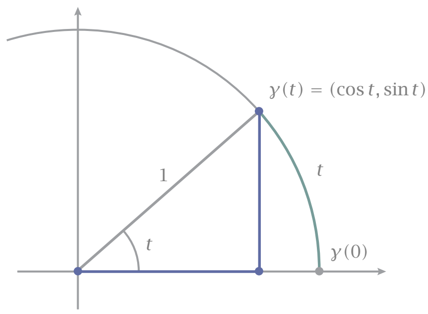
Abb 12

Bogenmaß des Winkels t



▹▸ A. Für die Parametrisierung des Einheitskreises $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ gilt $\|\dot\gamma(t)\|_2 = 1$ und damit

$$L_{[0,t]}(\gamma) = \int_0^t \mathrm{d}s = t.$$

Die Länge des Kreisbogens vom Punkt $\gamma(0) = (1,0)$ bis zum Punkt $\gamma(t)$ ist also t. Dieses Ergebnis hatten wir in Abschnitt 9.3 vorweggenommen.

B. Der Graph Γ einer C^1-Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ hat die euklidische Länge

$$L_I(\Gamma) = \int_I \sqrt{1 + (f')^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Dieses Integral ist allerdings meist nicht elementar integrierbar.

C. Für die Neilschen Parabel als Graph der Funktion $x \mapsto x^{2/3}$ über $[0,1]$ erhalten wir die Länge

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{2/3}}}\,\mathrm{d}x.$$

Mit der Substitution $x = t^3$ und $\mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t$ ergibt sich

$$L = \int_0^1 t^2\sqrt{9 + 4/t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\sqrt{9t^2+4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{27}\left(4+9t^2\right)^{3/2}\Big|_0^1.$$

Die Neilsche Parabel soll nach dem Kreis die erste Kurve gewesen sein, deren Bogenlänge man berechnen konnte.

D. Dasselbe Ergebnis erhalten wir (natürlich) mit der Parametrisierung $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ über $[0,1]$. Es ist

$$\|\dot\gamma(t)\|_2 = \sqrt{4t^2 + 9t^4},$$

und damit wieder

$$L = \int_0^1 \|\dot\gamma(t)\|_2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\sqrt{9t^2+4}\,\mathrm{d}t.$$ ◃

13.4 Wege

Die Spur einer Kurve γ lässt sich auf unterschiedlichste Weisen parametrisieren. Es stellt sich daher die Frage, ob die Länge einer Kurve von ihrer Parametrisierung abhängt. Oder anders gefragt: Ist es möglich, der *Spur* einer Kurve eine Länge zuzuordnen, ohne auf *irgendeine Parametrisierung* Bezug zu nehmen?

In dieser Allgemeinheit ist die Beantwortung dieser Frage schwierig. Sie ist Gegenstand der geometrischen Maßtheorie und erfordert zum Beispiel den Begriff des Hausdorffmaßes. Wir machen es uns etwas einfacher. Wir gehen davon aus, dass bereits eine Parametrisierung vorliegt, und fragen, welche *Änderungen* der Parametrisierung die Länge unverändert lassen. Dies führt zum Begriff der *Parametertransformation.*

Definition *Eine Parametertransformation ist eine bijektive stetige Abbildung $\varphi\colon \tilde I \to I$ eines Intervalls $\tilde I$ auf ein Intervall I. Sie heißt orientierungstreu, wenn sie den Anfangspunkt von $\tilde I$ auf den Anfangspunkt von I abbildet. Andernfalls heißt sie orientierungsumkehrend.* ⋊

Aufgrund des Satzes über Umkehrfunktionen$_{7.13}$ ist $\varphi^{-1}\colon I \to \tilde I$ ebenfalls bijektiv *und stetig*, also ebenfalls eine Parametertransformation. Außerdem ist die Komposition zweier Parametertransformationen wieder eine solche. Parametertransformationen bilden somit eine *Gruppe.*

