Votieraufgaben

1 *Abschneidefunktion* Man konstruiere zu jedem $\varepsilon > 0$ eine C^∞-Funktion

$$\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \to [0,1], \quad \varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqslant 1, \\ 0, & |t| \geqslant 1+\varepsilon. \end{cases}$$

2 Zu jeder Funktion $f \in C^1([a,b])$ existiert eine Folge von Polynomen p_n, so dass (p_n) gleichmäßig gegen f und (p_n') gleichmäßig gegen f' konvergiert.

3 Skizzieren sie die folgenden Kurven.

a. $[0,4\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\mathrm{e}^{-t/4}\cos t, \mathrm{e}^{-t/4}\sin t)$,

b. $[-1,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t^3, t^2)$,

c. $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos t + (t/2)\sin t, \sin t - (t/2)\cos t)$,

d. $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

4 Die erste Ableitung einer Kurve ist eindeutig bestimmt ist, wenn sie existiert.

Schriftaufgabe

5 Zu *jeder* reellen Folge $(a_n)_{n\geqslant 0}$ konstruiere man eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = a_n, \qquad n \geqslant 0.$$

Setze dazu

$$f = \sum_{n\geqslant 0} a_n \varphi((1+a_n^2)t)\, t^n$$

mit einer geeigneten Abschneidefunktion φ.

Spaßaufgabe

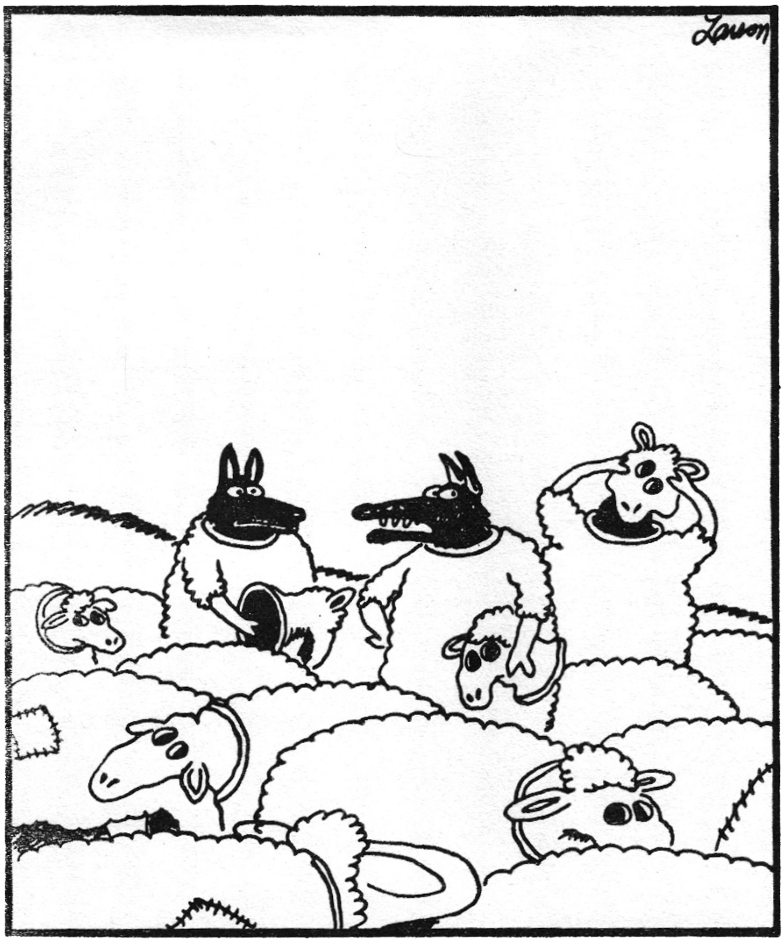
6 *Peanokurve* Sei $u\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ eine stetige Funktion mit

$$u(t+2) = u(t), \qquad u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1/3, \\ 1, & 2/3 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Definiere

$$\gamma(t) = \sum_{k\geqslant 0} 2^{-k-1}\gamma_0(9^k t), \qquad \gamma_0(t) = (u(t), u(3t)).$$

Dann bildet γ das Intervall $[0,1]$ surjektiv auf $[0,1]^2$ ab.



"Wait a minute! Isn't anyone here a real sheep?"