellen Werten bei $\pi/2$ und π. Zum Beispiel ist

$$\sin(t+\pi) = \sin(t)\cos(\pi) + \cos(t)\sin(\pi) = -\sin(t). \qquad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

Für den Graphen der Sinusfunktion bedeutet dies zum Beispiel:
- Verschiebung um 2π führt ihn in sich selbst über,
- Verschiebung um π *und* Spiegelung an der x-Achse ebenso,
- Verschiebung um $-\pi/2$ ergibt den Graphen der Cosinusfunktion.

Die Graphen dieser Funktionen sehen daher wie in Abbildung 3 aus.

■ Der Schul-Sinus

Bis jetzt ist noch nicht klar, was dieser Sinus mit dem ›Schul-Sinus‹ zu tun hat. Um dies zu klären, sei $\mathbb{S} := \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$ der Einheitskreis in der euklidischen Ebene, und

$$\mathbb{S}_+ = \mathbb{S} \cap \{y \geqslant 0\}, \qquad \mathbb{S}_- = \mathbb{S} \cap \{y \leqslant 0\}$$

dessen obere respektive untere Hälfte.

14 **Satz** *Die Abbildung*

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

bildet $[0,\pi]$ *bijektiv auf* $\mathbb{S}_+$ *und* $[\pi, 2\pi]$ *bijektiv auf* $\mathbb{S}_-$ *ab.* ⋊

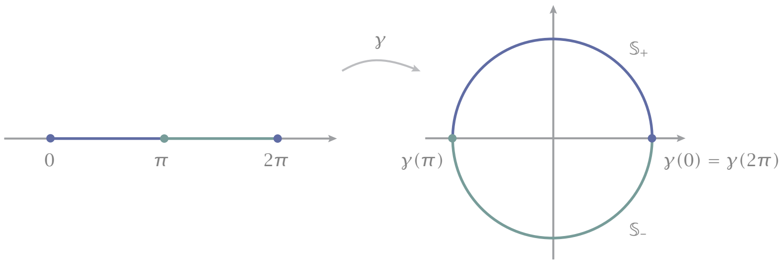
⟨⟨⟨⟨⟨ Wegen $s^2(t) + c^2(t) = 1$ und $s(t) \geqslant 0$ auf $[0,\pi]$ ist klar, dass

$$\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{S}_+.$$

Da der Cosinus dort streng monoton fällt 12, ist diese Abbildung injektiv. Und sie ist surjektiv, denn zu jedem $x \in [-1,1]$ existiert ein $t \in [0,\pi]$ mit $c(t) = x$, und dort ist

$$s(t) = \sqrt{1-c^2(t)} = \sqrt{1-x^2} = y.$$

Abb 4 Die Abbildung $\gamma\colon t \mapsto (\cos t, \sin t)$



Die Behauptung zu $\gamma\colon [\pi, 2\pi] \to \mathbb{S}_-$ folgt analog. ⟫⟫

Aus den beiden letzten Sätzen folgt, dass der Punkt $\gamma(t)$ eine Bahn gegen den Uhrzeigersinn auf dem Einheitskreis $\mathbb{S}$ beschreibt, beginnend beim Punkt $\gamma(0) = (1, 0)$ und periodisch mit Periode 2π. Sein Geschwindigkeitsvektor ist

$$\dot\gamma(t) = (-\sin t, \cos t),$$

und seine Absolutgeschwindigkeit ist konstant,

$$\|\dot\gamma(t)\|_2 = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1.$$

Die Länge der Bahn vom Punkt $\gamma(0)$ zum Punkt $\gamma(t)$ ist demnach t — dies wird noch genauer im Kapitel über Kurven erklärt werden. Nimmt man diese Länge t als das *Bogenmaß* des zwischen den Punkten $\gamma(0)$, $(0, 0)$ und $\gamma(t)$ eingeschlossenen Winkels, so erhält man die geometrische Definition des Sinus und Cosinus wie in Abbildung 5:

$$\sin t = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \qquad \cos t = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}},$$

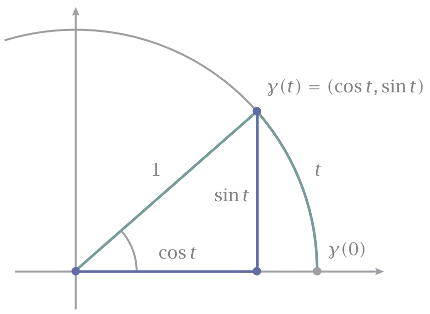
wobei im Einheitskreis die Hypotenuse die Länge 1 hat.

