Votieraufgaben

1 Sei φ integrierbar auf I. Dann ist

$$\Phi\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad \Phi(p) = \left(\fint_I |\varphi(t)|^p \,\mathrm{d}t \right)^{1/p}$$

monoton steigend.

2 Für Funktionen $f_1,..,f_n \in R(I)$ und $p_1,..,p_n > 1$ mit $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$ gilt

$$\int_I \prod_{i=1}^{n} |f_i(t)| \,\mathrm{d}t \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\int_I |f_i(t)|^{p_i} \,\mathrm{d}t \right)^{1/p_i}.$$

3 Finden Sie zwei 2×2-Matrizen A und B, für die

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2, \qquad \mathrm{e}^{A+B} \neq \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B.$$

4 Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum mit einer Multiplikation, für die

$$\|AB\| \leqslant C \, \|A\| \, \|B\|$$

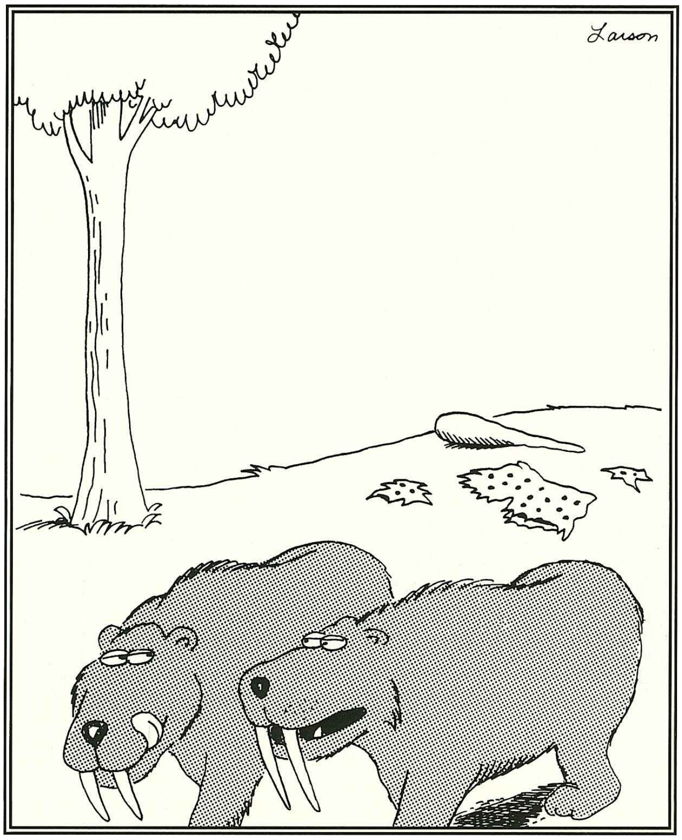
mit einer gewissen Konstanten $C > 0$ gilt. Dann gibt es auch eine *adaptierte Norm* $\|\cdot\|_a$, für die $C = 1$ gilt und E somit eine Banachalgebra wird.

5 Es ist φ eine Lösung von $\dot{x} = Ax$ zum Anfangswert $x(t_0) = x_0$ genau dann, wenn $\tilde{\varphi} = \varphi(\cdot + t_0)$ eine Lösung zum Anfangswert $x(0) = x_0$ ist. Somit ist

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A} x_0.$$

Schriftaufgabe

6 Eine C^1-Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist von der Form $f(x) = \langle a, x \rangle + b$ genau dann, wenn sowohl f als auch $-f$ konvex sind.



"I've heard all kinds of sounds from these things, but 'yabba dabba doo' was a new one to me."