Diese Aufgaben sind nur ein warm-up und haben keine Votierpunkte!

1 Auf R_a^b ist J_a^b lipschitz. Genauer gilt auch hier

$$|J_a^b(f) - J_a^b(g)| \leqslant (b-a)\,\|f-g\|_{[a,b]}\,.$$

▷ *Lösung* Aufgrund der Linearität des Integrals genügt, eine einzelne Regelfunktion $f \in R_a^b$ zu betrachten. Gilt nun $\varphi_n \rightrightarrows f$, so gilt auch $\|\varphi_n\|_{[a,b]} \to \|f\|_{[a,b]}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}|J_a^b(f)| = \lim_{n\to\infty} |J_a^b(\varphi_n)| \leqslant \lim_{n\to\infty} J_a^b(|\varphi_n|) \leqslant \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_{[a,b]}\,(b-a) \\ = (b-a)\,\|f\|_{[a,b]}\,.\end{aligned}$$

2 Die *Thomaefunktion* ist definiert als

$$\tau:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tau(x) \coloneqq \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1/q, & x = p/q \text{ mit teilerfremden } p,q \text{ und } q > 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: τ ist auf jedem Intervall $[a,b]$ integrierbar. Konstruieren sie auch eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen τ konvergiert.

▷ *Lösung* Sei (r_n) eine beliebige Abzählung der rationalen Zahlen in $[0,1]$. Setzen wir

$$\tau_n \coloneqq \tau\chi_{\{r_1,..,r_n\}}, \qquad n \geqslant 1,$$

so stimmt τ_n mit τ in den rationalen Punkten $r_1,..,r_n$ sowie allen irrationalen Punkten überein. Da es zu jedem $\varepsilon > 0$ in $[0,1]$ nur endlich viele rationale Zahlen mit einem Nenner kleiner als $1/\varepsilon$ gibt, gilt

$$\|\tau_n - \tau\|_{[0,1]} < \varepsilon$$

für alle n hinreichend groß. Es gilt also $\tau_n \rightrightarrows \tau$. Da

$$\int_{[0,1]} \tau_n = 0, \qquad n \geqslant 1,$$

gilt dies auch für τ. ◁

3 Ist

$$f:\ [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+2}, & \dfrac{1}{n+1} < |t| \leqslant \dfrac{1}{n}, \qquad n \geqslant 1, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

eine Treppenfunktion, eine Regelfunktion, oder keins von beidem?

▷ *Lösung* Dies ist keine Treppenfunktion, da sie unendlich viele verschiedene Werte annimmt. Sie ist aber der gleichmäßige Limes der Treppenfunktionen

$$f_n = f\chi_{(1/n+1,1]}$$

und deshalb eine Regelfunktion. ◁

4 *Vertauschungssatz* Eine Cauchyfolge (f_n) in R_a^b versehen mit der Supremumsnorm ist konvergent, und es gilt

$$\int_a^b \lim f_n = \lim \int_a^b f_n .$$

▷ *Lösung* Dies folgt aus der Definition des Regelintegrals. Eine Cauchyfolge (f_n) in R_a^b bezüglich $\|\cdot\|_{[a,b]}$ ist auch eine Cauchyfolge in $B_a^b \subset R_a^b$ und hat dort einen Grenzwert $f \in B_a^b$. Da aber R_a^b in B_a^b abgeschlossen ist, ist auch $f \in R_a^b$, also integrierbar. Die behauptete Gleichung ist dann gerade die Stetigkeit von J_a^b auf R_a^b. ◁

Votieraufgaben

1 Das Produkt zweier Regelfunktionen ist wieder eine Regelfunktion.

▹ *Lösung* Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion genau dann, wenn sie in jedem Punkt von I einseitige Grenzwerte besitzt. Die Sätze für Funktionsgrenzwerte gelten nun genauso gut für einseitige Grenzwerte. Sind also $g, h\colon I \to \mathbb{R}$ zwei Regelfunktionen, so besitzt auch das Produkt $gh\colon I \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt von I einseitige Grenzwerte, ist also eine Regelfunktion. ◃

2 Ist die Funktion

$$f\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+2}, & \dfrac{1}{n+1} < t \leqslant \dfrac{1}{n}, \qquad n \geqslant 1, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

eine Treppenfunktion, eine Regelfunktion, oder keins von beidem?

▹ *Lösung* Eine etwas einfachere, gleichwertige Formulierung betrachtet die Funktion

$$f\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+2}, & \dfrac{1}{n+1} < t \leqslant \dfrac{1}{n}, \ n = 1, 2, .., \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Dies ist keine Treppenfunktion, da sie unendlich viele verschiedene Werte annimmt. Sie ist aber der gleichmäßige Limes der Treppenfunktionen

$$f_n = f\chi_{(1/n+1,1]}$$

und deshalb eine Regelfunktion. ◃

3 Sind f und g auf dem Intervall I integrierbar, so auch fg, und es gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\int_I |fg| \leqslant \left(\int_I |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_I |g|^2\right)^{1/2}.$$

▹ *Lösung* Mit

$$\langle f, g\rangle := \int_I |fg|$$

gilt der Beweis für die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für ein Skalarprodukt auch hier. Dafür ist nicht erforderlich, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definit ist. ◃

4 Sei $f \in R_a^b$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varphi \in C([a,b])$ mit

$$\int_a^b |f - \varphi| < \varepsilon.$$

▹▸ *Lösung* Zunächst existiert aufgrund der Definition des Integrals eine Treppenfunktion $\varphi \in T_a^b$ mit

$$\int_a^b |f - \varphi| < \varepsilon/2.$$

Es genügt dann, zu φ eine stetige Funktion g zu finden mit

$$\int_a^b |\phi - g| < \varepsilon/2. \tag{†}$$

Die Treppenfunktion φ ist im Innern von $[a,b]$ außerhalb von endlich vielen Sprungstellen stetig. Es genügt somit weiter, nur diese Sprungstellen zu betrachten.

Betrachten wir der Einfachheit halber eine einzige Sprungstelle, als Prototyp zum Beispiel $\varphi = \operatorname{sgn}$ auf dem Intervall $[-1,1]$. Wählen wir g mit

$$g(t) = \begin{cases} \varphi(t), & |t| > \delta, \\ t/\delta, & |t| \leqslant \delta, \end{cases}$$

so ist, wie man leicht nachrechnet, g stetig mit

$$\int_{-1}^1 |\varphi - g| = \delta.$$

Überträgt man dies entsprechend auf die endlich vielen Sprungstellen von φ, so erhält man eine stetige Funktion g mit der Eigenschaft (†). ◂◃

Schriftaufgabe

5 Für die Funktion $f \in R_a^b$ gelte

$$f \geqslant 0, \qquad \int_a^b f = 0.$$

Dann ist $f_+ = f_- = 0$.

▹ *Lösung* Angenommen, es ist $f_+(c) \neq 0$ in einem Punkt $c \in [a,b)$. Wegen $f \geqslant 0$ ist dann $f_+(c) = \varepsilon > 0$. Dann existiert aber auch ein $\delta > 0$, so dass

$$f(t) > \varepsilon/2, \qquad c \leqslant t \leqslant c + \delta.$$

Dann gilt wegen $f \geqslant 0$ auch

$$\int_a^b f \geqslant \int_c^{c+\delta} f \geqslant \int_c^{c+\delta} \varepsilon/2 = \varepsilon\delta/2 > 0,$$

ein Widerspruch. — Entsprechend für f_-. ◃

Votieraufgaben

1 Bestimmen sie die folgenden Integrale.

a. $\displaystyle\int_0^\infty t^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ *b.* $\displaystyle\int_0^1 t\log t\,\mathrm{d}t$ *c.* $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$

d. $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-\cos t}\sin 2t\,\mathrm{d}t$ *e.* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}$

▹ *Lösung* *a.* $\displaystyle -2\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^\infty = 2$ *b.* $\displaystyle -\frac{1}{4}t^2\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}$

c. $\displaystyle -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\cos t\Big|_0^\infty = 1/2$

d. Mit $\sin 2t = 2\sin t\cos t$ erhält man

$$2(1+\cos t)\mathrm{e}^{-\cos t}\Big|_0^\pi = -\frac{4}{\mathrm{e}}.$$

e. Mit der Faktorisierung $t^3+1 = (t+1)(t^2-t+1)$ erhält man

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^3+1} &= \frac{1}{3}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{3}\frac{t-2}{t^2-t+1}\\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{6}\frac{8t-4}{(2t-1)^2+3} + \frac{2}{(2t-1)^2+3}\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} &= \frac{1}{6}\ln\frac{(t+1)^2}{(2t-1)^2+3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^\infty\\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$ ◃

2 *a.* Das Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

konvergiert, aber nicht absolut.

b. Was gilt für das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega t}{t}\,\mathrm{d}t$$

als Funktion von $\omega > 0$?

