Votieraufgaben

1 Bestimmen sie die folgenden Integrale.

a. $\displaystyle\int_0^\infty t^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ *b.* $\displaystyle\int_0^1 t\log t\,\mathrm{d}t$ *c.* $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$

d. $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-\cos t}\sin 2t\,\mathrm{d}t$ *e.* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$

2 *a.* Das Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ konvergiert, aber nicht absolut.

b. Was gilt für das Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin \omega t}{t}\,\mathrm{d}t$ als Funktion von $\omega > 0$?

3 Die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei monoton und integrierbar. Dann existiert für jedes $h > 0$ die Reihe $\sum_{n\geqslant 0} f(nh)$, und es gilt

$$\lim_{h\to 0} h \sum_{n\geqslant 0} f(nh) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t.$$

4 Es sei f eine Regelfunktion auf $[a-1, b+1]$ und $\tau_h f \coloneqq f(\cdot + h)$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in (0,1)$, so dass

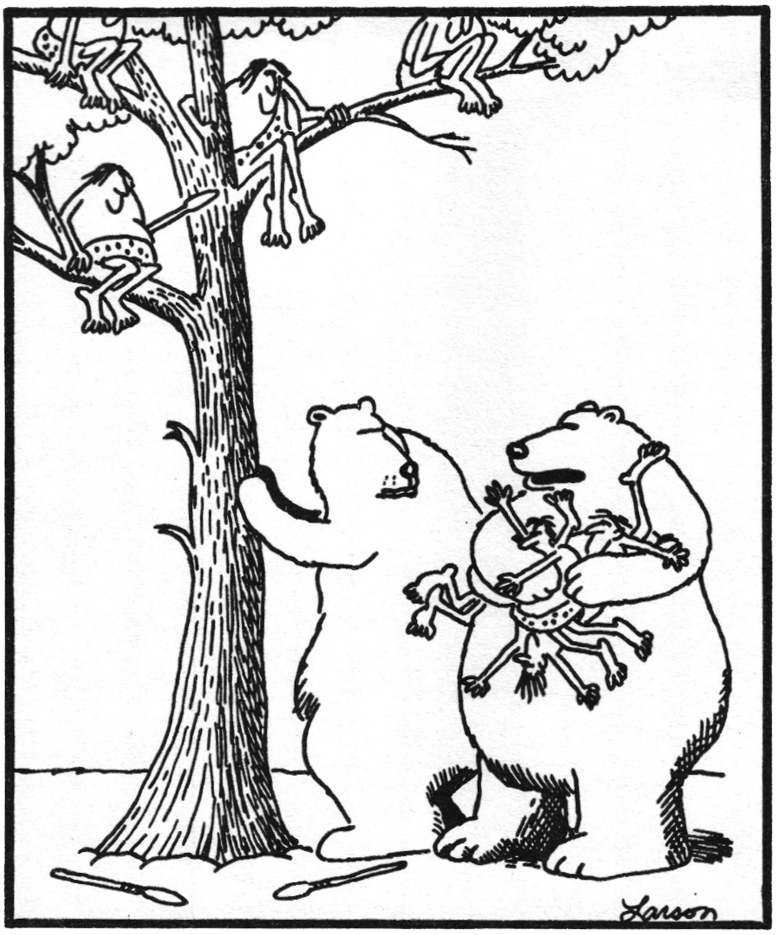
$$\int_a^b |\tau_h f - f| < \varepsilon, \qquad |h| < \delta.$$

5 Beweisen sie die Existenz der sogenannten *Eulerschen Konstanten*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (s_n - \log n), \qquad s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Schriftaufgabe

6 *Dirichletsches Konvergenzkriterium* Sei f eine stetige Funktion auf $[a,b)$ mit beschränkter Stammfunktion und g eine monotone C^1-Funktion auf $[a,b)$ mit $\lim_{t\to b} g(t) = 0$. Dann existiert das Integral von fg über $[a,b]$.



"Let's see . . . I guess your brother's coming over too. . . . Better give it one more shake."