Diese Aufgaben sind nur ein warm-up und haben keine Votierpunkte!

1 Auf R_a^b ist J_a^b lipschitz. Genauer gilt auch hier

$$\left| J_a^b(f) - J_a^b(g) \right| \leqslant (b-a)\,\|f-g\|_{[a,b]}\,.$$

2 Die *Thomaefunktion* ist definiert als

$$\tau :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tau(x) \coloneqq \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1/q, & x = p/q \text{ mit teilerfremden } p,q \text{ und } q > 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: τ ist auf jedem Intervall $[a,b]$ integrierbar. Konstruieren sie auch eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen τ konvergiert.

3 Ist

$$f :\ [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+2}, & \dfrac{1}{n+1} < |t| \leqslant \dfrac{1}{n}, \qquad n \geqslant 1, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

eine Treppenfunktion, eine Regelfunktion, oder keins von beidem?

4 *Vertauschungssatz* Eine Cauchyfolge (f_n) in R_a^b versehen mit der Supremumsnorm ist konvergent, und es gilt

$$\int_a^b \lim f_n = \lim \int_a^b f_n.$$

Votieraufgaben

1 Das Produkt zweier Regelfunktionen ist wieder eine Regelfunktion.

2 Ist die Funktion

$$f\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+2}, & \dfrac{1}{n+1} < t \leqslant \dfrac{1}{n}, \qquad n \geqslant 1, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

eine Treppenfunktion, eine Regelfunktion, oder keins von beidem?

3 Sind f und g auf dem Intervall I integrierbar, so auch fg, und es gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\int_I |fg| \leqslant \left(\int_I |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_I |g|^2\right)^{1/2}.$$

4 Sei $f \in R_a^b$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varphi \in C([a,b])$ mit

$$\int_a^b |f - \varphi| < \varepsilon.$$

Schriftaufgabe

5 Für die Funktion $f \in R_a^b$ gelte

$$f \geqslant 0, \qquad \int_a^b f = 0.$$

Dann ist $f_+ = f_- = 0$.

Votieraufgaben

1 Bestimmen sie die folgenden Integrale.

a. $\int_0^\infty t^2 e^{-t}\,dt$ *b.* $\int_0^1 t\log t\,dt$ *c.* $\int_0^\infty e^{-t}\sin t\,dt$

d. $\int_0^\pi e^{-\cos t}\sin 2t\,dt$ *e.* $\int_0^\infty \frac{dt}{t^3+1}$

2 *a.* Das Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$$

konvergiert, aber nicht absolut.
b. Was gilt für das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega t}{t}\,dt$$

als Funktion von $\omega > 0$?

3 Die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei monoton und integrierbar. Dann existiert für jedes $h > 0$ die Reihe $\sum_{n\geqslant 0} f(nh)$, und es gilt

$$\lim_{h\to 0} h \sum_{n\geqslant 0} f(nh) = \int_0^\infty f(t)\,dt.$$

4 Es sei f eine Regelfunktion auf $[a-1, b+1]$ und $\tau_h f \coloneqq f(\cdot + h)$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in (0,1)$, so dass

$$\int_a^b |\tau_h f - f| < \varepsilon, \qquad |h| < \delta.$$

5 Beweisen sie die Existenz der sogenannten *Eulerschen Konstanten*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (s_n - \log n), \qquad s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Schriftaufgabe

6 *Dirichletsches Konvergenzkriterium* Sei f eine stetige Funktion auf $[a,b)$ mit beschränkter Stammfunktion und g eine monotone C^1-Funktion auf $[a,b)$ mit $\lim_{t\to b} g(t) = 0$. Dann existiert das Integral von fg über $[a,b]$.

Votieraufgaben

1 Bestimmen sie sämtliche Lösungen der Differenzialgleichung
a. $\dot{x} + x\sin t = \sin 2t$ *b.* $\dot{x} - 3x\tan t = 1$.

2 Man löse die folgenden Anfangswertprobleme.
a. $\dot{x} = x\sin t,\ x(0) = 0$ *b.* $t\dot{x} + x = x^2\log t,\ x(1) = 1$
c. $\dot{x} = x\sin t + t^2\exp(-\cos t),\ x(0) = 1$.

3 Lösen sie die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^2, \qquad x > 0,$$

wobei $\alpha, \beta > 0$, mit der Substitution $x = 1/y$.

