Votieraufgaben

1 Für ein beliebiges Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf dem $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle u,v\rangle = \langle Au,v\rangle_e$$

mit der symmetrischen Darstellungsmatrix $A = (\langle e_i,e_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

2 Sei $A\colon V\to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei normierten Vektorräumen. Dann gilt $Ah = o(h)$ genau dann, wenn $A = 0$.

3 Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine symmetrische bilineare Form auf V. Dann gibt es zu jedem $A\in L(V,W)$ ein symmetrisches $Q\in L(V,W)$, so dass $\langle A\cdot,\cdot\rangle = \langle Q\cdot,\cdot\rangle$.

4 Gegeben seien Funktionen $\varphi,f,g\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$. Dabei sei φ stetig und

$$f(h) = O(h), \qquad g(h) = o(h).$$

Bestimmen sie (natürlich mit Beweis) die Ordnung von
a. $(f\circ g)(h)$ *b.* $g^2(h)$ *c.* $(\varphi f)(h)$ *d.* $(fg)(h)$ *e.* $g(h+f(h))$

5 Sei I ein kompaktes Intervall und $C(I)$ mit der Supremumsnorm versehen. Dann ist

$$\Phi:\ C(I)\to\mathbb{R}, \qquad \Phi(f) = \frac{1}{2}\int_I f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

differenzierbar mit

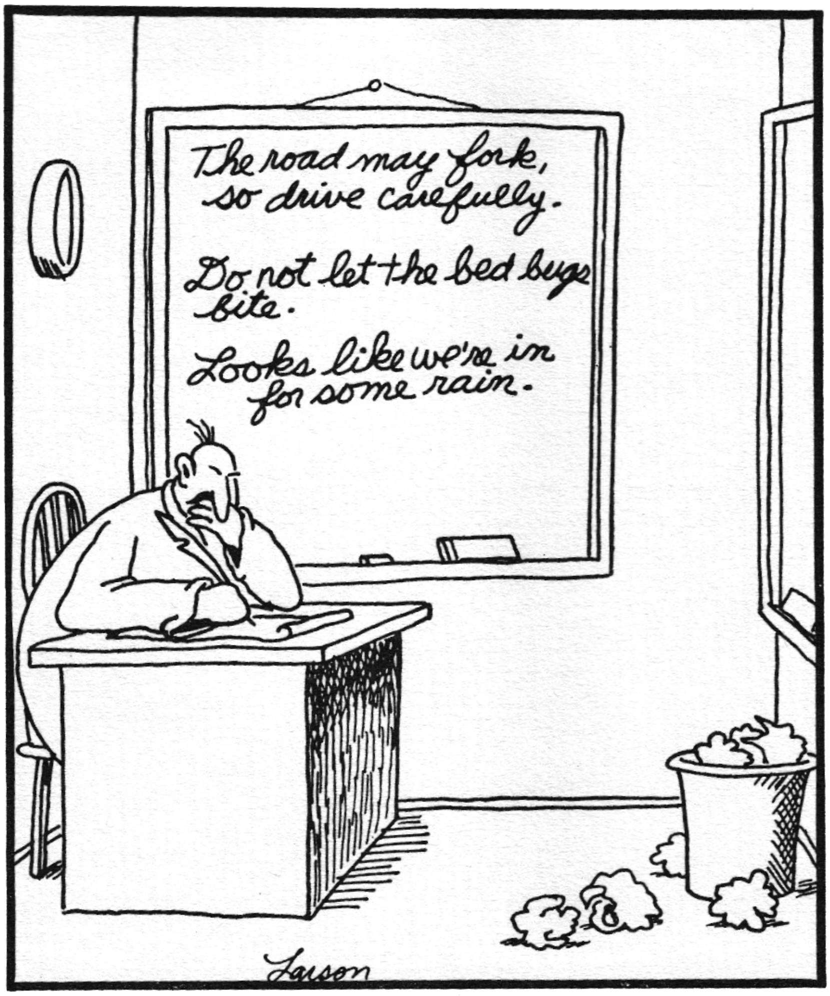
$$D\Phi(f)\eta = \int_I f(t)\eta(t)\,\mathrm{d}t.$$

Schriftaufgabe

6 *Produktregel* Seien $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\to\mathbb{R}$ ein Skalarprodukt und $f,g\colon V\to V$ differenzierbare Abbildungen. Zeigen sie, dass

$$\varphi:\ V\to\mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \langle f(x),g(x)\rangle$$

differenzierbar ist, und bestimmen sie die Ableitung.



Confucius at the office