Votieraufgaben

1 Man zeige: Eine auf einer konvexen Menge K eines Vektorraumes V definierte Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$ ist konvex genau dann, wenn ihr *Epigraph*

$$\operatorname{Epi}(f) \coloneqq \{(u,z) \in V \times \mathbb{R} : u \in K,\ z \geqslant f(u)\}$$

konvex in $V \times \mathbb{R}$ ist.

2 Sei $M \subset V$ eine beliebige Menge. Dann ist

$$\operatorname{Conv}(M) \coloneqq \bigcap \{K \subset V : M \subset K \wedge K \text{ ist konvex}\},$$

die kleinste konvexe Menge in V, die M enthält.

3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Ist $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ konvex, so sind es auch die Mengen

$$\Omega_c = \{x \in \Omega : f(x) < c\}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

4 Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ nicht-leer und konvex. Dann ist auch die Funktion

$$d\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad d(x) = \operatorname{dist}(x,K) \coloneqq \inf_{u \in \Omega} \|x-u\|$$

konvex.

5 Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ nicht-leer, kompakt und konvex. Ist $f\colon K \to \mathbb{R}$ konvex und nicht konstant, so nimmt f ihr Supremum auf dem Rand von K an.

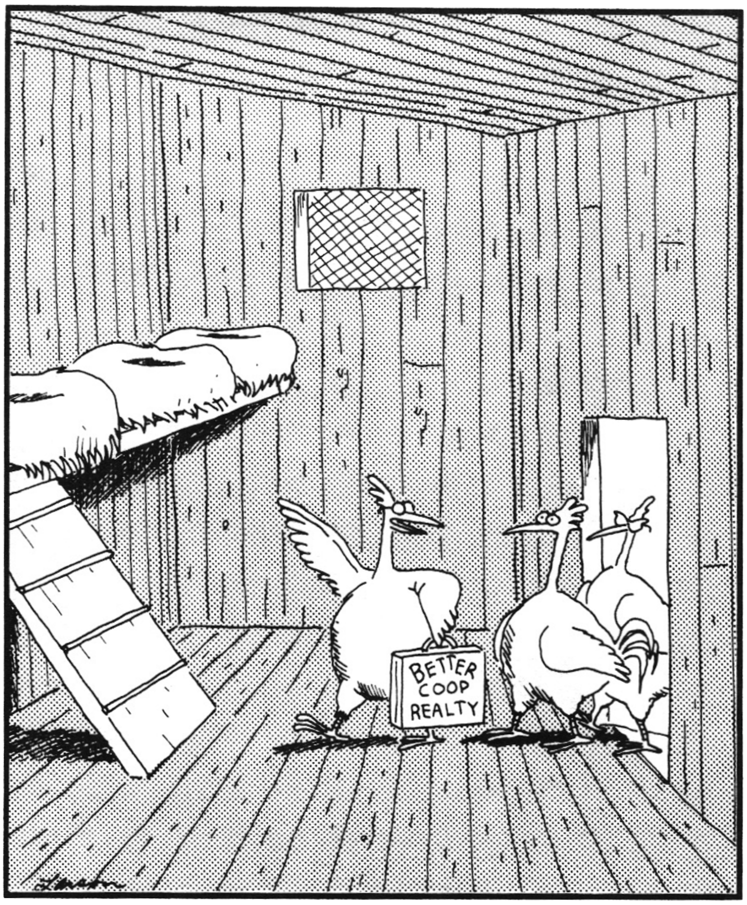
6 Sei $f\colon x \mapsto \langle a,x\rangle + b$ eine nicht-konstante, affine Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$. Dann nimmt f ihr Maximum über der konvexen Hülle von m Punkten $x_1,..,x_m$ in $\mathbb{R}^n$ in wenigstens einem dieser Punkte an.

Schriftaufgabe

7 Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strikt konvex und *koerziv*, das heißt

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \infty,$$

so besitzt f genau eine lokale Minimalstelle x_0, und es gilt $f(x_0) = \min_{\mathbb{R}^n} f$.



"You're in luck! This place just came on the market a few days ago. . . . The previous owners all had their heads chopped off."