10

Integration

Der Flächeninhalt eines Rechtecks bestimmt sich aus dem Produkt der Längen seiner beiden Seiten. Doch wie bestimmt sich der Inhalt krummlinig begrenzter Flächen, beispielsweise einer Ellipse? Oder die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion und der Abszisse, wenn diese Funktion nicht konstant ist? Die naheliegende, bereits von Archimedes angewandte Idee ist, solche Flächen durch Rechteckflächen – deren Inhalt wir ja kennen – zu approximieren, die immer kleiner werden. Wenn alles gut geht, konvergiert die Summe ihrer Flächeninhalte gegen einen Wert, den wir als den Inhalt dieser krummlinig begrenzten Fläche *definieren* können.

Wir werden daher das Integral zuerst für sogenannte *Treppenfunktionen* definieren. Diese sind stückweise konstant, und ihr Integral ist nichts anderes als die mit Vorzeichen gewichtete Summe der zugehörigen Rechteckflächen. Dieses Integral repräsentiert somit unseren vertrauten Flächenbegriff.

Anschließend geht es darum, dieses Integral auf Funktionen auszudehnen, die sich durch Treppenfunktionen approximieren lassen. Diese Approximation kann allerdings auf unterschiedliche Weisen erfolgen, und führt zu unterschiedlichen Integralbegriffen wie dem Cauchy-, Riemann- oder Lebesgueintegral.

Wir beschränken uns hier auf das Cauchyintegral, auch Regelintegral genannt, da es für unsere unmittelbaren Zwecke ausreicht und am leichtesten zu definieren ist. Hier werden solche Funktionen betrachtet, die sich *gleichmäßig* durch Treppenfunktionen approximieren lassen.

10.1 Treppenfunktionen

Definition *Eine Zerlegung Z eines Intervalls $[a,b]$ ist ein Tupel $(t_0,..,t_n)$ reeller Zahlen mit*

$$a = t_0 < t_1 < .. < t_n = b.$$

Eine Funktion $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es eine derartige Zerlegung von $[a,b]$ und reelle Zahlen $c_1,..,c_n$ gibt, so dass

$$\varphi \mid (t_{k-1},t_k) = c_k, \qquad k = 1,..,n.$$

Der Raum aller Treppenfunktionen auf $[a,b]$ wird mit T_a^b bezeichnet. ⋊

Eine Treppenfunktion nimmt natürlich auch an den Teilungspunkten selbst gewisse Werte an. Diese gehen aber nicht in das zu definierende Integral ein und erhalten deshalb auch keine eigene Bezeichnung. Wir schreiben daher

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{(t_k,t_{k-1})}.$$

Da eine Treppenfunktion nur endlich viele verschiedene Werte annimmt, ist sie auch beschränkt. Es gilt also

$$\|\varphi\|_{[a,b]} = \sup_{t\in[a,b]} |\varphi(t)| < \infty$$

und damit $T_a^b \subset B_a^b \coloneqq B([a,b])$.

Verschiedene Treppenfunktionen φ und ψ basieren im Allgemeinen auf verschiedenen Zerlegungen. Fasst man aber die Teilungspunkte ihrer Zerlegungen zu einer gemeinsamen *Verfeinerung* zusammen, so lassen sich beide über derselben Zerlegung definieren. Dann ist auch $\lambda\varphi + \mu\psi$ wieder eine Treppenfunktion. Somit bilden alle Treppenfunktionen auf $[a,b]$ einen Vektorraum.

Abb 1

Eine Treppenfunktion

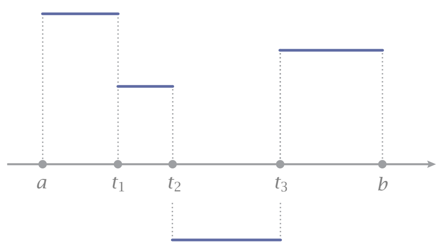
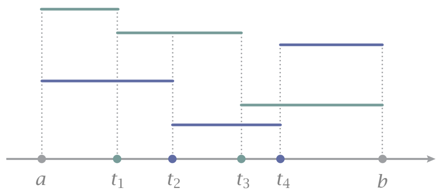


Abb 2

Gemeinsame Zerlegung zweier Treppenfunktionen



Notiz *Der Raum T_a^b aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a,b]$ ist ein reeller Untervektorraum von B_a^b.* ⋊

Die folgende Definition des Integrals einer Treppenfunktion verallgemeinert unsere Vorstellung des Flächeninhalts eines Rechtecks.

