10. Vorlesung 18.5.2021

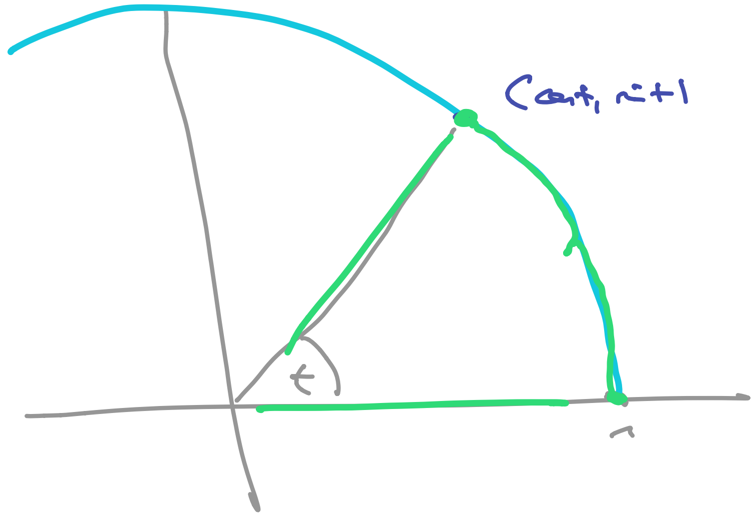
$\gamma : I \to E$ C^1-Kurve

$\dot{\gamma}(t)$ Geschwindigkeitsvektor

$\|\dot{\gamma}(t)\|_E$ Geschwindigkeit

Bsp.

1. Einheitskreis : $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$



$$L_{[0,t]}(\gamma) = \int_0^t \underbrace{\|\dot\gamma(s)\|_2}_{1}\, ds = t.$$

2. Graph Γ einer C^1-Funktion

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = (t, f(t))$$

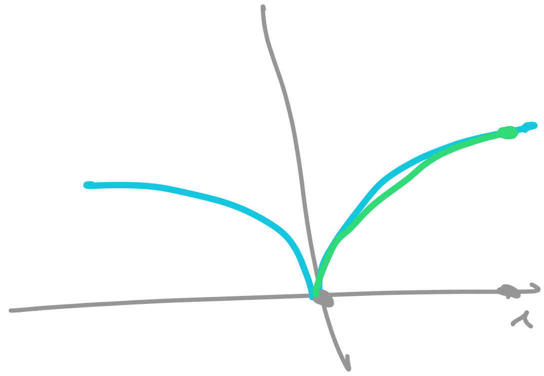
$$\|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$$

$$\boxed{L_I(\Gamma) = \int_I \sqrt{1+(f'(t))^2}\, dt}$$

3. Neil'sche Parabel :

$$x \longmapsto x^{2/3}$$

$$x \in [0,1]$$



$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{2/3}}}\, dx$$

$$x = t^3, \quad dx = 3t^2\, dt$$

$$= \int_0^1 3t^2 \sqrt{1 + \frac{4}{9t^2}}\, dt$$

$$= \int_0^1 t \cdot \sqrt{9t^2 + 4}\, dt$$

$$= \frac{1}{27}\left(9t^2 + 4\right)^{3/2} \Big|_0^1 = \ldots$$

4. Andere Parametrisierung:

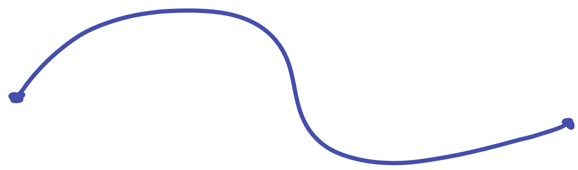
$$\gamma(t) = (t^3, t^2), \quad t \in [0,1]$$

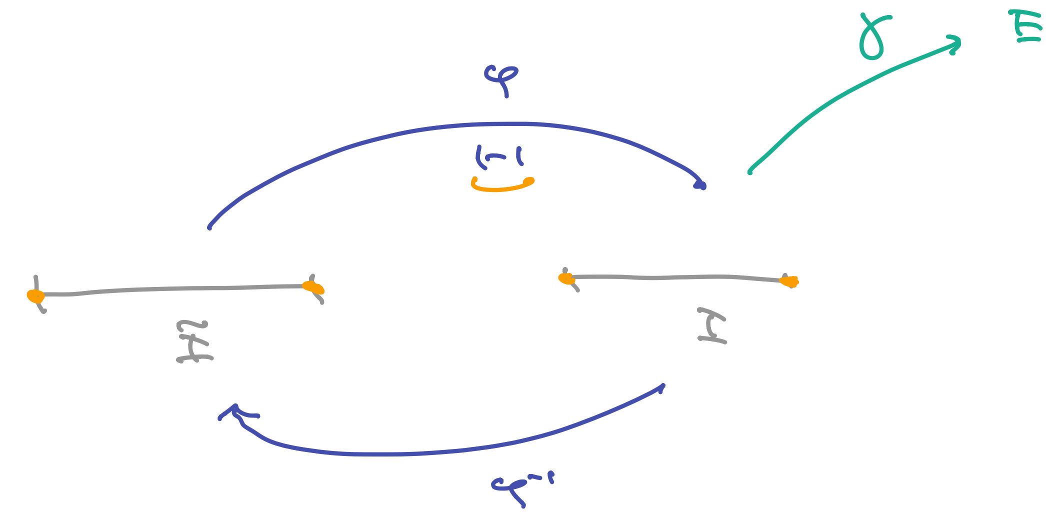
[illegible] genau wie 3.