▷ *Lösung* *a.* Einerseits gilt

$$\int_0^r \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{\cos t}{t}\Big|_1^r + \int_0^r \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t,$$

und der Grenzwert für $r \to \infty$ existiert offensichtlich. Andererseits gilt

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{|t|}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{n\pi}, \qquad n \geqslant 2.$$

Das Absolutintegral divergiert daher wie die harmonische Reihe.

b. Substitution ergibt

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad \omega > 0.$$ ◁

3 Die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei monoton und integrierbar. Dann existiert für jedes $h > 0$ die Reihe $\sum_{n\geqslant 0} f(nh)$, und es gilt

$$\lim_{h\to 0} h \sum_{n\geqslant 0} f(nh) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t.$$

▷ *Lösung* Wir können annehmen, dass f positiv ist und monoton fällt, andernfalls gehen wir zur Funktion $-f$ über. Das Integralkriterium 10.22 angewandt auf die Funktion $\varphi_h = hf(h\cdot)$ ergibt dann

$$h\sum_{n\geqslant 2} f(nh) \leqslant h\int_1^\infty f(ht)\,\mathrm{d}t = \int_h^\infty f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant h\sum_{n\geqslant 1} f(nh)$$

Da der Grenzwert des Integrals für $h \searrow 0$ existiert, existiert damit auch der Limes der Summen für $h \searrow 0$, und es folgt die Behauptung. ◁

4 Es sei f eine Regelfunktion auf $[a-1, b+1]$ und $\tau_h f \coloneqq f(\cdot + h)$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in (0,1)$, so dass

$$\int_a^b |\tau_h f - f| < \varepsilon, \qquad |h| < \delta.$$

▷ *Lösung* Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Treppenfunktion φ mit $\|f - \varphi\|_{[a,b]} < \varepsilon$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b |\tau_h f - f| &\leqslant \int_a^b |\tau_h(f-\varphi)| + |\tau_h\varphi - \varphi| + |\varphi - f| \\ &\leqslant 2\varepsilon(b-a) + \int_a^b |\tau_h\varphi - \varphi|.\end{aligned}$$

Für die charakteristische Funktion eines Intervalls I gilt nun offensichtlich

$$\int_a^b |\tau_h\chi_I - \chi_I| = 2\,|h|.$$

Für eine gegebene Treppenfunktion φ gibt es daher ein $\delta > 0$ so, dass ebenfalls

$$\int_a^b |\tau_h\varphi - \varphi| < \varepsilon(b-a), \qquad |h| < \delta.$$

Damit gilt dann insgesamt

$$\int_a^b |\tau_h f - f| < 3\varepsilon(b-a), \qquad |h| < \delta. \quad ◂$$

5 Beweisen sie die Existenz der sogenannten *Eulerschen Konstanten*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(s_n - \log n), \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

▸ *Lösung* Für $a_n = s_n - \log n$ und $m > n$ gilt

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} - \int_n^m \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \int_{k-1}^{k} \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{k} \right| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \leqslant \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Also bildet (a_n) eine Cauchyfolge. ◂

Schriftaufgabe

6 *Dirichletsches Konvergenzkriterium* Sei f eine stetige Funktion auf $[a,b)$ mit beschränkter Stammfunktion und g eine monotone C^1-Funktion auf $[a,b)$ mit $\lim_{t\to b} g(t) = 0$. Dann existiert das Integral von fg über $[a,b]$.

▸ *Lösung* Sei F eine Stammfunktion von f. Dann ist $M := \|F\|_{[a,b)} < \infty$ nach Voraussetzung. Für $a < c < u < v < b$ gilt dann

$$\int_u^v fg\,\mathrm{d}t = Fg\Big|_u^v - \int_u^v Fg'\,\mathrm{d}t,$$

also

$$\begin{aligned} \left| \int_u^v fg\,\mathrm{d}t \right| &\leqslant M\,|g(v) + g(u)| + M \int_u^v |g'|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant 2M\,|g(c)| + M \int_u^v |g'|\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Aufgrund der Monotonie von g wechselt g' das Vorzeichen nicht, so dass

$$\int_u^v |g'|\,\mathrm{d}t = \left| \int_u^v g'\,\mathrm{d}t \right| = |g(v) - g(u)| \leqslant |g(c)|.$$

Also gilt

$$\left| \int_u^v fg\,\mathrm{d}t \right| \leqslant 3M\,|g(c)| \to 0, \qquad c \to b. \quad ◂$$

Votieraufgaben

1 Bestimmen sie sämtliche Lösungen der Differenzialgleichung
a. $\dot{x} + x \sin t = \sin 2t$ *b.* $\dot{x} - 3x \tan t = 1$.

▷ *Lösung* *a.* $x(t) = 2(1 + \cos t) + c\mathrm{e}^{\cos t}$

b. $x(t) = \dfrac{c + 3\sin t - \sin^3 t}{3\cos^3 t}$ ◁

2 Man löse die folgenden Anfangswertprobleme.
a. $\dot{x} = x \sin t,\ x(0) = 0$ *b.* $t\dot{x} + x = x^2 \log t,\ x(1) = 1$
c. $\dot{x} = x \sin t + t^2 \exp(-\cos t),\ x(0) = 1$.

▷ *Lösung* Die allgemeine Lösung ist
a. $x(t) = c\mathrm{e}^{-\cos t}$, für die gesuchte ist $c = 0$.
b. $x(t) = (c + t^3/3)\mathrm{e}^{-\cos t}$, für die gesuchte ist $c = \mathrm{e}$.
c. $x(t) = \dfrac{c}{t} + \dfrac{1}{1 + \log t}$, für die gesuchte ist $c = 0$. ◁

3 Lösen sie die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^2, \qquad x > 0,$$

wobei $\alpha, \beta > 0$, mit der Substitution $x = 1/y$.

▷ *Lösung* Mit der Substitution $x = 1/y$ erhält man $\dot{y} = -\alpha y + \beta$ mit der allgemeinen Lösung

$$y(t) = c\mathrm{e}^{-\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha t}. \quad ◁$$

4 Bestimmen sie die allgemeine Lösung zu

$$\dot{z} = (2t^{-1} - 2t)z - 1, \qquad t > 0.$$

▷ *Lösung* Mit $A(t) = t^2 - \log t^2$ ist dies

$$z(t) = c\mathrm{e}^{-A(t)} - 1 = ct^2\mathrm{e}^{-t^2} - 1. \quad ◁$$

Schriftaufgabe

5 Man löse – mehr oder weniger explizit – die folgenden Anfangswertprobleme.
a. $\dot{x} = \dfrac{x \ln x}{\sin t},\quad x(\pi/2) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$ *b.* $\dot{x} = \dfrac{\cos t}{\cos^2 x},\quad x(\pi) = \pi/4$.
Hinweis: Machen sie bei der ersten Aufgabe einen sinnvollen Ansatz.

▹ *Lösung* *a.* Mit dem Ansatz $x = \exp(u)$ geht die Differenzialgleichung über in

$$\dot{u} = \frac{u}{\sin t}.$$

Separation der Variablen ergibt

$$u(t) = \exp\left(1 + \int_{\pi/2}^{t} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi}\right),$$

wobei die Anfangsbedingung bereits berücksichtigt ist.
b. Es ist $(2x + \sin 2x)' = 4\cos^2 x$. Separation der Variablen und Berücksichtigung der Anfangsbedingung ergibt daher

$$2x(t) + \sin 2x(t) = 1 + \frac{\pi}{2} + 4\sin t.$$

Diese Gleichung bestimmt die Lösung implizit. ◃

Votieraufgaben

1 *Abschneidefunktion* Man konstruiere zu jedem $\varepsilon > 0$ eine C^∞-Funktion

$$\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \to [0,1], \quad \varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqslant 1, \\ 0, & |t| \geqslant 1+\varepsilon. \end{cases}$$

▹▸ *Lösung* Man kann zum Beispiel die charakteristische Funktion des Intervalls $(-1-\varepsilon/2, 1+\varepsilon/2)$ mit einer glatten Diracfunktion falten, deren Träger in $(-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$ enthalten ist. ◂◃

2 Zu jeder Funktion $f \in C^1([a,b])$ existiert eine Folge von Polynomen p_n, so dass (p_n) gleichmäßig gegen f und (p_n') gleichmäßig gegen f' konvergiert.

▹▸ *Lösung* Sei $\varepsilon > 0$. Da auch f' stetig auf $[a,b]$ ist, existiert ein Polynom p, so dass

$$\|f' - p'\|_{[a,b]} < \varepsilon/(b-a).$$

Wir können auch noch eine Konstante – die ja bei der Ableitung wegfällt – so addieren, dass $p(a) = f(a)$. Dann ist für $a \leqslant t \leqslant b$

$$|f(t) - p(t)| \leqslant \int_a^t |f'(s) - p'(s)|\, \mathrm{d}s < \int_a^t \frac{\varepsilon}{b-a}\, \mathrm{d}s \leqslant \varepsilon.$$

Also ist auch

$$\|f - p\|_{[a,b]} < \varepsilon.$$

Da ε beliebig war, folgt die Behauptung. ◂◃

3 Skizzieren sie die folgenden Kurven.

a. $[0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\mathrm{e}^{-t/4}\cos t, \mathrm{e}^{-t/4}\sin t)$,

b. $[-1, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t^3, t^2)$,

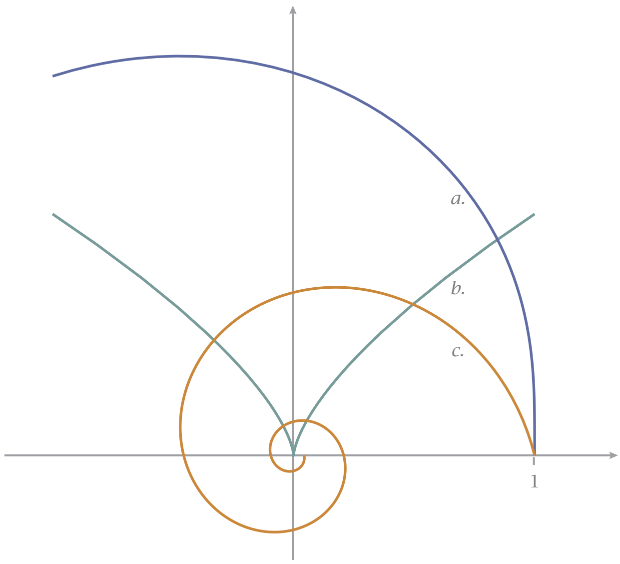
c. $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos t + (t/2)\sin t, \sin t - (t/2)\cos t)$,

d. $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

▹▸ *Lösung* Siehe Abbildung 1 und 2. ◂◃

4 Die erste Ableitung einer Kurve ist eindeutig bestimmt ist, wenn sie existiert.

Abb 1

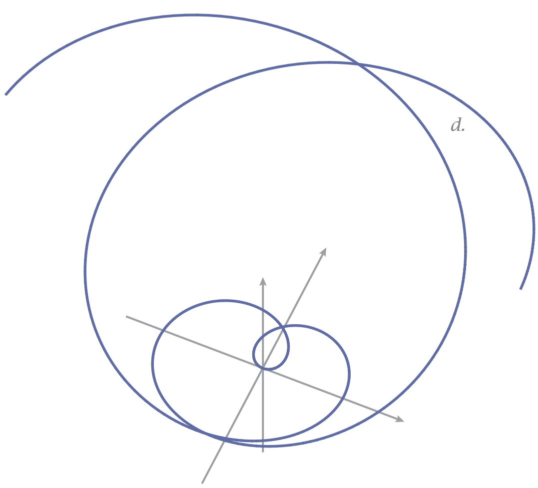


▹ *Lösung* Angenommen, es gibt zwei Vektoren v_1 und v_2 mit der Eigenschaft (1). Dann gilt

$$\lim_{t\to a} \frac{\|(v_1 - v_2)(t-a)\|_E}{|t-a|} = \lim_{t\to a} \|v_1 - v_2\|_E = 0,$$

also $v_1 = v_2$. ◃

Abb 2



Schriftaufgabe

5 Zu *jeder* reellen Folge $(a_n)_{n\geqslant 0}$ konstruiere man eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = a_n, \qquad n \geqslant 0.$$

Setze dazu

$$f = \sum_{n\geqslant 0} a_n \varphi((1+a_n^2)t)\, t^n$$

mit einer geeigneten Abschneidefunktion φ.