1 **Definition und Notiz** *Das Integral einer Treppenfunktion*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{(t_{k-1},t_k)}$$

mit $a = t_0 < t_1 < .. < t_n = b$ ist definiert als

$$J_a^b(\varphi) := \sum_{k=1}^{n} c_k (t_k - t_{k-1}).$$

Dieses Integral hängt nicht von der Darstellung von φ ab. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Seien φ_1 und φ_2 zwei Treppenfunktionen in T_a^b, die als Funktionen auf $[a,b]$ identisch sind, also in jedem Punkt denselben Wert annehmen, aber auf verschiedenen Zerlegungen Z_1 respektive Z_2 beruhen. Aus diesen Zerlegungen können wir immer eine gemeinsame Verfeinerung Z bilden. Der Übergang von Z_1 oder Z_2 zu Z besteht darin, in endlich vielen Schritten jeweils einem Teilintervall (t_{k-1}, t_k) einen weiteren Teilungspunkt $t_l \in (t_{k-1}, t_k)$ hinzuzufügen. Bei einem solchen Schritt wird in der Summe J_a^b der Term $c_k(t_k - t_{k-1})$ ersetzt durch

$$c_k(t_k - t_l) + c_k(t_l - t_{k-1}).$$

Dies ändert die Integralsumme offensichtlich nicht. Somit hängt $J_a^b(\varphi)$ nur von der Treppenfunktion selbst und nicht von ihrer Darstellung ab. ⟩⟩⟩⟩

▹ A. Die charakteristische Funktion χ_J eines beliebigen Intervalls $J \subset [a,b]$ ist eine Treppenfunktion, und

$$J_a^b(\chi_J) = |J|$$

ist die Länge dieses Intervalls.

B. Die Signum- und die Gaußklammerfunktion, eingeschränkt auf jedes beliebige Intervall $[a,b]$, sind Treppenfunktionen.

c. Eine Funktion φ_0, die nur an endlich vielen Punkten in $[a,b]$ nicht verschwindet, ist eine Treppenfunktion, und es ist $J_a^b(\varphi_0) = 0$. ◂

Das Integral ordnet jeder Treppenfunktion in T_a^b eine reelle Zahl zu. Wir erhalten also eine Funktion

$$J_a^b : T_a^b \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto J_a^b(\varphi).$$

Da es sich um eine *reellwertige* Funktion auf einem *Funktionenraum* handelt, spricht man in klassischer Terminologie auch von einem *Funktional*.

2 **Satz** *Das Funktional $J_a^b : T_a^b \to \mathbb{R}$ hat folgende Eigenschaften:*

(i) *Linearität:* $J_a^b(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda J_a^b(\varphi) + \mu J_a^b(\psi)$.

(ii) *Monotonie:* $\varphi \leqslant \psi \;\Rightarrow\; J_a^b(\varphi) \leqslant J_a^b(\psi)$.

(iii) *Normierung:* $\varphi = \chi_{[a,b]} \;\Rightarrow\; J_a^b(\varphi) = b - a$.

(iv) *Lipschitzstetigkeit:* $\left|J_a^b(\varphi) - J_a^b(\psi)\right| \leqslant (b-a)\,\|\varphi - \psi\|_{[a,b]}$. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Wählen wir für φ und ψ eine Darstellung mit einer gemeinsamen Zerlegung von $[a,b]$, so folgen die ersten zwei Behauptungen aus der Definition 1 von J_a^b. Ebenfalls aus der Definition folgt

$$\begin{aligned} |J_a^b(\varphi)| &= \left| \sum_{1\leqslant k\leqslant n} c_k(t_k - t_{k-1}) \right| \\ &\leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant n} |c_k|\,(t_k - t_{k-1}) \\ &\leqslant \max\{|c_1|,..,|c_n|\} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} (t_k - t_{k-1}) \leqslant \|\varphi\|_{[a,b]}\,(b-a). \end{aligned}$$

Wegen der Linearität von J_a^b folgt damit auch

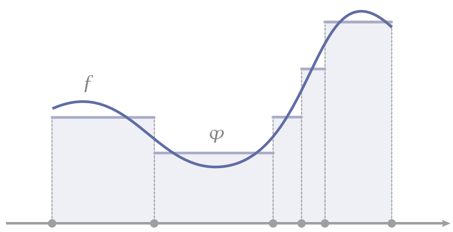
$$|J_a^b(\varphi) - J_a^b(\psi)| = |J_a^b(\varphi - \psi)| \leqslant \|\varphi - \psi\|_{[a,b]}\,(b-a).$$

Die dritte Behauptung ist offensichtlich. ⟩⟩⟩⟩

Für Treppenfunktionen haben wir somit ein Integral definiert, das unseren Vorstellungen entspricht. Dies sind aber noch nicht die Funktionen, die uns eigentlich interessieren – sie sind ja nicht einmal stetig. Dies erreichen wir jedoch

Abb 3

Regelfunktion f und approximierende Treppenfunktion φ



mit einer *stetigen Fortsetzung* des Funktionals J_a^b auf den Raum aller Funktionen, die sich durch Treppenfunktionen gleichmäßig approximieren lassen.