$$\|\dot\gamma(t)\|_2 = \sqrt{9t^4 + 4t^2}$$

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{9t^4+4t^2}\,dt = \text{s.o. } (3.1$$

$\gamma : I \longrightarrow E$ stetig





$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi : \tilde{I} \longrightarrow E.$$

Param. bilden eine Gruppe:

Assoziativ

neutrales Element: $id : I \to I$

inverses Element $\varphi^{-1} : I \to \tilde{I}$

$$\varphi : \tilde{I} \longrightarrow I$$

homeomorphism

$$\begin{tikzcd}
\tilde{I} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend left, "\tilde{\gamma}"] & I \arrow[r, "\gamma"] & E
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\tilde{\gamma} \sim \gamma \quad : \quad \tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi.}$$

__Äquivalenzrelation :__

$\gamma \sim \gamma \quad : \quad \gamma = \gamma \circ \mathrm{id}$

$\gamma \sim \eta \quad : \quad \eta = \gamma \circ \varphi$

$\Rightarrow \gamma = \eta \circ \varphi^{-1}$

$\Rightarrow \eta \sim \gamma .$

$\gamma \sim \eta \wedge \eta \sim \chi \longrightarrow \gamma \sim \chi :$

$\gamma = \underline{\eta} \circ \varphi \wedge \eta = \chi \circ \psi$

$\Rightarrow \gamma = (\chi \circ \psi) \circ \varphi$

$= \chi \circ \underline{(\psi \circ \varphi)}$ ✓

Äquivalenzklasse = Weg

$\omega = [\gamma]$

Kurve

γ Repräsentant eines Wegs.

Bsp:

$\gamma_n : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\gamma_n(t) = (\cos nt, \sin nt)$

$\omega_n = [\gamma_n]$

$\omega_n = \omega_m \iff n = m.$

ω_n ist einfach $\iff |n| = 1.$

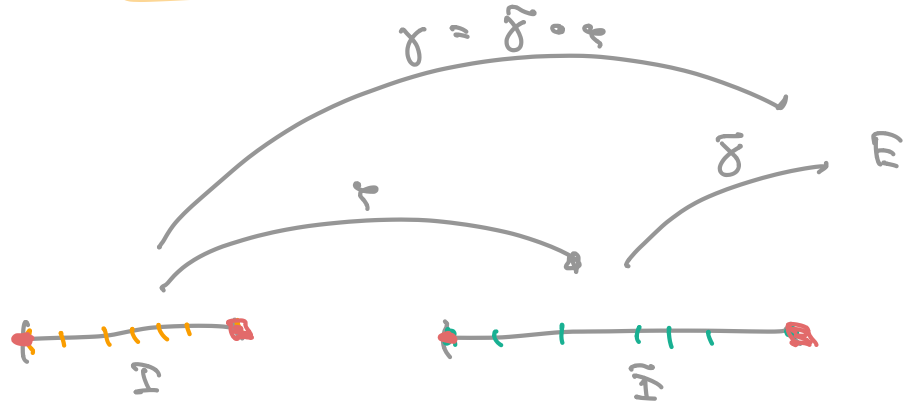
Beweis:

$$\gamma \in C(I, E)$$

$$\tilde\gamma \in C(\tilde I, E)$$

$$\varphi : I \to \tilde I \qquad \text{PT:}$$

$$\boxed{\gamma = \tilde\gamma \circ \varphi.}$$



Teilung T von I. Dann

Teilung $\tilde T = \varphi(T)$ von $\tilde I$

$$\varphi(T) = (\varphi(t_0), \ldots, \varphi(t_n))$$

$$\boxed{\underbrace{\tilde\gamma(\varphi}_{\gamma}(t_k)) - \tilde\gamma(\varphi(t_{k-1})) = \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}$$

Also:

$$\Sigma_{\tilde T}(\tilde\gamma) = \Sigma_{\varphi\circ T}(\tilde\gamma) \boxed{=} \Sigma_T(\gamma)$$

$$\Sigma_{\tilde T}(\tilde\gamma) = \Sigma_T(\gamma)$$

wobei $\tilde T = \varphi\circ T$.