9.4 Tangens und Arcusfunktionen

Mit Sinus und Cosinus verbunden sind einige weitere trigonometrische Funktionen. Wir erwähnen noch den Tangens, die übrigen übergehen wir.

Abb 5

Schul-Sinus und Schul-Cosinus



Definition und Satz *Der Tangens ist auf* $\{t \in \mathbb{R} : \cos t \neq 0\}$ *definiert durch*

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

Er ist ungerade, π*-periodisch und stetig differenzierbar mit Ableitung*

$$\tan' t = 1 + \tan^2 t. \qquad \rtimes$$

⟪⟪ Der Quotient einer geraden und einer ungeraden Funktion ist immer ungerade. Ferner ist 13

$$\tan(t + \pi) = \frac{\sin(t + \pi)}{\cos(t + \pi)} = \frac{-\sin t}{-\cos t} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t.$$

Die stetige Differenzierbarkeit folgt aus der Quotientenregel und

$$\tan' t = \frac{\sin' t \cos t - \sin t \cos' t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t,$$

da $\cos$ auf dem Definitionsbereich von $\tan$ nirgends verschwindet. ⟫⟫

Bemerkung Der Tangens ist natürlich ebenfalls reell analytisch. Wir benötigen seine Taylorreihe jedoch nicht. ⊸

▪ Arcusfunktionen

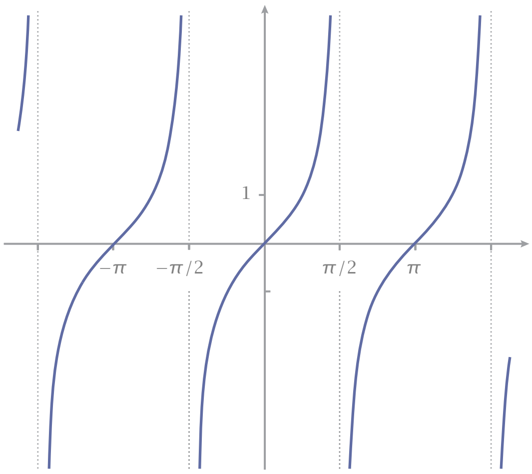
Die Umkehrfunktion der exp-Funktion ist die log-Funktion. Was sind die Umkehrfunktionen von $\sin$, $\cos$ und $\tan$?

Umkehrbarkeit setzt Injektivität voraus. Eine *periodische* Funktion ist aber geradezu die Antithese einer injektiven Funktion – sie wiederholt sich ja ständig. Um die betreffenden Funktionen ›umkehrbar zu machen‹, müssen wir sie daher auf geeignete Intervalle *einschränken*. Hierfür gibt es zwar unendlich viele Möglichkeiten, doch die Einschränkungen

$$\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]}, \qquad \cos|_{[0,\pi]}, \qquad \tan|_{(-\pi/2, \pi/2)}$$

Abb 6

Tangens



sind die gebräuchlichsten. Diese Funktionen sind umkehrbar, ihre Umkehrfunktionen werden *Arcussinus*, *Arcuscosinus* und *Arcustangens* genannt und mit $\arcsin$, $\arccos$ und $\arctan$ bezeichnet.

15 **Satz** *Die Funktionen*

$$\arcsin\colon [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2], \qquad \arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$$

sind auf $[-1,1]$ *stetig, auf* $(-1,1)$ *stetig differenzierbar, und es gilt*

$$\arcsin' t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \arccos' t = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Die Funktion $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ *ist stetig differenzierbar mit*