4 Bestimmen sie die allgemeine Lösung zu

$$\dot{z} = (2t^{-1} - 2t)z - 1, \qquad t > 0.$$

Schriftaufgabe

5 Man löse – mehr oder weniger explizit – die folgenden Anfangswertprobleme.
a. $\dot{x} = \dfrac{x\ln x}{\sin t},\quad x(\pi/2) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$ *b.* $\dot{x} = \dfrac{\cos t}{\cos^2 x},\quad x(\pi) = \pi/4$.
Hinweis: Machen sie bei der ersten Aufgabe einen sinnvollen Ansatz.

Votieraufgaben

1 *Abschneidefunktion* Man konstruiere zu jedem $\varepsilon > 0$ eine C^∞-Funktion

$$\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \to [0,1], \quad \varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqslant 1, \\ 0, & |t| \geqslant 1 + \varepsilon. \end{cases}$$

2 Zu jeder Funktion $f \in C^1([a,b])$ existiert eine Folge von Polynomen p_n, so dass (p_n) gleichmäßig gegen f und (p_n') gleichmäßig gegen f' konvergiert.

3 Skizzieren sie die folgenden Kurven.

a. $[0,4\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\mathrm{e}^{-t/4}\cos t, \mathrm{e}^{-t/4}\sin t)$,
b. $[-1,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t^3, t^2)$,
c. $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos t + (t/2)\sin t, \sin t - (t/2)\cos t)$,
d. $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

4 Die erste Ableitung einer Kurve ist eindeutig bestimmt ist, wenn sie existiert.

Schriftaufgabe

5 Zu *jeder* reellen Folge $(a_n)_{n \geqslant 0}$ konstruiere man eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = a_n, \qquad n \geqslant 0.$$

Setze dazu

$$f = \sum_{n \geqslant 0} a_n \varphi((1 + a_n^2)t)\, t^n$$

mit einer geeigneten Abschneidefunktion φ.

Spaßaufgabe

6 *Peanokurve* Sei $u : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine stetige Funktion mit

$$u(t+2) = u(t), \qquad u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1/3, \\ 1, & 2/3 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Definiere

$$\gamma(t) = \sum_{k \geqslant 0} 2^{-k-1} \gamma_0(9^k t), \qquad \gamma_0(t) = (u(t), u(3t)).$$

Dann bildet γ das Intervall $[0,1]$ surjektiv auf $[0,1]^2$ ab.

Votieraufgaben

1 Zeigen sie anhand der Kreiskurve $\gamma\colon\ [0,2\pi],\ \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, dass für Kurven im Allgemeinen der Mittelwertsatz *nicht gilt*. Woran liegt das?

2 Sei $\gamma\colon\ [a,b] \to E$ eine C^1-Kurve und $\varphi\colon\ [c,d] \to [a,b]$ eine C^1-Parametertransformation. Dann gilt

$$L_{[a,b]}(\gamma) = L_{[c,d]}(\gamma \circ \varphi).$$

3 Zeigen Sie: Zwei verschiedene Stammfunktionen einer Kurve $\gamma \in C(I, \mathbb{R}^m)$ können sich nur durch eine additive Konstante $c \in \mathbb{R}^m$ unterscheiden.

4 *a.* Zu jedem $s \in [1,3]$ existiert eine Kurve $\gamma_s\colon\ [0,1] \to [0,1]$ mit

$$L(\gamma_s) = s.$$

b. Es gibt eine Kurve $\gamma_*\colon\ [0,1] \to [0,1]$ mit

$$L(\gamma_*) = \infty.$$

5 Man gebe Beispiele für Kurven $\gamma\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften:
a. Injektiv auf $[0,1)$, aber nicht doppelpunktfrei.
b. Der zugehörige Weg ist regulär, diese Parametrisierung jedoch nicht.
c. Differenzierbar, aber nicht rektifizierbar.
d. Keine äquivalente Parametrisierung ist lipschitz.

