Votieraufgaben

1 Zeigen sie anhand der Kreiskurve $\gamma\colon [0,2\pi]$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, dass für Kurven im Allgemeinen der Mittelwertsatz *nicht gilt*. Woran liegt das?

2 Sei $\gamma\colon [a,b] \to E$ eine C^1-Kurve und $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ eine C^1-Parametertransformation. Dann gilt

$$L_{[a,b]}(\gamma) = L_{[c,d]}(\gamma \circ \varphi).$$

3 Zeigen Sie: Zwei verschiedene Stammfunktionen einer Kurve $\gamma \in C(I, \mathbb{R}^m)$ können sich nur durch eine additive Konstante $c \in \mathbb{R}^m$ unterscheiden.

4 *a.* Zu jedem $s \in [1,3]$ existiert eine Kurve $\gamma_s\colon [0,1] \to [0,1]$ mit

$$L(\gamma_s) = s.$$

b. Es gibt eine Kurve $\gamma_*\colon [0,1] \to [0,1]$ mit

$$L(\gamma_*) = \infty.$$

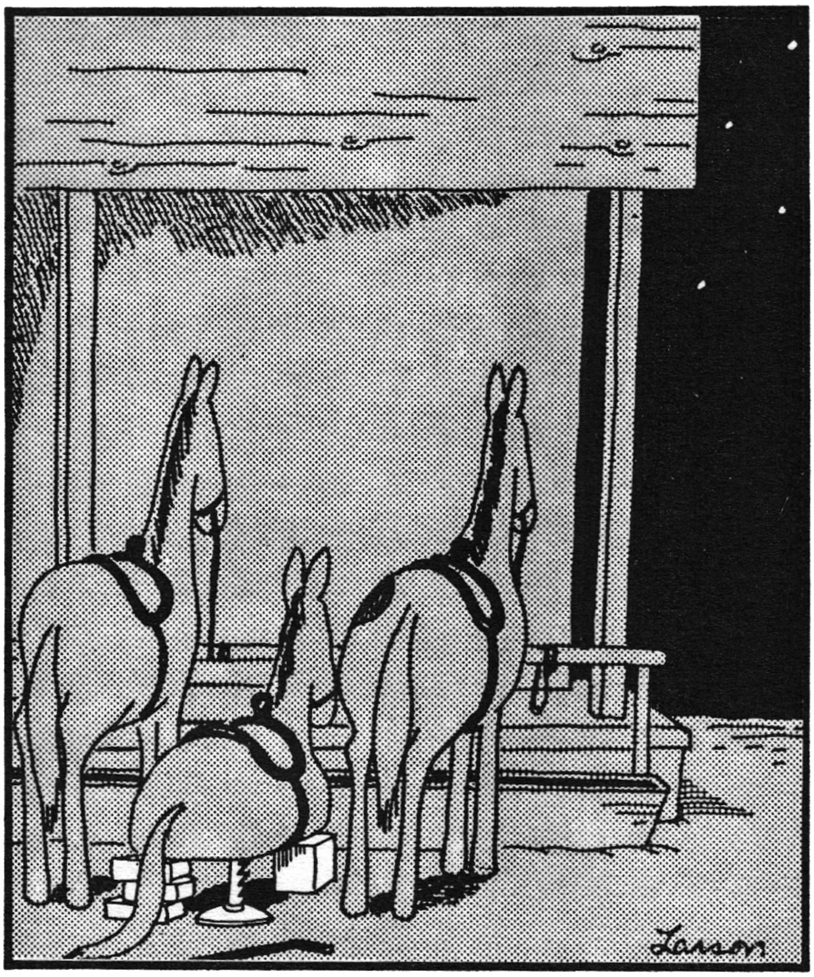
5 Man gebe Beispiele für Kurven $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften:
a. Injektiv auf $[0,1)$, aber nicht doppelpunktfrei.
b. Der zugehörige Weg ist regulär, diese Parametrisierung jedoch nicht.
c. Differenzierbar, aber nicht rektifizierbar.
d. Keine äquivalente Parametrisierung ist lipschitz.

Schriftaufgabe

6 Sei I ein kompaktes Intervall und (γ_n) eine gleichmäßig konvergente Folge in $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ mit Grenzkurve γ.
a. Sind die γ_n rektifizierbar und ihre Längen $L(\gamma_n)$ gleichmäßig beschränkt, so ist auch γ rektifizierbar, und es gilt

$$L(\gamma) \leqslant \liminf_{n\to\infty} L(\gamma_n).$$

b. Es gilt nicht notwendigerweise Gleichheit.
c. Die Behauptung gilt im Allgemeinen nicht mehr, wenn die Längen nicht gleichmäßig beschränkt sind.



Never park your horse in a bad part of town.