$$\arctan' t = \frac{1}{1+t^2}. \qquad \rtimes$$

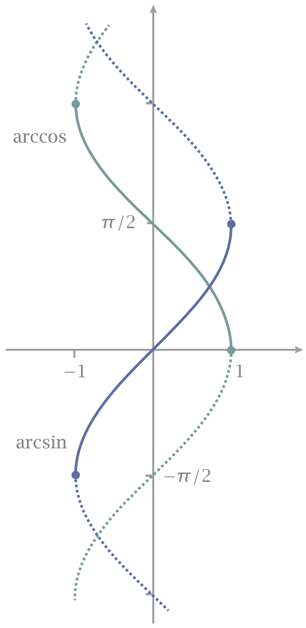
⟨⟨⟨⟨⟨ Betrachte $\arctan$. Die Funktion $\tan\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ besitzt eine strikt positive Ableitung und ist surjektiv. Sie ist daher umkehrbar, und die Umkehrfunktion $\arctan$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. Für die Ableitung gilt mit $s = \arctan t$ und der Umkehrregel

$$\arctan' t = \frac{1}{\tan' s} = \frac{1}{1+\tan^2 s} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Analog werden die übrigen Behauptungen bewiesen. ⟩⟩⟩⟩⟩

Abb 7

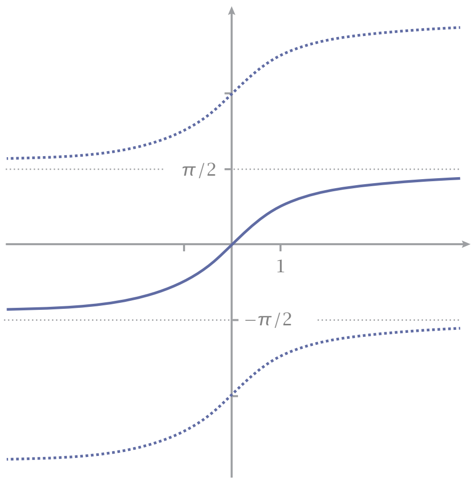
Hauptzweige des Arcussinus und Arcuscosinus mit Teilen zweier Nebenzweige



Bemerkung Die hier definierten Arcusfunktionen werden als die *Hauptzweige* der jeweiligen Arcusfunktion bezeichnet. Schränkt man sin, cos, tan auf andere geeignete Intervalle ein, so erhält man entsprechende *Nebenzweige* dieser Funktionen. ⊸

Abb 8

Hauptzweig des Arcustangens mit zwei Nebenzweigen



9.5 Exp, Sin und Cos im Komplexen

Die Funktionen $\sin$, $\cos$ und $\exp$ können kaum unterschiedlicher sein: $\sin$ und $\cos$ sind periodisch, beschränkt und besitzen unendlich viele Nullstellen, $\exp$ dagegen ist streng monoton, unbeschränkt, und ohne jede Nullstelle.

Tatsächlich handelt es sich um ein und dieselbe Funktion. Der Zusammenhang wird erkennbar, wenn wir diese auch für *komplexe* Argumente betrachten. Da die Potenzreihenentwicklungen von $\exp$, $\sin$ und $\cos$ für komplexe Argumente ebensogut wie für reelle Argumente konvergieren, ist folgende Definition gerechtfertigt.

Definition *Für $z \in \mathbb{C}$ ist*

$$\exp z \coloneqq \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$$

sowie

$$\sin z \coloneqq \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos z \coloneqq \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \qquad \rtimes$$

Die Theorie der Potenzreihen zeigt, dass diese Funktionen auch im Komplexen beliebig oft differenzierbar sind und man ihre Ableitungen durch gliedweises Differenzieren erhält. Zum Beispiel gilt

$$\exp' z = \sum_{n \geqslant 1} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!} = \exp z.$$

Entsprechend gilt $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$. Ausmultiplizieren liefert außerdem die Funktionalgleichung

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w).$$

Hieraus folgt beispielsweise, dass die Exponenzialfunktion auch im Komplexen *keine Nullstelle* hat. Momentan brauchen wir diese Resultate jedoch nicht. Uns genügt folgende grundlegende Identität.

16 **Eulersche Formel** *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(\mathrm{i}z) = \cos(z) + \mathrm{i} \sin(z). \qquad \rtimes$$

9.16

⟨⟨⟨⟨⟨ Da die exp-Reihe absolut konvergiert, können wir sie beliebig umordnen 6.6. Mit $\mathrm{i}^{2n} = (-1)^n$ für alle $n \geqslant 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{i}z) &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!} \\ &= \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{i} \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z).\end{aligned}$$ ⟩⟩⟩⟩⟩

Setzen wir π ein, so erhalten wir mit $\sin\pi = 0$ und $\cos\pi = -1$ die berühmte

17 **Eulersche Gleichung** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$. ⋊

Viele Mathematiker halten sie für die schönste Gleichung der Mathematik. Sie verbindet ihre fünf wichtigsten Zahlen,

$$0, \quad 1, \quad \mathrm{i}, \quad \mathrm{e}, \quad \pi$$

auf gelegentlich mystisch anmutende Weise.