▹ *Lösung* Wähle eine Abschneidefunktion φ mit

$$\varphi(0) = 1, \qquad \varphi^{(n)}(0) = 0, \qquad n \geqslant 1$$

sowie $\varphi(t) = 0$ für $|t| \geqslant 1$. Dann ist

$$\varphi((1+a_n^2)t) = 0, \qquad |t| \geqslant \frac{1}{1+a_n^2},$$

und damit

$$|a_n \varphi((1+a_n^2)t)| \leqslant \frac{|a_n|}{1+a_n^2} \leqslant 1, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Die Reihe konvergiert also gleichmäßig auf $|t| < 1$ gegen eine, wie man zeigen kann, unendlich oft differenzierbare Funktion. Zu ihrer n-ten Ableitung bei 0 tragen nur diejenigen Terme bei, die keine Ableitung von φ enthalten, und von diesen auch nur der Term mit t^n. Das heißt, es ist

$$f^{(n)}(0) = a_n \varphi(0)\, (t^n)^{(n)} \Big|_{t=0} = a_n\, n!. \qquad ◃$$

Spaßaufgabe

6 *Peanokurve* Sei $u\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ eine stetige Funktion mit

$$u(t+2) = u(t), \qquad u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1/3, \\ 1, & 2/3 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Definiere

$$\gamma(t) = \sum_{k\geqslant 0} 2^{-k-1} \gamma_0(9^k t), \qquad \gamma_0(t) = (u(t), u(3t)).$$

Dann bildet γ das Intervall $[0,1]$ surjektiv auf $[0,1]^2$ ab.

▹ *Lösung* Sei

$$I_0 = [\tfrac{0}{9}, \tfrac{1}{9}], \quad I_1 = [\tfrac{2}{9}, \tfrac{3}{9}], \quad I_2 = [\tfrac{6}{9}, \tfrac{7}{9}], \quad I_3 = [\tfrac{8}{9}, \tfrac{9}{9}],$$
$$p_0 = (0,0), \quad p_1 = (0,1), \quad p_2 = (1,0), \quad p_3 = (1,1).$$

Für die Kurve γ_0 gilt dann aufgrund der Definition von u

$$\gamma_0(t) \equiv p_i \quad \text{für} \quad t \in I_i, \qquad i = 0,1,2,3.$$

Dementsprechend gilt für alle $k \geqslant 0$

$$\gamma_0(9^k t) \equiv p_i \quad \text{für} \quad 9^k t \bmod 2 \in I_i.$$

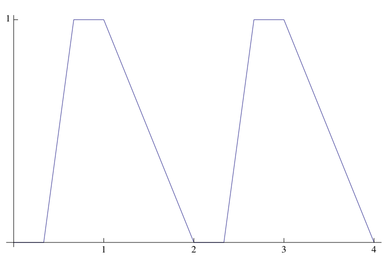
Definieren wir nun Intervalle $I_{i_0 i_1 \dots i_n} \subset [0,1]$ mit beliebigen $i_\kappa \in \{0,1,2,3\}$ durch

$$t \in I_{i_0 i_1 \dots i_n} \quad \Leftrightarrow \quad 9^k t \bmod 2 \in I_{i_k} \text{ für } k = 0,\dots,n,$$

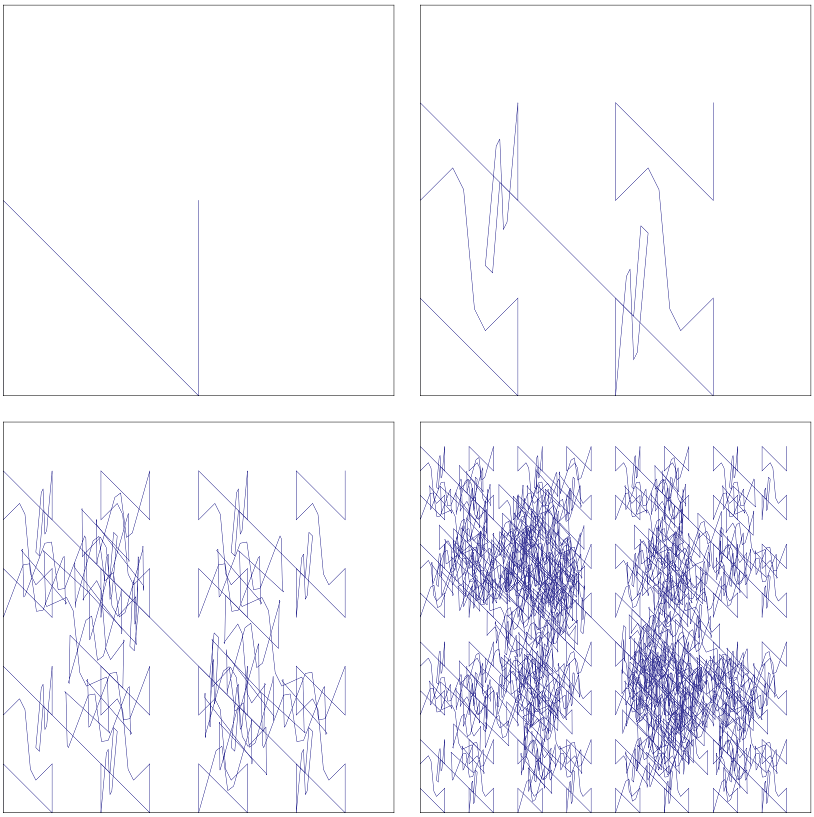
so sind diese Intervalle nicht leer, und es gilt

$$\gamma_n(t) := \sum_{k=0}^{n} 2^{-k-1} \gamma_k(t) \equiv \sum_{k=0}^{n} 2^{-k-1} p_{i_k} \quad \text{für} \quad t \in I_{i_0 i_1 \dots i_n}.$$

Da alle Kombinationen der Indizes i_κ möglich sind, trifft die Kurve γ_n somit alle Punkte auf dem Gitter $\mathbb{Z}^2/2^{n+1}$ innerhalb von $[0,1)^2$. Die Kurve γ_n ist deshalb 2^{-n-1}-dicht in $[0,1]^2$, gemessen in der Maximumsnorm. Als gleichmäßiger Limes der γ_n ist γ damit dicht in $[0,1]^2$ und deshalb eine Peanokurve.



Wählen wir u zum Beispiel wie oben, so sehen die ersten Kurven wie unten stehend aus. ◃



Votieraufgaben

1 Zeigen sie anhand der Kreiskurve $\gamma\colon [0,2\pi],\ \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, dass für Kurven im Allgemeinen der Mittelwertsatz *nicht gilt*. Woran liegt das?

▷ *Lösung* Würde der Mittelwertsatz gelten, so gäbe es zum Beispiel ein $s \in [0,2\pi]$ mit

$$\dot\gamma(s)(2\pi - 0) = \gamma(2\pi) - \gamma(0) = (0,0),$$

oder $\dot\gamma(s) = (-\sin s, \cos s) = (0,0)$. Das ist aber nicht möglich, da die Funktionen $\sin$ und $\cos$ keine gemeinsamen Nullstellen haben. ◁

2 Sei $\gamma\colon [a,b] \to E$ eine C^1-Kurve und $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ eine C^1-Parametertransformation. Dann gilt

$$L_{[a,b]}(\gamma) = L_{[c,d]}(\gamma \circ \varphi).$$

▷ *Lösung* Es ist $\dot\gamma_* = (\dot\gamma \circ \varphi)\,\dot\varphi$ und

$$\|\dot\gamma_*(t)\|_E = |\dot\varphi(t)|\,\|\dot\gamma(\varphi(t))\|_E\,.$$

Im Fall $\dot\varphi \geqslant 0$ ist $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$, und die Substitutionsregel ergibt

$$\int_a^b \|\dot\gamma_*(t)\|_E\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \|\dot\gamma(\varphi(t))\|_E\,\dot\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d \|\dot\gamma(s)\|_E\,\mathrm{d}s.$$

Im Fall $\dot\varphi \leqslant 0$ ist $\varphi(c) = b$ und $\varphi(d) = a$, und man erhält letzten Endes ebenfalls

$$\begin{aligned}\int_a^b \|\dot\gamma_*(t)\|_E\,\mathrm{d}t &= \int_{\varphi(d)}^{\varphi(c)} \|\dot\gamma(\varphi(t))\|_E\,(-\dot\varphi(t))\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_d^c \|\dot\gamma(s)\|_E\,\mathrm{d}s = \int_c^d \|\dot\gamma(s)\|_E\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

3 Zeigen Sie: Zwei verschiedene Stammfunktionen einer Kurve $\gamma \in C(I,\mathbb{R}^m)$ können sich nur durch eine additive Konstante $c \in \mathbb{R}^m$ unterscheiden.