Schriftaufgabe

6 Sei I ein kompaktes Intervall und (γ_n) eine gleichmäßig konvergente Folge in $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ mit Grenzkurve γ.
a. Sind die γ_n rektifizierbar und ihre Längen $L(\gamma_n)$ gleichmäßig beschränkt, so ist auch γ rektifizierbar.
b. In diesem Fall gilt weiter $L(\gamma) \leqslant \liminf_{n\to\infty} L(\gamma_n)$.
c. Es gilt nicht notwendigerweise Gleichheit.
d. Die Behauptung gilt im Allgemeinen nicht mehr, wenn die Längen nicht gleichmäßig beschränkt sind.

Votieraufgaben

1 Für ein beliebiges Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle$ auf dem $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle u, v \rangle = \langle Au, v \rangle_e$$

mit der symmetrischen Darstellungsmatrix $A = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

2 Sei $A \colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei normierten Vektorräumen. Dann gilt $Ah = o(h)$ genau dann, wenn $A = 0$.

3 Sei $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Dann gibt es zu jedem $A \in L(V, W)$ ein symmetrisches $Q \in L(V, W)$, so dass $\langle A \cdot , \cdot \rangle = \langle Q \cdot , \cdot \rangle$.

4 Gegeben seien Funktionen $\varphi, f, g \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Dabei sei φ stetig und

$$f(h) = O(h), \qquad g(h) = o(h).$$

Bestimmen sie (natürlich mit Beweis) die Ordnung von

a. $(f \circ g)(h)$ *b.* $g^2(h)$ *c.* $(\varphi f)(h)$ *d.* $(fg)(h)$ *e.* $g(h + f(h))$

5 Sei I ein kompaktes Intervall und $C(I)$ mit der Supremumsnorm versehen. Dann ist

$$\Phi : \ C(I) \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(f) = \frac{1}{2} \int_I f^2(t) \, \mathrm{d}t$$

differenzierbar mit

$$D\Phi(f)\eta = \int_I f(t)\eta(t) \, \mathrm{d}t.$$

Schriftaufgabe

6 *Produktregel* Seien $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt und $f, g \colon V \to V$ differenzierbare Abbildungen. Zeigen sie, dass

$$\varphi : \ V \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$$

differenzierbar ist, und bestimmen sie die Ableitung.

Votieraufgaben

1 *Mittelwertsatz für skalare Funktionen* Sei $f\colon V \hookrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Gehört $[u,v]$ zum Definitionsbereich von f, so gilt

$$f(v) - f(u) = Df(\xi)(v-u)$$

mit einem $\xi \in [u,v]$.

2 Seien $f,g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $\varphi = fg$.
a. Bestimmen sie $D\varphi(x)h$ für $h \in \mathbb{R}^n$.
b. Bestimmen sie $\nabla\varphi(x)$ bezüglich des Standardskalarprodukts.

3 Bestimmen sie die Jacobimatrizen der folgenden Abbildungen.
a. $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ mit $f(x) = |x|_e^2$
b. $f\colon\ \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(t) = (t^2\cos t, t^2\sin t, \sinh t)^\top$
c. $f\colon\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(a,b,c,d) = (ab+cd, a^2c^2 - b^2d^2)^\top$
d. $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\sin y\sin z \\ x\sin y\cos z \\ x\cos y \end{pmatrix}$

4 *Kettenregel* Sind $\varphi\colon V \hookrightarrow V$ im Punkt a und $f\colon V \hookrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $\varphi(a)$ differenzierbar, so ist auch $f\circ\varphi\colon V \hookrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt a differenzierbar, und es gilt

$$\nabla(f\circ\varphi)(a) = D\varphi^\top(a)\nabla f(\varphi(a)).$$

5 *Variante des Lemmas von Hadamard* Sei $f \in C^2(\Omega)$ und $0 \in \Omega$. Dann gibt es Funktionen $g_1,..,g_n \in C^1(\Omega)$ so dass

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i g_i(x).$$

Schriftaufgabe

6 Gegeben ist die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) \mathrel{\hat{=}} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}.$$

Zeigen sie, dass f alle partiellen Ableitungen *zweiter* Ordnung besitzt. Bestimmen sie diese Ableitungen, insbesondere im Nullpunkt.

Votieraufgaben

1 Sei A eine beliebige $n \times n$-Matrix und

$$f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \langle Ax, x \rangle.$$

Dann ist

$$\nabla f = (A + A^\top)x, \qquad Hf = A + A^\top.$$

2 Untersuchen sie die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Extremalstellen.
a. $f(x,y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4$
b. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$
c. $f(x,y) = \exp(x^2 + y^2 - 8x^4 - 4y^4)$.