10.2 Das Cauchyintegral

Definition und Notiz *Eine Funktion $f \in B_a^b$ ist eine Regelfunktion genau dann, wenn es eine Folge (φ_n) von T_a^b gibt, so dass*

$$\varphi_n \rightrightarrows f.$$

Das Cauchyintegral einer solcher Funktion ist definiert als

$$J_a^b(f) := \lim J_a^b(\varphi_n)$$

und ist unabhängig von der Wahl der approximierenden Folge (φ_n). Der Raum aller Regelfunktionen auf $[a,b]$ wird mit R_a^b bezeichnet. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Angenommen, es gilt $\varphi_n \rightrightarrows f$ und $\psi_n \rightrightarrows f$ für zwei Folgen in T_a^b. Dann folgt $\|\varphi_n - \psi_n\|_{[a,b]} \to 0$ und damit [2]

$$|J_a^b(\varphi_n) - J_a^b(\psi_n)| = |J_a^b(\varphi_n - \psi_n)| \leqslant (b-a)\,\|\varphi_n - \psi_n\|_{[a,b]} \to 0.$$

Also ist $\lim J_a^b(\varphi_n) = \lim J_a^b(\psi_n)$, und das Integral ist wohldefiniert. ⟩⟩⟩⟩⟩

Dies ist im Moment eine sehr abstrakte Definition. Weder wissen wir, welche Funktionen genau Regelfunktionen sind, noch wie deren Integral zu bestimmen ist. Diese beiden Probleme werden wir in den nächsten Abschnitten behandeln.

Bemerkung Funktionalanalytisch betrachtet sind wir folgendermaßen vorgegangen. Der Raum T_a^b aller Treppenfunktionen auf $[a,b]$ ist ein reeller, aber nicht abgeschlossener Unterraum des Banachraumes B_a^b aller beschränkten Funktionen auf $[a,b]$, versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{[a,b]}$. Sein Abschluss ist der Raum aller Grenzwerte von Cauchyfolgen in T_a^b, also der Raum R_a^b:

$$T_a^b \subset (T_a^b)^- = R_a^b \subset B_a^b.$$

Das Funktional $J_a^b\colon T_a^b \to \mathbb{R}$ ist lipschitzstetig bezüglich dieser Norm und besitzt daher eine *eindeutige lipschitzstetige Fortsetzung* auf den Abschluss,

$$\bar{J}_a^b : \; R_a^b \to \mathbb{R}.$$

Der Einfachheit halber bezeichnen wir diese wieder mit demselben Symbol. ⊸

Wir notieren nun einige elementare Eigenschaften des Integrals auf R_a^b.

3 **Permanenzsatz** *Das Cauchyintegral*

$$J_a^b : R_a^b \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto J_a^b(f)$$

hat dieselben Eigenschaften wie seine Einschränkung auf T_a^b*, also Linearität, Monotonie, Normierung und Lipschitzstetigkeit.* ⋊

⟪⟪⟪ *Linearität:* Sind f und g gleichmäßige Limites der Treppenfunktionen φ_n respektive ψ_n, so ist $\lambda f + \mu g$ der gleichmäßige Limes der Treppenfunktionen $\lambda\varphi_n + \mu\psi_n$. Dann gilt aufgrund der Linearität auf T_a^b und der üblichen Grenzwertsätze

$$\begin{aligned} J_a^b(\lambda f + \mu g) &= \lim J_a^b(\lambda\varphi_n + \mu\psi_n) \\ &= \lim (\lambda J_a^b(\varphi_n) + \mu J_a^b(\psi_n)) \\ &= \lambda \lim J_a^b(\varphi_n) + \mu \lim J_a^b(\psi_n) \\ &= \lambda J_a^b(f) + \mu J_a^b(g). \end{aligned}$$