▷ *Lösung* Siehe Skript. ◁

4 *a.* Zu jedem $s \in [1,3]$ existiert eine Kurve $\gamma_s\colon [0,1] \to [0,1]$ mit

$$L(\gamma_s) = s.$$

b. Es gibt eine Kurve $\gamma_*\colon [0,1] \to [0,1]$ mit

$$L(\gamma_*) = \infty.$$

▹ *Lösung* *a.* Schreibe $s = 1 + 2t$ mit $0 \leqslant t \leqslant 1$. Läuft man auf einem regulären Kurvenstück von 0 nach t, dann zurück nach 0 und schließlich nach 1, so hat die gesamte Kurve die Länge $1 + 2t = s$.
b. Auf dem Zeitintervall $[1/(n+1), 1/n]$ läufe man von 0 nach $1/n$ und zurück. Macht man dies fur jedes $n \geqslant 1$, so erhä£t man eine stetige Kurve mit Parameterintervall $[0,1]$ und unendlicher Länge. ◃

5 Man gebe Beispiele für Kurven $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften:
a. Injektiv auf $[0,1)$, aber nicht doppelpunktfrei.
b. Der zugehörige Weg ist regulär, diese Parametrisierung jedoch nicht.
c. Differenzierbar, aber nicht rektifizierbar.
d. Keine äquivalente Parametrisierung ist lipschitz.

▹ *Lösung* *a.* Eine Kurve in der Gestalt der Ziffer 6. Der rechte Rand von $[0,1]$ wird also auf einen Punkt im Innern der Kurve abgebildet.
b. Man nehme eine reguläre Kurve und parametrisiere sie so um, dass in einem Punkt die Ableitung verschwindet. Siehe Aufgabe 13.11.
c. Die Funktion

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} t^2 \sin 1/t^2, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

ist differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar. Ihr Graph ist nicht rektifizierbar.
d. Gäbe es eine lipschitzstetige Parametrisierung, so wäre die Kurve rektifizierbar. Also ist jede nicht rektifizierbare Kurve ein Beispiel. ◃

Schriftaufgabe

6 Sei I ein kompaktes Intervall und (γ_n) eine gleichmäßig konvergente Folge in $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ mit Grenzkurve γ.
a. Sind die γ_n rektifizierbar und ihre Längen $L(\gamma_n)$ gleichmäßig beschränkt, so ist auch γ rektifizierbar.
b. In diesem Fall gilt weiter $L(\gamma) \leqslant \liminf_{n\to\infty} L(\gamma_n)$.
c. Es gilt nicht notwendigerweise Gleichheit.
d. Die Behauptung gilt im Allgemeinen nicht mehr, wenn die Längen nicht gleichmäßig beschränkt sind.

▹ *Lösung* *a.* Sei $\varepsilon > 0$ und $T = (t_0, \dots, t_m)$ eine beliebige Teilung von I. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz existiert ein N, so dass

$$\|\gamma - \gamma_n\|_I \coloneqq \sup_{t \in I} \|\gamma(t) - \gamma_n(t)\| < \varepsilon/2m, \qquad n \geqslant N.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt dann

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leqslant {} & \sum_{i=1}^m \|\gamma_n(t_i) - \gamma_n(t_{i-1})\| \\ & + \sum_{i=1}^m \{\|\gamma(t_i) - \gamma_n(t_i)\| + \|\gamma_n(t_{i-1}) - \gamma(t_{i-1})\|\}\end{aligned}$$

und damit

$$\Sigma_T(\gamma) \leqslant \Sigma_T(\gamma_n) + 2m\,\|\gamma - \gamma_n\|_I \leqslant L(\gamma_n) + \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Da dies für alle $n \geqslant N$ gilt, muss es auch für das Infimum über alle $n \geqslant N$ gelten. Somit ist

$$\Sigma_T(\gamma) \leqslant \inf_{n \geqslant N} L(\gamma_n) + \varepsilon < \infty.$$

Also gilt auch

$$L(\gamma) \leqslant \inf_{n \geqslant N} L(\gamma_n) + \varepsilon < \infty,$$

Somit ist γ auf jeden Fall rektifizierbar. — Die letzte Ungleichung gilt bei gegeben ε für alle N hinreichend groß. Also gilt auch

$$L(\gamma) \leqslant \sup_N \inf_{n \geqslant N} L(\gamma_n) + \varepsilon = \liminf_n L(\gamma_n) + \varepsilon.$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $L(\gamma) \leqslant \liminf_n L(\gamma_n)$.
b. Gleichheit muss nicht gelten. Zum Beispiel haben alle Kurven

$$\gamma_n : \ [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \frac{1}{n}(\cos nt, \sin nt)$$

die Länge

$$L(\gamma_n) = \int_0^{2\pi} \|\dot\gamma_n(t)\|_e \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}t = 2\pi,$$

der gleichmäßige Limes dieser Kurven ist aber die Nullkurve mit Länge Null.
c. Ein Beispiel bildet die Folge der Kurven, die gleichmäßig gegen eine Peanokurve konvergiert. ◃

Votieraufgaben

1 Für ein beliebiges Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf dem $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle u,v\rangle = \langle Au,v\rangle_e$$

mit der symmetrischen Darstellungsmatrix $A = (\langle e_i,e_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

▹ *Lösung* Mit den Darstellungen

$$u = \sum_{i=1}^n u_i e_i, \qquad v = \sum_{j=1}^n v_j e_j$$

bezüglich der Standardbasis wird

$$\langle u,v\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} u_i v_j \langle e_i,e_j\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} u_i \alpha_{ij} v_j = \langle Au,v\rangle$$

mit $A = (\alpha_{ij})$. ◃

2 Sei $A\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei normierten Vektorräumen. Dann gilt $Ah = o(h)$ genau dann, wenn $A = 0$.

▹ *Lösung* Ist $Ah = o(h)$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\|Ah\| \leqslant \varepsilon \|h\|, \qquad \|h\| \leqslant \delta.$$

Dies wiederum impliziert, dass $\|A\| \leqslant \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist also $\|A\| = 0$ und damit $A = 0$. Die Umkehrung ist trivial. ◃

3 Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Dann gibt es zu jedem $A \in L(V,W)$ ein symmetrisches $Q \in L(V,W)$, so dass $\langle A\cdot,\cdot\rangle = \langle Q\cdot,\cdot\rangle$.

▹ *Lösung* Bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist die Adjungierte $Q^\top$ wohldefiniert. Es genügt dann,

$$A = \frac{1}{2}(Q + Q^\top)$$

zu setzen. ◃

4 Gegeben seien Funktionen $\varphi, f, g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$. Dabei sei φ stetig und

$$f(h) = O(h), \qquad g(h) = o(h).$$

Bestimmen sie (natürlich mit Beweis) die Ordnung von
a. $(f\circ g)(h)$ *b.* $g^2(h)$ *c.* $(\varphi f)(h)$ *d.* $(fg)(h)$ *e.* $g(h + f(h))$

▹ *Lösung* Nach Voraussetzung gilt lokal um 0

$$|f(h)| \leqslant M\,|h|, \qquad |g(h)|\,/\,|h| \to 0.$$

a. $(f \circ g)(h) = o(h)$, denn

$$\frac{|f(g(h))|}{|h|} \leqslant M\frac{|g(h)|}{|h|} \to 0.$$

b. $g^2(h) = o(h^2)$, denn

$$\frac{|\,g^2(h)\,|}{|h^2|} = \left(\frac{|g(h)|}{|h|}\right)^2 \to 0.$$

c. $(\varphi f)(h) = O(h)$, denn

$$|(\varphi f)(h)| \leqslant \|\varphi\|_{[-1,1]}\,|f(h)| \leqslant \|\varphi\|_{[-1,1]}\,M\,|h| = M'\,|h|\,.$$

d. $(fg)(h) = o(h^2)$, denn

$$\frac{|(fg)(h)|}{|h^2|} = \frac{|f(h)|}{|h|}\frac{|g(h)|}{|h|} \leqslant M\frac{|g(h)|}{|h|} \to 0.$$

e. $g(h+f(h)) = o(h)$. Denn $h+f(h) \to 0$ für $h \to 0$, und damit

$$\frac{|g(h+f(h))|}{|h|} = \frac{|g(h+f(h))|}{|h+f(h)|}\frac{|h+f(h)|}{|h|} \leqslant M\frac{|g(h+f(h))|}{|h+f(h)|} \to 0.$$ ◃

5 Sei I ein kompaktes Intervall und $C(I)$ mit der Supremumsnorm versehen. Dann ist

$$\Phi:\ C(I) \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(f) = \frac{1}{2}\int_I f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

differenzierbar mit

$$D\Phi(f)\eta = \int_I f(t)\eta(t)\,\mathrm{d}t.$$

▹ *Lösung* Es ist

$$\Phi(f+\eta) = \Phi(f) + \int_I f\eta\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_I \eta^2\,\mathrm{d}t,$$

wobei

$$\left|\int_I f\eta\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_I |f|\,\mathrm{d}t\,\|\eta\|_I, \qquad \left|\int_I \eta^2\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|\eta\|_I^2\,|I| = o(\|\eta\|_I).$$

Das erste Integral beschreibt somit eine beschränkte Linearform L auf $C(I)$, und es ist

$$\Phi(f+\eta) = \Phi(f) + L\eta + o(\|\eta\|_I).$$

Also ist $L\eta = D\Phi(f)\eta$. ◃

Schriftaufgabe

6 *Produktregel* Seien $\langle\cdot,\cdot\rangle: V\to\mathbb{R}$ ein Skalarprodukt und $f,g\colon V\to V$ differenzierbare Abbildungen. Zeigen sie, dass

$$\varphi:\ V\to\mathbb{R},\quad \varphi(x)=\langle f(x),g(x)\rangle$$

differenzierbar ist, und bestimmen sie die Ableitung.