3 Sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ und

$$f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \varphi(\langle a, x \rangle)$$

mit einem festen Vektor $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ und $n \geqslant 2$. Dann ist jeder kritische Punkt von f degeneriert.

4 Sei $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und

$$v(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Dann gilt

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi}.$$

5 Seien a und b zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{R}^2$. Man bestimme den eindeutigen kritischen Punkt c der Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R}^2 \setminus \{a,b\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\|x-a\|} + \frac{1}{\|x-b\|}$$

und ihr Taylorpolynom $T_c^2 f$.

Schriftaufgabe

6 *Rayleighquotient* Für eine symmetrische $n \times n$-Matrix A heißt

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2}\frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

der *Rayleighquotient*. Bestimmen sie die kritischen Punkte x_0 von φ und die zugehörigen kritischen Werte $\varphi(x_0)$.

Votieraufgaben

1 Man zeige: Eine auf einer konvexen Menge K eines Vektorraumes V definierte Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$ ist konvex genau dann, wenn ihr *Epigraph*

$$\operatorname{Epi}(f) \coloneqq \{(u,z) \in V \times \mathbb{R} : u \in K,\ z \geqslant f(u)\}$$

konvex in $V \times \mathbb{R}$ ist.

2 Sei $M \subset V$ eine beliebige Menge. Dann ist

$$\operatorname{Conv}(M) \coloneqq \bigcap \{K \subset V : M \subset K \wedge K \text{ ist konvex}\},$$

die kleinste konvexe Menge in V, die M enthält.

3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Ist $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ konvex, so sind es auch die Mengen

$$\Omega_c = \{x \in \Omega : f(x) < c\}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

4 Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer und konvex. Dann ist auch die Funktion

$$d\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad d(x) = \operatorname{dist}(x,K) \coloneqq \inf_{u \in K} \|x-u\|$$

konvex.

5 Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, kompakt und konvex. Ist $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig und konvex, so nimmt f ihr Supremum auf dem Rand von K an. Nimmt f auch im Innern von K sein Supremum an, so ist f konstant.

6 Sei $f\colon x \mapsto \langle a,x\rangle + b$ eine nicht-konstante, affine Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$. Dann nimmt f ihr Maximum über der konvexen Hülle von m Punkten $x_1, .., x_m$ in $\mathbb{R}^n$ in wenigstens einem dieser Punkte an.

Schriftaufgabe

7 Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strikt konvex und *koerziv*, das heißt

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \infty,$$

so besitzt f genau eine lokale Minimalstelle x_0, und es gilt $f(x_0) = \min_{\mathbb{R}^n} f$.

Votieraufgaben

1 Sei φ integrierbar auf I. Dann ist

$$\Phi\colon\ [1,\infty)\to\mathbb{R},\quad \Phi(p)=\left(\fint_I |\varphi(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}$$

monoton steigend.

2 Für Funktionen $f_1,..,f_n\in R(I)$ und $p_1,..,p_n>1$ mit $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}=1$ gilt

$$\int_I \prod_{i=1}^n |f_i(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \prod_{i=1}^n \left(\int_I |f_i(t)|^{p_i}\,\mathrm{d}t\right)^{1/p_i}.$$

3 Finden Sie zwei 2×2-Matrizen A und B, für die

$$(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2,\qquad \mathrm{e}^{A+B}\neq \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B.$$

4 Sei $(E,\|\cdot\|)$ ein Banachraum mit einer Multiplikation, für die

$$\|AB\|\leqslant C\,\|A\|\,\|B\|$$

mit einer gewissen Konstanten $C>0$ gilt. Dann gibt es auch eine *adaptierte Norm* $\|\cdot\|_a$, für die $C=1$ gilt und E somit eine Banachalgebra wird.

5 Es ist φ eine Lösung von $\dot{x}=Ax$ zum Anfangswert $x(t_0)=x_0$ genau dann, wenn $\tilde{\varphi}=\varphi(\cdot+t_0)$ eine Lösung zum Anfangswert $x(0)=x_0$ ist. Somit ist

$$\varphi(t)=\mathrm{e}^{(t-t_0)A}x_0.$$

Schriftaufgabe

6 Eine C^1-Funktion $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ist von der Form $f(x)=\langle a,x\rangle+b$ genau dann, wenn sowohl f als auch $-f$ konvex sind.