Insbesondere für reelle t ist

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$$

immer ein Punkt auf dem Einheitskreis $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, denn

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}| = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Identifizieren die komplexe Zahl $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ in $\mathbb{C}$ mit dem Punkt $(\cos t, \sin t)$ in $\mathbb{R}^2$, so können wir das Ergebnis von Satz 14 wie folgt formulieren.

18 **Satz** *Die Funktion*

$$\operatorname{cis} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

ist 2π*-periodisch und bildet* $[0, 2\pi)$ *bijektiv auf den Einheitskreis* $\mathbb{S}$ *in der komplexen Ebene ab.* ⋊

›cis‹ ist ein Akronym für ›cos + i sin‹. Diese Abbildung wickelt also die reelle Gerade gleichmäßig mit der Periode 2π so um den Einheitskreis, dass aufgrund der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus 10

$$\operatorname{cis}(s+t) = \operatorname{cis}(s)\operatorname{cis}(t),$$

oder kürzer

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(s+t)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}.$$

Es handelt sich also um einen *Endomorphismus* der additiven Gruppe $(\mathbb{R},+)$ in die multiplikative Gruppe $(\mathbb{S},\cdot)$.

Umgekehrt führt die Funktionalgleichung für $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ zu den Additionstheoremen für $\sin$ und $\cos$. Einerseits ist aufgrund der Eulerschen Gleichung 17

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(s+t)} = \cos(s+t) + \mathrm{i}\sin(s+t).$$

Andererseits ist dies aufgrund der Funktionalgleichung für exp 3 gleich

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} &= (\cos s + \mathrm{i}\sin s)(\cos t + \mathrm{i}\sin t)\\ &= (\cos s\cos t - \sin s\sin t) + \mathrm{i}\,(\sin s\cos t + \cos s\sin t).\end{aligned}$$

Ein Vergleich der Real- und Imaginärteile ergibt dann die Additionstheoreme. Ebenso leicht erhält man die *Formeln von Moivre*,

$$(\cos t + \mathrm{i}\sin t)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = \cos nt + \mathrm{i}\sin nt,$$

aus denen mit den binomischen Formeln Identitäten für $\sin nt$ und $\cos nt$ folgen.

Schließlich gilt

$$\cos t = \Re\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}, \qquad \sin t = \Im\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}.$$

Beginnt man das Studium der Speziellen Funktionen mit der exp-Funktion im Komplexen, und insbesondere der cis-Funktion, so werden cos und sin mithilfe dieser Formeln *definiert*. Auf diesem Weg fallen diese Funktionen allerdings gewissermassen ›vom Himmel‹. Der Zugang über die Schwingungsgleichung illustriert dagegen das allgemeine Phänomen, dass viele wichtige Funktionen durch Differenzialgleichungen definiert werden und ihre Eigenschaften sich auch aus diesen ableiten lassen.

▪ Polardarstellung komplexer Zahlen

Bisher kennen wir die *kartesische Darstellung* $z = a + \mathrm{i}b$ komplexer Zahlen. Die cis-Funktion ermöglicht die ebenso nützliche *Polardarstellung*.

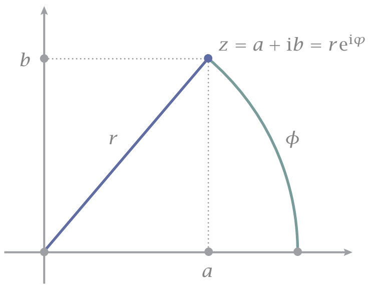
19 **Satz** *Zu jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ existieren genau ein $r > 0$ und ein $\varphi \in [0, 2\pi)$, so dass*

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Die reelle Zahl φ heißt das Argument der komplexen Zahl $z \neq 0$. ⋊

Abb 9

Polardarstellung einer komplexen Zahl



⟨⟨⟨⟨⟨ Gibt es eine solche Darstellung, so ist notwendigerweise $r = |z|$, und

$$\frac{z}{r} = \frac{z}{|z|} \in \mathbb{S}$$

bestimmt eindeutig $\varphi \in [0, 2\pi)$ 18. Somit ist die Darstellung eindeutig. Die Existenz einer solchen Darstellung ist offensichtlich, auch für $z = 0$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Wegen der Periodizität der cis-Funktion gilt dann auch

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+2\pi n)}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Das Argument einer komplexen Zahl $\neq 0$ ist also bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π erklärt. Für $z = 0$ dagegen ist das Argument nicht erklärt.

