*Votieraufgaben*

1 *Mittelwertsatz für skalare Funktionen* Sei $f\colon V \hookrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Gehört $[u,v]$ zum Definitionsbereich von $f$, so gilt

$$f(v) - f(u) = Df(\xi)(v-u)$$

mit einem $\xi \in [u,v]$.

2 Seien $f,g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $\varphi = fg$.
*a.* Bestimmen sie $D\varphi(x)h$ für $h \in \mathbb{R}^n$.
*b.* Bestimmen sie $\nabla\varphi(x)$ bezüglich des Standardskalarprodukts.

3 Bestimmen sie die Jacobimatrizen der folgenden Abbildungen.
*a.* $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ mit $f(x) = |x|_e^2$
*b.* $f\colon\ \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(t) = (t^2\cos t, t^2\sin t, \sinh t)^\top$
*c.* $f\colon\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(a,b,c,d) = (ab+cd, a^2c^2 - b^2d^2)^\top$
*d.* $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\sin y\sin z \\ x\sin y\cos z \\ x\cos y \end{pmatrix}$

4 *Kettenregel* Sind $\varphi\colon V \hookrightarrow V$ im Punkt $a$ und $f\colon V \hookrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $\varphi(a)$ differenzierbar, so ist auch $f\circ\varphi\colon V \hookrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $a$ differenzierbar, und es gilt

$$\nabla(f\circ\varphi)(a) = D\varphi^\top(a)\nabla f(\varphi(a)).$$

5 *Variante des Lemmas von Hadamard* Sei $f \in C^2(\Omega)$ und $0 \in \Omega$. Dann gibt es Funktionen $g_1, .., g_n \in C^1(\Omega)$ so dass

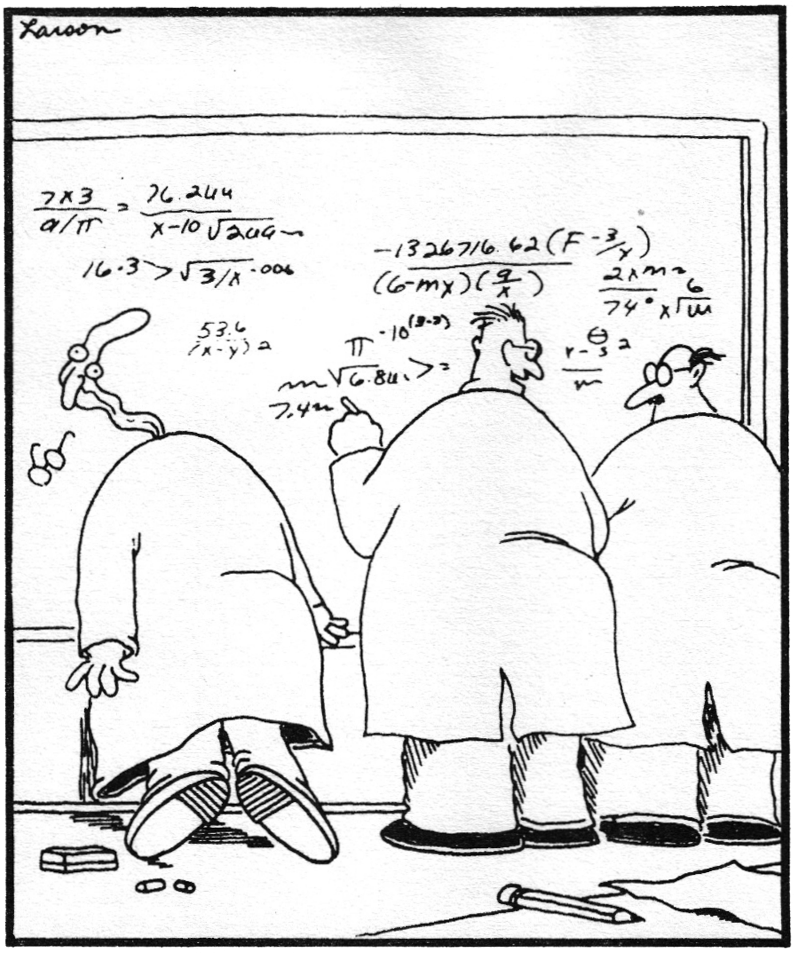
$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i g_i(x).$$

*Schriftaufgabe*

6 Gegeben ist die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) \mathrel{\hat=} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}.$$

Zeigen sie, dass $f$ alle partiellen Ableitungen *zweiter* Ordnung besitzt. Bestimmen sie diese Ableitungen, insbesondere im Nullpunkt.



**"Ha! Webster's blown his cerebral cortex."**