Ana-2 12

Ss 2021 08.07.2021

Votieraufgaben

1 Klassifizieren und skizzieren sie alle Differenzialgleichungen $\dot{x} = Ax$ in der Ebene mit $\det A = 0$.

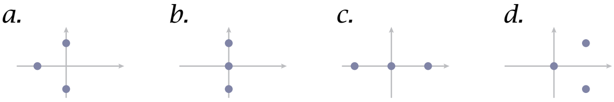
2 Schreiben Sie die allgemeine Lösung von

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda < 0,$$

in der Form $x = g(y)$ und skizzieren Sie diese Kurven.

3 Zeichnen sie die Phasenportraits für folgende Konfigurationen von Eigenwerten eines linearen Systems $\dot{x} = Ax$ im $\mathbb{R}^3$.

a. *b.* *c.* *d.*



4 Lösen sie das Anfangswertproblem $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ für folgende A und x_0.

a. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ *b.* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

5 Betrachten sie die inhomogene n-dimensionale Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax+b$ mit $\det A \neq 0$. Bestimmen sie eine affine Transformation $x = Py + c$, die diese Gleichung in eine homogene Gleichung $\dot{y} = By$ transformiert. Bestimmen sie damit die allgemeine Lösung dieser Gleichung. Wie sieht diese Lösung aus, wenn $\det A = 0$?

Schriftaufgabe

6 Betrachten sie im $\mathbb{R}^3$ die Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 2 & \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Zu welchem Diagonaloperator ist A ähnlich?
b. Welche Struktur hat die allgemeine Lösung?
c. Bestimmen sie die allgemeine Lösung explizit.
d. Lösen sie damit das Anfangswertproblem mit $x(0) = (2, 4, 3)^\top$.

Votieraufgaben

1 *a.* Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt und v ein stetiges Vektorfeld auf V, für das mit einer Konstanten $a \geqslant 0$ gilt

$$\langle v(x), x\rangle \leqslant a(1+\|x\|^2), \qquad x \in V.$$

Dann gilt für jede Lösungskurve φ von v die Abschätzung

$$\|\varphi^t(x)\| \leqslant (1+\|x\|)\mathrm{e}^{at}, \qquad t \geqslant 0.$$

b. Was muss vorausgesetzt werden, damit Entsprechendes für $t \leqslant 0$ gilt?

2 Sei v ein C^1-Vektorfeld auf V und $\alpha\colon V \to \mathbb{R}$ eine positive C^1-Funktion. Dann besitzen die Vektorfelder v und $w = \alpha v$ dieselben Lösungskurven. Gilt das auch, wenn ›C^1‹ durch ›lokal lipschitz‹ oder ›stetig‹ ersetzt wird?

3 *Variante des Lemmas von Gronwall* Es gelte

$$u(t) \leqslant \int_0^t (a(s) + bu(s))\,\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

mit $u, a\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ stetig und $b \geqslant 0$. Dann gilt

$$u(t) \leqslant \int_0^t a(s)\mathrm{e}^{b(t-s)}\,\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

4 *Allgemeines Lemma von Gronwall* Seien $u, a\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ stetig, $b\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ integrierbar und nicht-negativ, und

$$u(t) \leqslant a(t) + \int_0^t b(s)u(s)\,\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Dann gilt

$$u(t) \leqslant a(t) + \int_0^t a(s)b(s)\exp\left(\int_s^t b(r)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Spaßaufgabe

5 *Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz* Ist das Vektorfeld v L-lipschitz auf der Kugel $B_r(x_0)$, so besitzt das Awp

$$\dot{x} = v(x), \quad x(0) = x_0$$

für hinreichend kleines $T > 0$ eine eindeutige Lösung $\varphi\colon [0,T] \to B_r(x_0)$. Beweisen sie diesen Satz, indem sie $E_T = \{\varphi \in C([0,T], V\}$ mit der üblichen Supremumsnorm

$$\|\varphi\|_{[0,T]} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|\varphi(t)\|,$$

$X = \{\varphi \in E_T : \varphi(0) = x_0\}$ betrachten und den Beweis des globalen Ee-Satzes $_{17.9}$ entsprechend anpassen.