Also

$$\Sigma_{\tilde T}(\tilde\gamma) \le L(\gamma)$$

Also auch

$$L(\tilde\gamma) \le L(\gamma).$$

Aus Symmetriegründen gilt aber auch

$$L(\gamma) \le L(\tilde\gamma).$$

Bsp:

$$L(\omega_n) = 2\pi|n|, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Bem.:

1. Für C^1-Kurven und C^1-PT garantiert Substitutionsregel im Kurvenintegral.

2. 

Besitzt im ∞ viele Param. mit unterschiedlicher Länge!

$\omega = [\gamma]$ glatt, wenn es wenigstens eine Param.

$\eta \sim \gamma$

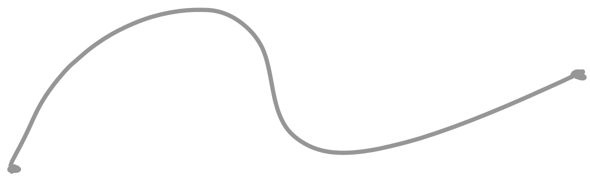
gibt mit: η ist C^1,

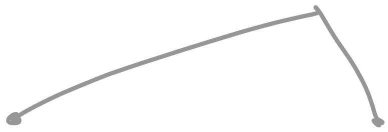
$\eta'(t) \neq 0$ auf dem ganzen Intervall.

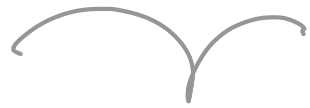
Dann: es existiert in jedem Punkt eine echte Tangente mit Richtungsvektor $\eta'(t) \neq 0$.

Also hat ω keine Spitzen und Ecken, ist also "glatt".

plane curve







Smooth plane curve

$\omega = [\gamma]$ and

$\gamma : [0, \ell] \longrightarrow E, \quad \ell = L(\omega)$

s.t.

$L_{[0,t]}(\gamma) = t \quad , \quad 0 \le t \le \ell .$

Equivalent:

$\|\gamma'(t)\|_E = 1 .$

Beweis: Sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow E$ eine reguläre Parametrisierung.

$$\lambda : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\lambda(s) = L_{[a,s]}(\gamma).$$

λ ist C^1,

$$\lambda'(s) = \|\dot\gamma(s)\|_E > 0.$$

Also λ streng monoton:

$$\lambda : [a,b] \longrightarrow [0,\ell].$$

ist umkehrbar, und somit

$$\varphi = \lambda^{-1} : [0,\ell] \longrightarrow [a,b]$$

und es gilt:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\lambda'(\varphi(t))} = \frac{1}{\|\dot\gamma(\varphi(t))\|_E} > 0.$$

Dann φ ist eine PT. Betrachte

$$\eta = \gamma \circ \varphi : [0,\ell] \longrightarrow E$$

Dann gilt:

$$\|\dot\eta(t)\|_E = \|\dot\gamma(\varphi(t))\|_E \, |\dot\varphi(t)|$$

$$= \frac{\|\dot\gamma(\varphi(t))\|_E}{\|\dot\gamma(\varphi(t))\|_E} = 1.$$

Dann gilt auch

$$L_{[0,t]}(\eta) = \int_0^t \|\dot\eta\|_E = t. \checkmark$$

Eindeutigkeit: Seien

$$\left.\begin{aligned} \eta &: [0,\ell) \longrightarrow E \\ \chi &: [0,\ell) \longrightarrow E \end{aligned}\right\}$$

Dann sind η und χ bzgl. äquivalent,

d.h. es ex. stetige PT

$$\varphi : [0,\ell] \longrightarrow [0,\ell)$$

mit

$$\eta = \chi \circ \varphi.$$

$$\varphi : [0, \ell] \to [0, \ell]$$

und

$$\gamma = \chi \circ \varphi .$$

Zu zeigen: $\varphi = \mathrm{id}$!

Dann: $\quad t = \varphi(s)$

$$s = L_{[0,s]}(\gamma)$$

$$= L_{[0,s]}(\chi \circ \varphi)$$

$$= L_{[\varphi(0), \varphi(s)]}(\chi)$$

$$= L_{[0, t]}(\chi)$$

$$= t .$$

Also: $\quad t = \varphi(s) = s$,

So $\quad \underline{\underline{\varphi = \mathrm{id}.}}$ $\square$

Bsp: Angenommen, Kurve in $\mathbb{R}^n$:

$\langle \cdot , \cdot \rangle$

γ nach Bogenlänge parametrisiert:

$$\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 1$$

Falls C^2:

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$$
$$= 2 \langle \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle$$

Also:

$$\dot{\gamma}(t) \perp \ddot{\gamma}(t). \qquad \blacksquare$$