Votieraufgaben

1 *a.* Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt und v ein stetiges Vektorfeld auf V, für das mit einer Konstanten $a \geqslant 0$ gilt

$$\langle v(x), x\rangle \leqslant a(1+\|x\|^2), \qquad x \in V.$$

Dann gilt für jede Lösungskurve φ von v die Abschätzung

$$\|\varphi^t(x)\| \leqslant (1+\|x\|)\mathrm{e}^{at}, \qquad t \geqslant 0.$$

b. Was muss vorausgesetzt werden, damit Entsprechendes für $t \leqslant 0$ gilt?

2 Sei v ein C^1-Vektorfeld auf V und $\alpha\colon V \to \mathbb{R}$ eine positive C^1-Funktion. Dann besitzen die Vektorfelder v und $w = \alpha v$ dieselben Lösungskurven. Gilt das auch, wenn ›C^1‹ durch ›lokal lipschitz‹ oder ›stetig‹ ersetzt wird?

3 *Variante des Lemmas von Gronwall* Es gelte

$$u(t) \leqslant \int_0^t (a(s) + bu(s))\,\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

mit $u, a\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ stetig und $b \geqslant 0$. Dann gilt

$$u(t) \leqslant \int_0^t a(s)\mathrm{e}^{b(t-s)}\,\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

4 *Allgemeines Lemma von Gronwall* Seien $u, a\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ stetig, $b\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ integrierbar und nicht-negativ, und

$$u(t) \leqslant a(t) + \int_0^t b(s)u(s)\,\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Dann gilt

$$u(t) \leqslant a(t) + \int_0^t a(s)b(s)\exp\left(\int_s^t b(r)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Spaßaufgabe

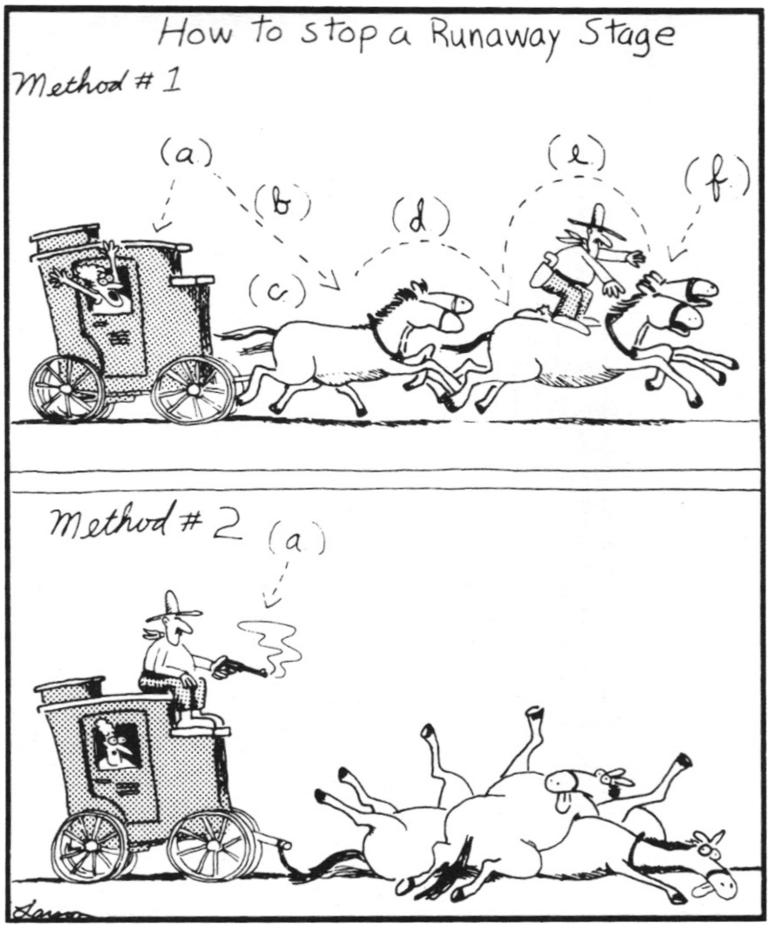
5 *Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz* Ist das Vektorfeld v L-lipschitz auf der Kugel $B_r(x_0)$, so besitzt das Awp

$$\dot{x} = v(x), \quad x(0) = x_0$$

für hinreichend kleines $T > 0$ eine eindeutige Lösung $\varphi\colon [0,T] \to B_r(x_0)$. Beweisen sie diesen Satz, indem sie $E_T = \{\varphi \in C([0,T], V\}$ mit der üblichen Supremumsnorm

$$\|\varphi\|_{[0,T]} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\varphi(t)\|,$$

$X = \{\varphi \in E_T : \varphi(0) = x_0\}$ betrachten und den Beweis des globalen EE-Satzes ?? entsprechend anpassen.



From the book *Guide to Western Stuff*