Mithilfe der Polardarstellung finden wir leicht alle Wurzeln einer komplexen Zahl. Zuerst betrachten wir die Wurzeln aus 1.

20 **Satz** *Es gibt genau n verschiedene komplexe n-te Wurzeln der Zahl 1, die sogenannten n-ten Einheitswurzeln*

$$\theta_n^k := \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/n}, \qquad k = 0, .., n-1. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Offenbar ist 0 *keine* Wurzel aus 1. Somit können wir die gesuchten Wurzeln als $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ ansetzen. Dann gilt

$$z^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = 1$$

genau dann, wenn $r = 1$ und $n\varphi = 2\pi k$ mit einer ganzen Zahl k, also

$$\varphi = \frac{2\pi}{n}k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Also ist $z = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/n} = \theta_n^k$. Dies sind genau n verschiedene komplexe Zahlen 18, zum Beispiel für $k = 0, .., n-1$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Nun noch der allgemeine Fall.

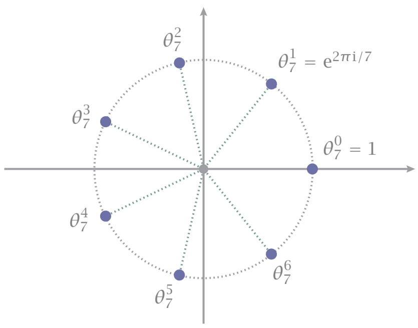


Abb 10

Die sieben Einheitszwerge

21 **Satz** *Zu jeder komplexen Zahl* $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \ne 0$ *gibt es genau* n *verschiedene* n*-te Wurzeln*

$$w_k = w_0\theta_n^k, \qquad k = 0, .., n-1,$$

wobei $w_0 = r^{1/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/n}$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Für w_0 gilt sicher $w_0^n = z$. Ist w eine weitere n-te Wurzel von z, so ist w/w_0 eine n-te Einheitswurzel, also gleich θ_n^k für ein $0 \leqslant k < n$. Das ergibt die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

9.6 Die Hyperbelfunktionen

22 **Satz und Definition** *Es gibt jeweils genau eine auf der reellen Geraden zweimal differenzierbare Lösung der Differenzialgleichung* $\varphi'' = \varphi$ *mit*

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1$$

respektive

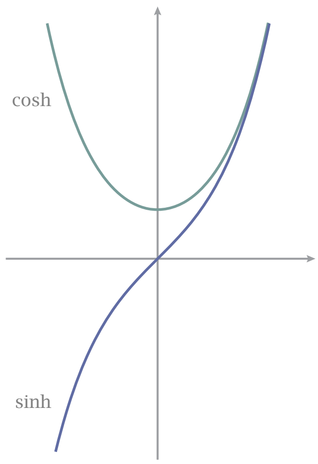
$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0.$$

Diese werden Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus genannt und mit sinh *respektive* cosh *bezeichnet. Sie sind reell analytisch und besitzen die Darstellung*

$$\sinh t = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cosh t = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^{2n}}{(2n)!}. \qquad ⋊$$

Abb 11

Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus



⟨⟨⟨⟨⟨ Man verifiziert sofort, dass die angegebenen Funktionen die Gleichung $\varphi'' = \varphi$ erfüllen und die geforderten Anfangswerte haben. Die Eindeutigkeit dieser Lösungen ergibt sich wie bei der Exponenzialfunktion. ⟩⟩⟩⟩⟩

Diese Funktionen sind natürlich ebenso in der ganzen komplexen Ebene erklärt. Wir beschränken uns hier aber auf die reellen Aspekte.