Monotonie: Wegen der Linearität des Funktionals genügt es zu zeigen, dass für $f \in R_a^b$ mit $f \geqslant 0$ auch $J_a^b(f) \geqslant 0$. Nun, gilt $\varphi_n \rightrightarrows f$ und $f \geqslant 0$, so gilt auch

$$\varphi_n^+ \rightrightarrows f, \qquad \varphi_n^+ \coloneqq \max(\varphi_n, 0) \geqslant 0.$$

Die φ_n^+ sind ebenfalls Treppenfunktionen, und es ist $J_a^b(\varphi_n^+) \geqslant 0$. Also ist auch

$$J_a^b(f) = \lim J_a^b(\varphi_n^+) \geqslant 0.$$

Normierung: Hier gibt es nichts Neues zu zeigen.
Lipschitzstetigkeit: Das ist eine Übungsaufgabe A-2. ⟫⟫⟫

4 **Intervalladditivität** *Sei* $c \in (a,b)$*. Dann gilt*

$$f \in R_a^b \quad \Leftrightarrow \quad f|_{[a,c]} \in R_a^c \ \wedge\ f|_{[c,b]} \in R_c^b,$$

und in diesem Fall gilt weiter $J_a^b(f) = J_a^c(f) + J_c^b(f)$. ⋊

⟪⟪⟪ Für Treppenfunktionen φ ist offensichtlich, dass

$$\varphi \in T_a^b \quad \Leftrightarrow \quad \varphi|_{[a,c]} \in T_a^c \ \wedge\ \varphi|_{[c,b]} \in T_c^b$$

sowie $J_a^b(\varphi) = J_a^c(\varphi) + J_c^b(\varphi)$. Gegebenenfalls fügt man c als weiteren Teilungspunkt hinzu. Entsprechendes gilt dann auch für die gleichmäßigen Limites von Treppenfunktionen. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} J_a^b(f) &= \lim J_a^b(\varphi_n) \\ &= \lim (J_a^c(\varphi_n) + J_c^b(\varphi_n)) \\ &= \lim J_a^c(\varphi_n) + \lim J_c^b(\varphi_n) = J_a^c(f) + J_c^b(f). \end{aligned}$$

5 **Zusatz** *Mit den Vereinbarungen* $J_a^a(f) = 0$ *und* $J_b^a(f) = -J_a^b(f)$ *für* $a < b$ *gilt*

$$J_a^b(f) = J_a^c(f) + J_c^b(f)$$

für beliebige a, b, c *und jede Regelfunktion* f*, die auf dem kleinsten, alle Integrationsgrenzen umfassenden Intervall definiert ist.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Dies ist eine Routinerechnung. Für $c < a < b$ haben wir beispielsweise $_4$

$$J_c^b(f) = J_c^a(f) + J_a^b(f).$$

Mit der Zusatzvereinbarung $_5$ ist dies äquivalent mit

$$J_a^b(f) = J_c^b(f) - J_c^a(f) = J_a^c(f) + J_c^b(f).$$ ⟩⟩⟩⟩⟩

Beginnend mit dem nächsten Satz verwenden wir die auf Leibniz zurückgehende Schreibweise für Integrale, die aus einem stilisierten *S* für *Summe* besteht.

Definition *Eine Funktion* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *heißt* *integrierbar* *genau dann, wenn sie eine Regelfunktion auf* $[a,b]$ *ist, also zu* R_a^b *gehört. Ihr* *Integral* *mit den* *Integrationsgrenzen* a *und* b *ist dann*

$$\int_a^b f := J_a^b(f).$$ ⋊

Die Intervalladditivität schreibt sich damit

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

für jede Funktion f, die auf einem alle Integrationsgrenzen umfassenden Intervall integrierbar ist.

6 **Dreiecksungleichung** *Ist* f *auf* $[a,b]$ *integrierbar, so auch* $|f|$*, und es gilt*

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|.$$ ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist f gleichmäßiger Limes der Treppenfunktionen φ_n, so ist $|f|$ gleichmäßiger Limes der Funktionen $|\varphi_n|$. Da diese ebenfalls Treppenfunktionen sind, ist auch $|f|$ eine Regelfunktion. Für jede Treppenfunktion φ_n gilt nun offensichtlich mit der entsprechenden Zerlegung

$$\left| \int_a^b \varphi_n \right| = \left| \sum_{k=1}^n c_k (t_k - t_{k-1}) \right| \leqslant \sum_{k=1}^n |c_k| \, (t_k - t_{k-1}) = \int_a^b |\varphi_n|.$$

Gehen wir zum Limes $n \to \infty$ über $_{5.9}$, so erhalten wir die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