Bijektive Abbildungen, wo Abbildung *und* Umkehrabbildung stetig sind, werden übrigens *Homöomorphismen* genannt. Eine Parametertransformation ist somit ein *Homöomorphismus zweier Intervalle.*

10 **Definition** *Zwei Kurven $\gamma \in C(I,E)$ und $\tilde\gamma \in C(\tilde I,E)$ heißen topologisch äquivalent, geschrieben $\tilde\gamma \sim \gamma$, wenn es eine orientierungstreue Parametertransformation $\varphi\colon \tilde I \to I$ gibt, so dass*

$$\tilde\gamma = \gamma \circ \varphi. \quad ⋊$$

Topologische Äquivalenz definiert eine *Äquivalenzrelation* im Raum aller Kurven in E. Für Kurven γ,η,χ in E gilt also$_{\text{A-10}}$

$$\gamma \sim \gamma, \qquad \gamma \sim \eta \;\Leftrightarrow\; \eta \sim \gamma, \qquad \gamma \sim \eta \;\wedge\; \eta \sim \chi \;\Rightarrow\; \gamma \sim \chi.$$

Definition *Die zu einer Kurve $\gamma \in C(I,E)$ gehörende Klasse*

$$\omega = [\gamma]$$

aller zu γ äquivalenten Kurven wird stetiger Weg oder kurz Weg in E genannt. Jedes Element $\eta \in \omega$ heißt eine Parametrisierung des Weges ω. ⋊

Bemerkung In der Literatur gibt es allerdings auch die umgekehrte Konvention, wo eine *Kurve* als Klasse äquivalenter Wege definiert wird. Was Kurven und Wege betrifft, muss man sich daher immer über die verwendete Terminologie informieren. ⊸

Für zwei verschiedene Parametrisierungen η und χ eines Weges ω gilt offensichtlich:

(i) Hat η Anfangspunkt p, so auch χ. Ditto für Endpunkte.

(ii) Ist η geschlossen, so auch χ.

(iii) Ist η doppelpunktfrei, so auch χ.

Diese Eigenschaften hängen somit nicht von der Parametrisierung ab und können damit auch für Wege definiert werden.

Definition *Ein Weg $\omega = [\gamma]$ heißt einfach, wenn γ einfach ist, geschlossen, wenn γ geschlossen ist, und Jordanweg, wenn γ eine Jordankurve ist. Der Anfangs- und Endpunkt von ω sind der Anfangs- und Endpunkt von γ, und die Spur des Weges ω ist die Spur von γ.* ⋊

⊳ Der n*-mal* durchlaufene Einheitskreis γ_n in (1) repräsentiert für jedes n einen anderen geschlossenen Weg $\omega_n = [\gamma_n]$. Es gilt also

$$\omega_n = \omega_m \quad \Leftrightarrow \quad m = n.$$

Für $|n| = 1$ ist er einfach, sonst nicht. ⊲

Wie verhält es sich mit der Länge äquivalenter Kurven? Diese Frage beantwortet der folgende

Satz *Topologisch äquivalente Kurven haben dieselbe Länge. Insbesondere sind beide rektifizierbar oder nicht rektifizierbar.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Seien $\gamma \in C(I, E)$, $\tilde{\gamma} \in C(\tilde{I}, E)$ und $\varphi \colon I \to \tilde{I}$ eine Parametertransformation, so dass $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$. Ist $T = (t_0, .., t_n)$ eine Teilung von I, so ist

$$\tilde{T} = \varphi \circ T \coloneqq (\varphi(t_0), .., \varphi(t_n))$$

eine Teilung von $\tilde{I}$. Wegen

$$\tilde{\gamma}(\varphi(t_k)) - \tilde{\gamma}(\varphi(t_{k-1})) = \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})$$

gilt hierfür

$$\Sigma_{\tilde{T}}(\tilde{\gamma}) = \Sigma_{\varphi \circ T}(\tilde{\gamma}) = \Sigma_T(\tilde{\gamma} \circ \varphi) = \Sigma_T(\gamma).$$