23 **Satz** *Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt*

(i) $\sinh(-t) = -\sinh t, \quad \cosh(-t) = \cosh t\,,$

(ii) $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1\,,$

(iii) $\sinh t = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}t), \quad \cosh t = \cos(\mathrm{i}t)\,.$ ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Zum Beispiel ist

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = \frac{\mathrm{e}^{2t} + 2 + \mathrm{e}^{-2t}}{4} - \frac{\mathrm{e}^{2t} - 2 + \mathrm{e}^{2t}}{4} = 1,$$

und

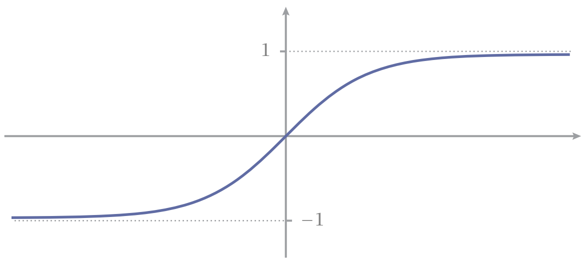
$$\sin(\mathrm{i}t) = \left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right|_{z=\mathrm{i}t} = \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{t}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{i}\sinh t. \quad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

Die Funktion sinh steigt streng monoton auf ganz $\mathbb{R}$ und bildet die reelle Gerade bijektiv auf sich selbst ab. Die Funktion cosh fällt streng monoton auf $(-\infty, 0]$ und wächst streng monoton auf $[0, \infty)$ und bildet beide Intervalle bijektiv auf $[1, \infty)$ ab. Siehe Abbildung 11 für ihre Graphen.

Der Tangens hyperbolicus wird analog zum ›klassischen‹ Tangens gebildet:

Abb 12

Tangens hyperbolicus



24 **Definition und Satz** *Der Tangens hyperbolicus ist auf* $\mathbb{R}$ *definiert durch*

$$\tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t}$$

und bildet die reelle Gerade streng monoton steigend und surjektiv auf $(-1, 1)$ *ab.* ⋊

Aus dem Vorangehenden ergibt sich, dass sinh und tanh ohne Einschränkung umkehrbar sind, während bei cosh dessen Einschränkung auf $[0, \infty)$ umkehrbar ist. Deren Umkehrungen werden *Areasinus hyperbolicus*, *Areatangens hyperbolicus* und *Areacosinus hyperbolicus* genannt und mit arsinh, artanh und arcosh, respektive, bezeichnet. Es gilt damit

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh} &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ \operatorname{arcosh} &: [1, \infty) \to [0, \infty), \\ \operatorname{artanh} &: (-1, 1) \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Da die Hyperbelfunktionen durch die Exponenzialfunktion dargestellt werden, können diese Areafunktionen durch die Logarithmusfunktion dargestellt werden.

25 **Satz** *Im Innern ihrer Definitionsbereiche gilt*

$$\operatorname{arsinh} t = \log(t + \sqrt{t^2 + 1}), \qquad \operatorname{arcosh} t = \log(t + \sqrt{t^2 - 1})$$

sowie

$$\operatorname{artanh} t = \frac{1}{2} \log \frac{1 + t}{1 - t}. \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist

$$t = \cosh s = \frac{e^s + e^{-s}}{2}, \qquad s \geqslant 0.$$

so gilt auch $2t e^s = e^{2s} + 1$, oder

$$e^{2s} - 2t e^s + 1 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für e^s mit den beiden Lösung

$$\mathrm{e}^s = t \pm \sqrt{t^2 - 1}.$$

Von diesen ist jedoch nur die Pluslösung größer oder gleich 1. Somit ist

$$s = \operatorname{arcosh} t = \log(t + \sqrt{t^2 - 1}).$$

Die beiden übrigen Identitäten erhält man auf analoge Weise. ⟫⟫⟫

Zum Schluss listen wir noch sämtliche Ableitungen auf. Die einzelnen Rechnungen sind eine einfache Übung.

26 **Satz** *Im Innern der jeweiligen Definitionsbereiche gilt*

$$\begin{aligned} \sinh' t &= \cosh t, & \operatorname{arsinh}' t &= \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}, \\ \cosh' t &= \sinh t, & \operatorname{arcosh}' t &= \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}, \\ \tanh' t &= 1 - \tanh^2 t, & \operatorname{artanh}' t &= \frac{1}{1-t^2}. \end{aligned}$$ ⋊