▹▸ *Lösung* Mit $f(x+h)=f(x)+Df(x)h+o(h)$ und entsprechend für g erhält man

$$\begin{aligned}\varphi(x+h)&=\langle f(x),g(x)\rangle+\langle Df(x)h,g(x)\rangle+\langle f(x),Dg(x)h\rangle+o(h)\\&=\varphi(x)+\langle Df(x)^\top g(x)+Dg(x)^\top f(x),h\rangle+o(h).\end{aligned}$$

Also ist

$$\nabla\langle f,g\rangle(x)=Df(x)^\top g(x)+Dg(x)^\top f(x).$$

Oder man bestimmt aus $\varphi(x)=\sum_k f_k(x)g_k(x)$ die partiellen Ableitungen

$$\varphi_{x_i}(x)=\sum_k(g_kf_{k,x_i}+f_kg_{k,x_i})(x).$$ ◂◃

Votieraufgaben

1 *Mittelwertsatz für skalare Funktionen* Sei $f\colon V \hookrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Gehört $[u,v]$ zum Definitionsbereich von f, so gilt

$$f(v) - f(u) = Df(\xi)(v-u)$$

mit einem $\xi \in [u,v]$.

▹ *Lösung* In diesem Fall wird im Lemma von Hadamard $_{14.15}$ das Integral der stetigen *skalaren* Funktion $t \mapsto Df((1-t)u+tv)(v-u)$ auf $[0,1]$ gebildet. Der Mittelwertsatz der eindimensionalen Integralrechnung $_{10.6}$ ist hierauf anwendbar, und es gibt ein $\theta \in [0,1]$, so dass

$$\int_0^1 Df((1-t)u+tv)(v-u)\,\mathrm{d}t = Df((1-\theta)u+\theta v)(v-u).$$

Die Behauptung folgt daraus mit $\xi = (1-\theta)u + \theta v \in [u,v]$. ◃

2 Seien $f,g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $\varphi = fg$.
a. Bestimmen sie $D\varphi(x)h$ für $h \in \mathbb{R}^n$.
b. Bestimmen sie $\nabla\varphi(x)$ bezüglich des Standardskalarprodukts.

▹ *Lösung* *a.* Da f und g differenzierbar sind, ist

$$\begin{aligned}(fg)(x+h) &= (f(x)+Df(x)h+o(h))(g(x)+Dg(x)h+o(h))\\ &= (fg)(x)+f(x)Dg(x)h+g(x)Df(x)h+o(h).\end{aligned}$$

Also ist

$$D\varphi(x)h = [f(x)Dg(x)+g(x)Df(x)]\,h.$$

b. Es folgt, dass

$$\nabla(fg) = f\,\nabla g + g\,\nabla f.$$ ◃

3 Bestimmen sie die Jacobimatrizen der folgenden Abbildungen.
a. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ mit $f(x) = |x|_e^2$
b. $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(t) = (t^2\cos t, t^2\sin t, \sinh t)^\top$
c. $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(a,b,c,d) = (ab+cd, a^2c^2-b^2d^2)^\top$
d. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\sin y\sin z \\ x\sin y\cos z \\ x\cos y\end{pmatrix}$

▷ *Lösung* *a.* $Df(x) = 2x$.

b. $\dot f(t) = (2t\cos t - t^2 \sin t, 2t\sin t + t^2\cos t, \cosh t)^\top$.

c. $Df(x) = \begin{pmatrix} b & a & d & c \\ 2ac^2 & -2bd^2 & 2a^2c & -2b^2d \end{pmatrix}$.

d. $Df(x) = \begin{pmatrix} \sin y \sin z & x\cos y \sin z & x \sin y \cos z \\ \sin y \cos z & x \cos y \cos z & -x\sin y \sin z \\ \cos y & -x \sin y & 0 \end{pmatrix}$. ◁

4 *Kettenregel* Sind $\varphi\colon V \hookrightarrow V$ im Punkt a und $f\colon V \hookrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $\varphi(a)$ differenzierbar, so ist auch $f\circ\varphi\colon V \hookrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt a differenzierbar, und es gilt

$$\nabla(f\circ\varphi)(a) = D\varphi^\top(a)\nabla f(\varphi(a)).$$

▷ *Lösung* Mit der Kettenregel $_{14.7}$ gilt

$$\begin{aligned} D(f\circ\varphi)(a)h &= Df(\varphi(a))D\varphi(a)h \\ &= \langle \nabla f(\varphi(a)), D\varphi(a)h\rangle \\ &= \langle D\varphi^\top(a)\nabla f(\varphi(a)), h\rangle . \end{aligned}$$

Also ist $\nabla(f\circ\varphi)(a) = D\varphi^\top(a)\nabla f(\varphi(a))$ wie behauptet. ◁

5 *Variante des Lemmas von Hadamard* Sei $f \in C^2(\Omega)$ und $0 \in \Omega$. Dann gibt es Funktionen $g_1,..,g_n \in C^1(\Omega)$ so dass

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i g_i(x).$$

▷ *Lösung* Mit dem Hauptsatz und der Kettenregel ist

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(tx)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 f_{x_i}(tx)\,\mathrm{d}t.$$

Also können wir

$$g_i(x) = \int_0^1 f_{x_i}(tx)\,\mathrm{d}t$$

wählen. Diese Funktionen sind C^1, da f C^2 ist. ◁

Schriftaufgabe

6 Gegeben ist die Funktion

$$f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) \mathrel{\hat=} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}.$$

Zeigen sie, dass f alle partiellen Ableitungen *zweiter* Ordnung besitzt. Bestimmen sie diese Ableitungen, insbesondere im Nullpunkt.

▹▸ *Lösung* Außerdem des Nullpunkts ist die Funktion unendlich oft differenzierbar, und die Bestimmung der partiellen Ableitungen ersten und zweiter Ordnung ist eine reine Rechnerei. Aus

$$f_x = y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + 2x^2y^2\,\frac{x+y}{(x^2+y^2)^2},$$
$$f_y = x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 2x^2y^2\,\frac{x+y}{(x^2+y^2)^2},$$

folgt außerdem, dass die ersten und zweiten partiellen Ableitungen im Nullpunkt verschwinden.

Die Funktion ist im Nullpunkt jedoch nicht zweimal differenzierbar. Mit Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

und den Identitäten $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ und $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ wird

$$f(x,y) = r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\sin\varphi\cos\varphi$$
$$= \frac{r^2}{2}\cos 2\varphi\sin 2\varphi = \frac{r^2}{4}\sin 4\varphi.$$

Somit ist die zweite Richtungsableitung in einer Richtung mit $4\varphi \notin \pi\mathbb{Z}$ *nicht* Null. ◂◃

Votieraufgaben

1 Sei A eine beliebige $n \times n$-Matrix und

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \langle Ax, x \rangle .$$

Dann ist

$$\nabla f = (A + A^\top)x, \qquad Hf = A + A^\top.$$

▹▸ *Lösung* Mit der Produktregel ist

$$Df(x)h = \langle Ax, h \rangle + \langle Ah, x \rangle = \langle (A + A^\top)x, h \rangle ,$$

und weiter

$$D^2 f(x)h = \langle (A + A^\top)h, h \rangle .$$

Daraus folgen die Behauptungen. ◂◃

2 Untersuchen sie die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Extremalstellen.
a. $f(x,y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4$
b. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$
c. $f(x,y) = \exp(x^2 + y^2 - 8x^4 - 4y^4)$.

▹▸ *Lösung* Für

$$f_x = -6xy + 8x^3 = 0, \qquad f_y = 2y - 3x^2 = 0$$

ist $(x,y) = (0,0)$ die einzige Lösung. Es gibt also nur den einen kritischen Punkt $(0,0)$. Weiter ist

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -6y + 24x & -6x \\ -6x & 2 \end{pmatrix}, \qquad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Also hat $Hf(0,0)$ die beiden Eigenwerte 0 und 2 und ist positiv semidefinit. Dies reicht aber *nicht aus*, um auf ein lokales Minimum zu schließen. So ist

$$f_{xx}(0,y) = -6y < 0, \qquad y > 0,$$

was darauf hindeutet, dass *kein* Minimum vorliegt. Tatsächlich ist mit quadratischer Ergänzung $f(x,y) = (2y - 3x^2)^2/4 - x^4/9$ und somit

$$f(x,y)\Big|_{2y=3x^2} = -\frac{1}{9}x^4 < 0, \qquad x \neq 0.$$ ◂◃

3 Sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ und

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \varphi(\langle a, x\rangle)$$

mit einem festen Vektor $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ und $n \geqslant 2$. Dann ist jeder kritische Punkt von f degeneriert.

▹▸ *Lösung* Mit $\langle a, x\rangle = \sum_i a_i x_i$ erhält man

$$f_{x_i} = \varphi'(\langle a, x\rangle) a_i, \qquad f_{x_i x_j} = \varphi''(\langle a, x\rangle) a_i a_j,$$

also

$$Hf = \varphi''(\langle a, x\rangle)(a_i a_j)_{ij}.$$

Fassen wir a als Spaltenvektor auf, so besteht die Matrix $(a_i a_j)$ aus den Spalten

$$a_1 a, \; a_2 a, \; \dots, \; a_n a.$$

Für $a = 0$ hat diese Matrix Rang 0, sonst Rang 1. Im Fall $n \geqslant 2$ ist sie daher immer entartet. ◂◃

4 Sei $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und

$$v(r, \varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Dann gilt

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi}.$$

▹▸ *Lösung* Sei $c = \cos\varphi$ und $s = \sin\varphi$. Mit der Kettenregel erhält man

$$\begin{aligned} v_r &= u_x c + u_y s, \\ v_{rr} &= u_{xx} c^2 + 2u_{xy} sc + u_{yy} s^2, \\ v_\varphi &= -r(u_x s + u_y c), \\ v_{\varphi\varphi} &= -r(u_x c - u_y s) + r^2(u_{xx} s^2 - 2u_{xy} sc + u_{yy} c^2). \end{aligned}$$

Daraus folgt $v_{rr} + r^{-1} v_r + r^{-2} v_{\varphi\varphi} = u_{xx} + u_{yy}$. ◂◃

5 Seien a und b zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{R}^2$. Man bestimme den eindeutigen kritischen Punkt c der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\|x - a\|} + \frac{1}{\|x - b\|}$$

und ihr Taylorpolynom $T_c^2 f$.

