Votieraufgaben

1 Sei A eine beliebige $n \times n$-Matrix und

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \langle Ax, x \rangle.$$

Dann ist

$$\nabla f = (A + A^\top)x, \qquad Hf = A + A^\top.$$

2 Untersuchen sie die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Extremalstellen.
a. $f(x,y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4$
b. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$
c. $f(x,y) = \exp(x^2 + y^2 - 8x^4 - 4y^4)$.

3 Sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ und

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \varphi(\langle a, x \rangle)$$

mit einem festen Vektor $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ und $n \geqslant 2$. Dann ist jeder kritische Punkt von f degeneriert.

4 Sei $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und

$$v(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Dann gilt

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi}.$$

5 Seien a und b zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{R}^2$. Man bestimme den eindeutigen kritischen Punkt c der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{a,b\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\|x-a\|} + \frac{1}{\|x-b\|}$$

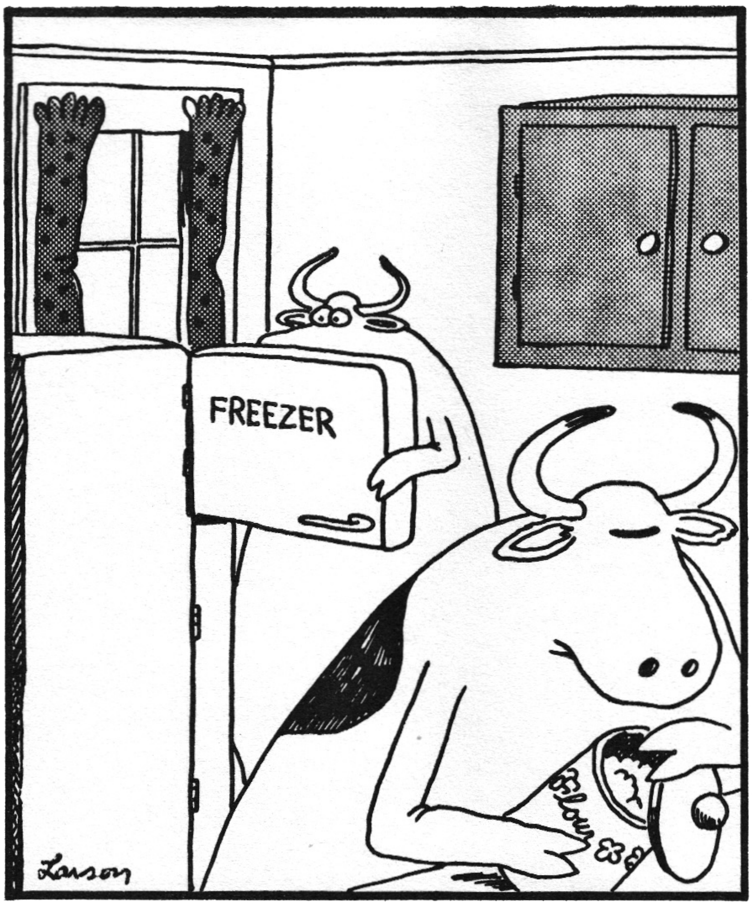
und ihr Taylorpolynom $T_c^2 f$.

Schriftaufgabe

6 *Rayleighquotient* Für eine symmetrische $n \times n$-Matrix A heißt

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2}\frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

der *Rayleighquotient*. Bestimmen sie die kritischen Punkte x_0 von φ und die zugehörigen kritischen Werte $\varphi(x_0)$.



While Farmer Brown was away, the cows got into the kitchen and were having the time of their lives — until Betsy's unwitting discovery.