▹ *Lösung* Es ist

$$\nabla \frac{1}{\|x\|} = -\frac{x}{\|x\|^3}.$$

An einem kritischen Punkt muss also gelten

$$\nabla f = -\frac{x-a}{\|x-a\|^3} - \frac{x-b}{\|x-b\|^3} = 0,$$

oder

$$\frac{x-a}{\|x-a\|^3} = -\frac{x-b}{\|x-b\|^3}. \qquad (\ddagger)$$

Nehmen wir die Norm von beiden Seiten, so folgt $\|x-a\| = \|x-b\|$, und damit folgt weiterhin aus $(\ddagger)$

$$x - a = -x + b.$$

Also ist der Mittelpunkt zwischen a und b,

$$m = \frac{a+b}{2},$$

der eindeutige kritische Punkt von f.

Für das zweite Taylorpolynom bei m müssen wir nur die Hessische $Hf(m)$ bestimmen. Es ist

$$f_{x_i x_j}(x) = 3\frac{x_i x_j}{\|x\|^5} - \frac{\delta_{ij}}{\|x\|^3}.$$

Ersetzen wir x durch

$$m - a = \frac{b-a}{2} =: u, \qquad m - b = \frac{a-b}{2} = -u$$

und setzen $r = \|u\|$, so erhalten wir

$$Hf(m) = \left(\frac{6u_i u_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3}\right)_{ij}.$$

Hierbei ist $(u_i u_j)_{ij} = uu^\top$. Ersetzen wir noch u durch den normierten Vektor $v = u/\|u\|$, so erhalten wir

$$Hf(m) = \frac{1}{r^3}(6vv^\top - I).$$

Diese Matrix ist übrigens indefinit, wie man entweder direkt oder durch geometrische Betrachtung zeigt. ◃

Schriftaufgabe

6 *Rayleighquotient* Für eine symmetrische $n \times n$-Matrix A heißt

$$\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

der *Rayleighquotient*. Bestimmen sie die kritischen Punkte x_0 von φ und die zugehörigen kritischen Werte $\varphi(x_0)$.

▹▸ *Lösung* Es ist

$$D\varphi(x)h = \frac{\langle Ax, h \rangle}{\langle x, x \rangle} - \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle^2} \langle x, h \rangle, = \frac{\langle Ax - \lambda x, h \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

mit

$$\lambda = \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}.$$

Also ist $D\varphi(x) = 0$ genau dann, wenn $Ax = \lambda x$. Das heißt, jeder kritische Punkt ist ein Eigenvektor, der zugehörige kritische Werte ist sein Eigenwert. Man beachte, dass diese kritischen Punkte nicht isoliert sind. ◂◃

Votieraufgaben

1 Man zeige: Eine auf einer konvexen Menge K eines Vektorraumes V definierte Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$ ist konvex genau dann, wenn ihr *Epigraph*

$$\operatorname{Epi}(f) \coloneqq \{(u,z) \in V \times \mathbb{R} : u \in K,\ z \geqslant f(u)\}$$

konvex in $V \times \mathbb{R}$ ist.

▹▸ *Lösung* $\Rightarrow$ Seien $u, \tilde{u} \in K$ und

$$f(u) \leqslant z, \qquad f(\tilde{u}) \leqslant \tilde{z}.$$

Für $0 < \lambda < 1$ ist dann auch

$$f((1-\lambda)u + \lambda\tilde{u}) \leqslant (1-\lambda)f(u) + \lambda f(\tilde{u}) \leqslant (1-\lambda)z + \lambda\tilde{z}.$$

Mit (u,z) und $(\tilde{u},\tilde{z})$ gehört also auch jede Lonvexkombination dieser Punkte zu $\operatorname{Epi}(f)$. Diese Menge ist somit konvex.

$\Leftarrow$ Betrachten wir insbesondere Punkte $(u, f(u))$ und $\tilde{u}, f(\tilde{u})$ in $\operatorname{Epi}(f)$ an, so impliziert die Konvexität dieser Menge gerade

$$f((1-\lambda)u + \lambda\tilde{u}) \leqslant (1-\lambda)f(u) + \lambda f(\tilde{u}).$$ ◂◃

2 Sei $M \subset V$ eine beliebige Menge. Dann ist

$$\operatorname{Conv}(M) \coloneqq \bigcap \{K \subset V : M \subset K \wedge K \text{ ist konvex}\},$$

die kleinste konvexe Menge in V, die M enthält.

▹▸ *Lösung* Der Durchschnitt konvexer Mengen ist offensichtlich wieder konvex. Ist K irgendeine konvexe Menge, die M enthält, so ist K in der Familie rechts enthalten. Folglich ist $\operatorname{Conv}(M) \subset K$, und damit die *kleinste* konvexe Menge, die M enthält. ◂◃

3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Ist $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ konvex, so sind es auch die Mengen

$$\Omega_c = \{x \in \Omega : f(x) < c\}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

▹▸ *Lösung* Seien $u, v \in \Omega_c$ und $0 < \lambda < 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)u + \lambda v) &\leqslant (1-\lambda)f(u) + \lambda f(v) \\ &< (1-\lambda)c + \lambda c \\ &= c, \end{aligned}$$

also auch $(1-\lambda)u + \lambda v \in \Omega_c$. ◂◃

4 Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer und konvex. Dann ist auch die Funktion

$$d: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad d(x) = \operatorname{dist}(x, K) := \inf_{u \in K} \|x - u\|$$

konvex.

▹ *Lösung* Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren dann Punkte $u, v \in K$, so dass

$$\|x - u\| \leqslant d(x) + \varepsilon, \qquad \|y - v\| \leqslant d(y) + \varepsilon.$$

Für $0 < \lambda < 1$ gilt dann, da auch $(1 - \lambda)u + \lambda v \in K$,

$$\begin{aligned} d((1-\lambda)x + \lambda y) &= \inf_{w \in K} \|(1-\lambda)x + \lambda y - w\| \\ &\leqslant \|(1-\lambda)x + \lambda y - (1-\lambda)u - \lambda v\| \\ &\leqslant (1-\lambda)\|x - u\| + \lambda \|y - v\| \\ &\leqslant (1-\lambda)(d(x) + \varepsilon) + \lambda(d(y) + \varepsilon) \\ &\leqslant (1-\lambda)d(x) + \lambda d(y) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, gilt auch

$$d((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)d(x) + \lambda d(y). \quad ◃$$

5 Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, kompakt und konvex. Ist $f: K \to \mathbb{R}$ stetig und konvex, so nimmt f ihr Supremum auf dem Rand von K an. Nimmt f auch im Innern von K sein Supremum an, so ist f konstant.

▹ *Lösung* Der Rand ∂K ist kompakt und f auch stetig auf ∂K. Somit gilt

$$M = \sup_{x \in \partial K} f(x) = f(p)$$

für wenigstens ein $p \in \partial K$. Jeder innere Punkt $x \in K^\circ$ – gibt es keine inneren Punkte, so ist auch nichts zu beweisen – ist eine Konvexkombination aus p und einem ›antipodalen‹ Randpunkt $q \in \partial K$, also

$$x = (1 - t)p + tq$$

für ein $t \in (0, 1)$. Folglich ist

$$f(x) \leqslant (1 - t)f(p) + tf(q) \leqslant (1 - t)M + tM = M.$$

Somit gibt es im Inneren keinen Punkt x mit $f(x) > M$.

Angenommen nun, es gibt zwei innere Punkt x und y mit

$$f(y) < f(x) = M.$$

Dann gibt es einen Randpunkt q, so dass $x = (1 - t)q + ty$ und somit

$$f(x) \leqslant (1 - t)f(q) + t(f(y) < M,$$

ein Widerspruch. Nimmt also f sein Supremum in einem inneren Punkt an, so ist f konstant. ◃

6 Sei $f\colon x \mapsto \langle a,x \rangle + b$ eine nicht-konstante, affine Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$. Dann nimmt f ihr Maximum über der konvexen Hülle von m Punkten $x_1,..,x_m$ in $\mathbb{R}^n$ in wenigstens einem dieser Punkte an.

▹▸ *Lösung* Jeder Punkt x in der konvexen Hülle K der Punkte $x_1,..,x_m$ ist eine Konvexkombination

$$x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} f(x) = \langle a,x \rangle + b &= \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle a,x_k \rangle + B \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \right) \max_{1 \leqslant k \leqslant m} \langle a,x_k \rangle + b = \langle a,x_{k_*} \rangle + b, \end{aligned}$$

denn das Maximum für wenigstens ein k_* in $\{1,..,k\}$ angenommen werden. Also nimmt auch f diesen Wert im zugehörigen Punkt x_{k_*} an. ◂◃

Schriftaufgabe

7 Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strikt konvex und *koerziv*, das heißt

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = \infty,$$

so besitzt f genau eine lokale Minimalstelle x_0, und es gilt $f(x_0) = \min_{\mathbb{R}^n} f$.

▹▸ *Lösung* Aufgrund der Koerzivität existiert eine abgeschlossene Kugel $B = B_r^-(0)$ so, dass

$$f|_{\mathbb{R}^n \setminus \{B\}} > f(0).$$

Da jede auf $\mathbb{R}^n$ konvexe Funktion außerdem stetig ist, gilt deshalb

$$m \coloneqq \inf_{\mathbb{R}^n} f = \inf_B f = \min_B f > -\infty,$$

und es gibt mindestens einen Punkt x_0 mit $f(x_0) = m$. Gäbe es eine weitere solche Minimalstelle $\tilde{x}_0 \neq x_0$, so wäre f auf dem Innern der Verbindungsstrecke $[x_0,\tilde{x}_0]$ aufgrund der strikten Konvexität strikt kleiner als m. Das ist aber nicht möglich. Also ist x_0 eindeutig. ◂◃

Votieraufgaben

1 Sei φ integrierbar auf I. Dann ist

$$\Phi : [1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \Phi(p) = \left(\fint_I |\varphi(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{1/p}$$

monoton steigend.

Lösung Mit Hölder gilt für jedes $r > 1$ und konjugiertem Exponenten s

$$\fint_I |f| \leqslant \left(\fint_I 1^s \right)^{1/s} \left(\fint_I |f|^r \right)^{1/r} = \left(\fint_I |f|^r \right)^{1/r}.$$

Ersetzen wir $|f|$ durch $|\varphi|^p$ und ziehen die p-te Wurzel, so folgt

$$\left(\fint_I |\varphi|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\fint_I |\varphi|^{rp} \right)^{1/rp}$$

für jedes $p \geqslant 1$ und jedes $r > 1$. Das entspricht der Behauptung.

2 Für Funktionen $f_1, .., f_n \in R(I)$ und $p_1, .., p_n > 1$ mit $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$ gilt

$$\int_I \prod_{i=1}^{n} |f_i(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\int_I |f_i(t)|^{p_i} \, \mathrm{d}t \right)^{1/p_i}.$$

Lösung Für $n = 2$ ist dies Hölder. Der Fall $n > 2$ folgt durch Induktion ganz analog zum Beweis der allgemeinen Konvexitätsungleichungen.

3 Finden Sie zwei 2×2-Matrizen A und B, für die

$$(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2, \qquad \mathrm{e}^{A+B} \neq \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B.$$

Lösung Wähle zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für $X \in \{A, B\}$ rechnet man nach, dass

$$AX = 0, \qquad BX = X.$$

Also ist auch $(A + B)X = X$ und

$$(A + B)^n = A + B, \qquad n \geqslant 1.$$

Dagegen ist zum Beispiel

$$A^2 + 2AB + B^2 = B \neq (A + B)^2.$$

Ebenso folgt, mit $\lambda = \mathrm{e} - 1$,

$$\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B = I + \lambda B, \qquad \mathrm{e}^{A+B} = I + \lambda(A + B).$$

4 Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum mit einer Multiplikation, für die

$$\|AB\| \leqslant C\,\|A\|\,\|B\|$$

mit einer gewissen Konstanten $C > 0$ gilt. Dann gibt es auch eine *adaptierte Norm* $\|\cdot\|_a$, für die $C = 1$ gilt und E somit eine Banachalgebra wird.

▷ *Lösung* Mit $\|X\|_a \coloneqq C\,\|X\|$ gilt

$$\|AB\|_a = C\,\|AB\| \leqslant C^2\,\|A\|\,\|B\| = \|A\|_a\,\|B\|_a\,.$$ ◁

5 Es ist φ eine Lösung von $\dot{x} = Ax$ zum Anfangswert $x(t_0) = x_0$ genau dann, wenn $\tilde{\varphi} = \varphi(\cdot + t_0)$ eine Lösung zum Anfangswert $x(0) = x_0$ ist. Somit ist

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}x_0.$$

▷ *Lösung* Es ist $\tilde{\varphi}$ eine Lösung, denn

$$\dot{\tilde{\varphi}}(t) = \dot{\varphi}(t+t_0) = A\varphi(t+t_0) = A\tilde{\varphi}(t).$$

Und es ist $\tilde{\varphi}(0) = \varphi(t_0) = x_0$. Somit ist $\tilde{\varphi}(t) = \mathrm{e}^{tA}x_0$ und damit

$$\varphi(t) = \tilde{\varphi}(t-t_0) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}x_0.$$ ◁

Schriftaufgabe

6 Eine C^1-Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist von der Form $f(x) = \langle a, x\rangle + b$ genau dann, wenn sowohl f als auch $-f$ konvex sind.

▷ *Lösung* Ist f auf $\mathbb{R}^n$ konvex, so gilt

$$f(x) \geqslant f(0) + \langle \nabla f(0), x\rangle\,.$$

Ist auch $-f$ konvex, so gilt entsprechend $-f(x) \geqslant -f(0) - \langle \nabla f(0), x\rangle$, oder

$$f(x) \leqslant f(0) + \langle \nabla f(0), x\rangle\,.$$

Also gilt

$$f(x) = f(0) + \langle \nabla f(0), x\rangle\,.$$

Umgekehrt gilt für jede Funktion mit $f(x) = \langle a, x\rangle + b$ die Identität

$$\begin{aligned} f(tu + (1-t)v) &= \langle a, tu + (1-t)v\rangle + b \\ &= t\,\langle a, u\rangle + (1-t)\,\langle a, v\rangle + tb + (1-t)b \\ &= tf(u) + (1-t)f(v). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Konvexität von f und $-f$. ◁

Votieraufgaben

1 Klassifizieren und skizzieren sie alle Differenzialgleichungen $\dot{x} = Ax$ in der Ebene mit $\det A = 0$.

▹▸ *Lösung* Ein Eigenwert ist also 0. Somit bleiben die folgenden drei Möglichkeiten:
(i) Der zweite Eigenwert ist nicht 0.
(ii) Der zweite Eigenwert ist 0, und A ist nicht diagonalisierbar.
(iii) Es ist $A = 0$.
Im ersten Fall handelt es sich um einen entarteten Knoten, dessen Stabilitätstyp vom Vorzeichen des zweiten Eigenwertes bestimmt ist. Siehe Abbildung 3. — Im zweiten Fall ist der Eigenraum zum Eigenwert 0 eindimensional und besteht aus Gleichgewichtspunkten. Alle anderen Lösungskurven sind Geraden parallel zu diesem Eigenraum. Siehe Abbildung 6. — Der dritte Fall ist trivial. ◂◃

2 Schreiben Sie die allgemeine Lösung von

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda < 0,$$

in der Form $x = g(y)$ und skizzieren Sie diese Kurven.

▹▸ *Lösung* Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + bt \\ b \end{pmatrix}.$$

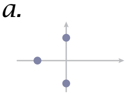
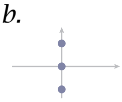
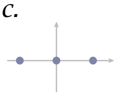
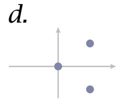
Skalieren wir die Lösung so, dass $b = 1$, so wird

$$y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}, \qquad t = \lambda^{-1} \log y$$

und damit

$$x = \mathrm{e}^{\lambda t}(a + t) = y(a + \lambda^{-1} \log y). \quad ◂◃$$

3 Zeichnen sie die Phasenportraits für folgende Konfigurationen von Eigenwerten eines linearen Systems $\dot{x} = Ax$ im $\mathbb{R}^3$.

a.

b.

c.

d.


▹ *Lösung* *a.* Es gibt eine invariante Ebene E mit einem Zentrum und eine dazu transversale Gerade g mit einem stabilen Knoten. Alle übrigen Lösungskurven sind Spiralen mit gleichbleibender Ausdehnung, die für $t \to \infty$ gegen jeweils eine periodische Lösung in E konvergieren.
b. Es gibt eine invariante Ebene E mit einem Zentrum und eine dazu transversale Gerade g bestehend aus Gleichgewichtspunkten. Alle übrigen Lösungskurven erhält man durch Parallelverschiebung von E in Richtung von g.
c. Es gibt eine invariante Ebene E mit einem Sattelpunkt und eine dazu transversale Gerade g bestehend aus Gleichgewichtspunkten. Alle übrigen Lösungskurven erhält man durch Parallelverschiebung von E in Richtung von g.
d. Es gibt eine invariante Ebene E mit einem instabilen Strudel und eine dazu transversale Gerade g bestehend aus Gleichgewichtspunkten. Alle übrigen Lösungskurven erhält man durch Parallelverschiebung von E in Richtung von g. ◃

4 Lösen sie das Anfangswertproblem $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ für folgende A und x_0.

a. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ *b.* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

▹ *Lösung* *a.* Wähle $a = b = 3/4$ in der allgemeinen Lösung

$$x(t) = a\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + b\mathrm{e}^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b. Wähle $a = 1$ und $b = -1$ in der allgemeinen Lösung

$$x(t) = a\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

c. Wähle $a = 3$ und $b = -9$ in der allgemeinen Lösung

$$x(t) = a\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix} + b\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}.$$ ◃

5 Betrachten sie die inhomogene n-dimensionale Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax + b$ mit $\det A \neq 0$. Bestimmen sie eine affine Transformation $x = Py + c$, die diese Gleichung in eine homogene Gleichung $\dot{y} = By$ transformiert. Bestimmen sie damit die allgemeine Lösung dieser Gleichung. Wie sieht diese Lösung aus, wenn $\det A = 0$?

▹ *Lösung* Differenziation von $x = Py + c$ ergibt

$$\dot{x} = Ax + b = A(Py + c) + b \overset{!}{=} P\dot{y}.$$

Mit $Ac + b = 0$, also $c = -A^{-1}b$, erhält man somit die homogene Differenzialgleichung

$$\dot{y} = By, \qquad B = P^{-1}AP.$$

Es genügt sogar, $P = I$ zu wählen. Damit wird $x = y + c$ und

$$\dot{y} = Ay.$$

Dessen allgemeine Lösung $y(t) = \mathrm{e}^{tA}y_0$ transformiert sich zurück zu

$$x(t) = \mathrm{e}^{tA}y_0 + c = \mathrm{e}^{tA}(x_0 - c) + c = \mathrm{e}^{tA}(x_0 + \mathrm{e}^{-tA} - c).$$

Mit

$$\mathrm{e}^{-tA}c - c = \mathrm{e}^{-sA}c\Big|_0^t = -\int_0^t \mathrm{e}^{-sA}Ac\,\mathrm{d}s = \int_0^t \mathrm{e}^{-sA}b\,\mathrm{d}s$$

erhält man

$$x(t) = \mathrm{e}^{At}\left(x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-As}b\,\mathrm{d}s\right).$$

Diese Gleichung gilt unabhängig davon, ob A regulär ist oder nicht. ◃

Schriftaufgabe

6 Betrachten sie im $\mathbb{R}^3$ die Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 2 & \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Zu welchem Diagonaloperator ist A ähnlich?
b. Welche Struktur hat die allgemeine Lösung?
c. Bestimmen sie die allgemeine Lösung explizit.
d. Lösen sie damit das Anfangswertproblem mit $x(0) = (2, 4, 3)^\top$.

▹▸ *Lösung* *a.* Da A die drei reellen Eigenwerte 1, 2, -1 besitzt, ist A zu $\operatorname{diag}(1,2,-1)$ ähnlich.

b. Die allgemeine Lösung hat daher die Gestalt

$$x(t) = a_1 e^t v_1 + a_2 e^{2t} v_2 + a_3 e^{-t} v_3$$

mit Eigenvektoren v_1, v_2, v_3 zu den entsprechenden Eigenwerten.

c. Die Eigenvektoren hierbei sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

d. Man erhält $a_1 = 1$, $a_2 = 6$ und $a_3 = 2$, also

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -2e^t + 6e^{2t} \\ e^t + 2e^{-t} \end{pmatrix}.$$ ◂◃

Votieraufgaben

1 *a.* Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt und v ein stetiges Vektorfeld auf V, für das mit einer Konstanten $a \geqslant 0$ gilt

$$\langle v(x), x\rangle \leqslant a(1+\|x\|^2), \qquad x \in V.$$

Dann gilt für jede Lösungskurve φ von v die Abschätzung

$$\|\varphi^t(x)\| \leqslant (1+\|x\|)\mathrm{e}^{at}, \qquad t \geqslant 0.$$

b. Was muss vorausgesetzt werden, damit Entsprechendes für $t \leqslant 0$ gilt?

▹▸ *Lösung* *a.* Für

$$\rho(t) \coloneqq 1 + \|\varphi^t(x)\|^2 = 1 + \langle\varphi^t(x), \varphi^t(x)\rangle$$

gilt

$$\begin{aligned}\dot\rho(t) &= 2\,\langle\dot\varphi^t(x), \varphi^t(x)\rangle \\ &= 2\,\langle v(\varphi^t(x)), \varphi^t(x)\rangle \leqslant 2a(1+\|\varphi^t(x)\|^2) = 2a\rho(t).\end{aligned}$$

Also ist $(\rho\mathrm{e}^{-2at})^{\boldsymbol\cdot} \leqslant 0$ und damit

$$\rho(t)\mathrm{e}^{-2at} \leqslant \rho(0) = 1 + \|x\|^2.$$

Daraus folgt

$$\|\varphi^t(x)\| \leqslant \sqrt{1+\|x\|^2}\,\mathrm{e}^{at} \leqslant (1+\|x\|)\mathrm{e}^{at}.$$

b. Damit dies auch für $t \leqslant 0$ gilt – mit $\mathrm{e}^{a|t|}$ an Stelle von e^{at} – muss auch

$$\langle v(x), x\rangle \geqslant -a(1+\|x\|^2)$$

gelten, insgesamt also

$$|\langle v(x), x\rangle| \leqslant a(1+\|x\|^2), \qquad x \in V. \quad ◂◃$$

2 Sei v ein C^1-Vektorfeld auf V und $\alpha\colon V \to \mathbb{R}$ eine positive C^1-Funktion. Dann besitzen die Vektorfelder v und $w = \alpha v$ dieselben Lösungskurven. Gilt das auch, wenn ›C^1‹ durch ›lokal lipschitz‹ oder ›stetig‹ ersetzt wird?

▹ *Lösung* Seien v und $\alpha > 0$ stetig. Wir zeigen zunächst, dass jede lokale Lösungskurve von v nach Umparametrisierung auch eine lokale Lösungskurve von $\tilde{v} = \alpha v$ darstellt.

Sei also $\varphi\colon I \to V$ eine lokale Lösung von

$$\dot{x} = v(x), \qquad x(0) = x_0.$$

Dann ist

$$\dot{\rho} = (\alpha \circ \varphi)(\rho), \qquad \rho(0) = 0,$$

eine stetige skalare Differenzialgleichung, besitzt also mindestens eine Lösung. Diese ist monoton steigend und lässt sich soweit auf ein gewisses Intervall $\tilde{I}$ fortsetzen, dass $\lambda\colon \tilde{I} \to I$ surjektiv ist. Die Kurve

$$\tilde{\varphi} = \varphi \circ \rho\colon\ \tilde{I} \to V$$

ist dann differenzierbar mit

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\varphi}}(t) &= (\dot{\varphi} \circ \rho)\dot{\rho} \\ &= (v(\varphi) \circ \rho)(\alpha \circ \varphi) \circ \rho \\ &= (\alpha v)(\varphi \circ \rho) \\ &= \tilde{v}(\tilde{\varphi}).\end{aligned}$$

Außerdem ist $\tilde{\varphi}(0) = \varphi(0) = x_0$. Somit ist jede lokale Lösungskurve von v nach Umparametrisierung auch eine lokale Lösungskurve von $\tilde{v} = \alpha v$, und ihre Spuren in V sind identisch.

Mit stetiger Fortsetzung gilt dies auch global. Somit ist die Spur jeder Lösungskurve von V auch die Spur einer Lösungskurve von $\tilde{v}$.

Dasselbe gilt aber auch umgekehrt. Denn ist $\tilde{v} = \alpha v$, so ist $v = \alpha^{-1}\tilde{v}$, und $\alpha^{-1}\colon V \to \mathbb{R}$ ist ebenfalls stetig und positiv. Somit entspricht auch jeder Lösungskurve von $\tilde{v}$ eine Lösungskurve von v. ◃

3 *Variante des Lemmas von Gronwall* Es gelte

$$u(t) \leqslant \int_0^t (a(s) + bu(s))\,\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

mit $u, a\colon [0, T] \to \mathbb{R}$ stetig und $b \geqslant 0$. Dann gilt

$$u(t) \leqslant \int_0^t a(s)\mathrm{e}^{b(t-s)}\,\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

▹ *Lösung* Setzt man

$$v(t) = \int_0^t (a(s) + bu(s))\,\mathrm{d}s,$$

so ist $v(0) = 0$ und

$$v'(t) = a(t) + bu(t) \leqslant a(t) + bv(t).$$

Hieraus folgt

$$(v(t)\mathrm{e}^{-bt})' \leqslant a(t)\mathrm{e}^{-bt},$$

und Integration über $[0, t]$ ergibt

$$v(t)\mathrm{e}^{-bt} = v(s)\mathrm{e}^{-bs}\Big|_0^t \leqslant \int_0^t a(s)\mathrm{e}^{-bs}\,\mathrm{d}s.$$

Das ergibt die Behauptung. ◃

4 *Allgemeines Lemma von Gronwall* Seien $u, a\colon [0, T] \to \mathbb{R}$ stetig, $b\colon [0, T] \to \mathbb{R}$ integrierbar und nicht-negativ, und

$$u(t) \leqslant a(t) + \int_0^t b(s)u(s)\,\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Dann gilt

$$u(t) \leqslant a(t) + \int_0^t a(s)b(s)\exp\left(\int_s^t b(r)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

▹ *Lösung* Der Beweis ist eine direkte Verallgemeinerung des Beweises des einfachen Lemmas. Sei also

$$v(t) \coloneqq a(t) + \int_0^t b(s)u(s)\,\mathrm{d}s.$$

Nehmen wir zunächst a als differenzierbar an, so ist

$$v'(t) = a'(t) + b(t)u(t) \leqslant a'(t) + b(t)v(t).$$

Also ist

$$(v(t)\mathrm{e}^{-B(t)})' \leqslant a'(t)\mathrm{e}^{-B(t)}, \qquad B(t) \coloneqq \int_0^t b(s)\,\mathrm{d}s.$$

Integration über $[0, t]$ und partielle Integration ergibt

$$v(t)\mathrm{e}^{-B(t)} \leqslant a(0) + \int_0^t a'(s)\mathrm{e}^{-B(s)}\,\mathrm{d}s = a(t)\mathrm{e}^{-B(t)} + \int_0^t a(s)b(s)\mathrm{e}^{-B(s)}\,\mathrm{d}s.$$

Also ist

$$v(t) \leqslant a(t) + \int_0^t a(s)b(s)\mathrm{e}^{B(t)-B(s)}\,\mathrm{d}s.$$

Mit $u(t) \leqslant v(t)$ ergibt dies die Behauptung. — Der allgemeine Fall folgt durch Approximation von a durch differenzierbare Funktionen von oben. ◃

Spaßaufgabe

5 *Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz* Ist das Vektorfeld v L-lipschitz auf der Kugel $B_r(x_0)$, so besitzt das Awp

$$\dot{x} = v(x), \quad x(0) = x_0$$

für hinreichend kleines $T > 0$ eine eindeutige Lösung $\varphi\colon [0,T] \to B_r(x_0)$. Beweisen sie diesen Satz, indem sie $E_T = \{\varphi \in C([0,T], V\}$ mit der üblichen Supremumsnorm

$$\|\varphi\|_{[0,T]} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\varphi(t)\|,$$

$X = \{\varphi \in E_T : \varphi(0) = x_0\}$ betrachten und den Beweis des globalen EE-Satzes 17.9 entsprechend anpassen.

Lösung Sei $K \coloneqq \sup_{x \in B_r(x_0)} \|v(x)\|$. Es ist $K < \infty$, da v lipschitz ist. Es genügt nun anzunehmen, dass

$$T < \min(1/L, r/K).$$

Zuerst ist zu zeigen, dass der Operator T aus dem Beweis von Satz 17.9 jede stetige Kurve $\varphi\colon [0,T] \to B_r(x_0)$ wieder in eine solche Kurve abbildet. Dies folgt aber aus

$$\begin{aligned} \|T\varphi(t) - x_0\| &= \left\| \int_0^t v(\varphi(s))\,\mathrm{d}s \right\| \\ &\leqslant \int_0^t \|v(\varphi(s))\|\,\mathrm{d}s \leqslant TK < r, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{aligned}$$

Dann ist noch die Kontraktionseigenschaft zu zeigen. Wie im Text ist für $0 \leqslant t \leqslant T$

$$\begin{aligned} \|(T\varphi - T\psi)(t)\| &\leqslant \int_0^t \|v(\varphi(s)) - v(\psi(s))\|\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_0^t L\,\|\varphi(s) - \psi(s)\|\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant LT\,\|\varphi - \psi\|_{[0,T]}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\|(T\varphi - T\psi)\|_{[0,T]} \leqslant LT\,\|\varphi - \psi\|_{[0,T]}.$$

Mit $LT < 1$ liegt also eine Kontraktion vor.