Gehen wir nun zuerst rechts zum Supremum über alle Teilungen von I, und danach zum Supremum über alle Teilungen von $\tilde{I}$ über, so folgt

$$L_{\tilde{I}}(\tilde{\gamma}) \leqslant L_I(\gamma).$$

Vertauschen wir die Reihenfolge der Supremumsbildung so erhalten wir auch die umgekehrte Ungleichung $L_I(\gamma) \leqslant L_{\tilde{I}}(\tilde{\gamma})$. Das ergibt die Behauptung. ⟫⟫⟫

Ist also *eine* Parametrisierung rektifizierbar, dann auch *jede* dazu äquivalente, und alle Längen sind gleich. Somit ist folgende Definition sinnvoll.

Definition *Ein Weg ω heißt rektifizierbar, wenn er eine rektifizierbare Parametrisierung $\gamma \in C(I,E)$ besitzt. Seine Länge ist dann die Länge einer beliebigen Parametrisierung.* ⋊

⊳ Für den n-mal durchlaufenen Einheitskreis ω_n gilt

$$L(\omega_n) = 2\pi\,|n|\,, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$ ⊲

Bemerkungen *a.* Für C^1-Kurven und -Parameterwechsel ergibt sich die Invarianz der Länge aus der Substitutionsregel für das Längenintegral A-7 und erfordert keinen eigenen Beweis.

b. Jede Spur, die aus mehr als einem Punkt besteht, erlaubt verschiedene Parametrisierungen mit verschiedenen Längen. Diese sind notgedrungen nicht äquivalent und repräsentieren daher verschiedene Wege! ⊸

▪ Glatte Wege

Bisher haben wir an die Parametrisierung einer Kurve nur die Forderung der Stetigkeit gestellt. Dies erlaubt, Teile der Spur mehrmals zu durchlaufen. Um dieses – in vielen Fällen unerwünschte – Verhalten auszuschließen, betrachten wir nun *reguläre* Kurven und Wege. — Zuerst die Kurven.

11 **Definition** *Eine C^1-Kurve $\gamma : I \to E$ heißt regulär, wenn ihre Ableitung nirgends verschwindet, also überall $\dot{\gamma} \neq 0$ gilt* ⋊

Um diesen Begriff auch für Wege zu erklären, müssen wie berücksichtigen, dass ein Weg *immer* auch nichtreguläre Parametrisierungen besitzt. Es genügt aber, wenn wenigstens *eine* regulär ist.

Definition *Ein Weg heißt glatt, falls er wenigstens eine reguläre Parametrisierung besitzt.* ⋊

Ein glatter Weg besitzt also *wenigstens eine* Parametrisierung $\gamma \in C^1(I,E)$ mit $\dot{\gamma} \neq 0$ auf ganz I. Er besitzt daher in jedem Punkt eine Tangente und somit keinerlei Spitzen oder Ecken. Daher auch die Bezeichnung. — Glatte Wege besitzen immer eine besonders schöne und nützliche Parametrisierung.

Satz und Definition *Jeder glatte Weg ω in E besitzt eine eindeutige reguläre Parametrisierung nach der Bogenlänge $\eta\colon [0,l] \to E$, wobei $l = L(\omega)$. Das heißt, für alle $t \in [0,l]$ gilt*

$$L_{[0,t]}(\eta) = t,$$

oder, was äquivalent ist, $\|\dot\eta(t)\|_E = 1$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $\gamma\colon\ [a,b] \to E$ eine reguläre Parametrisierung von ω. Dann ist 8

$$\lambda:\ \ [a,b] \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto t = \lambda(s) = L_{[a,s]}(\gamma)$$

stetig differenzierbar, und $\lambda'(s) = \|\dot\gamma(s)\|_E > 0$ für alle $s \in [a,b]$. Folglich bildet λ das Intervall $[a,b]$ streng monoton auf das Intervall $[\lambda(a),\lambda(b)] = [0,l]$ ab. Die Umkehrfunktion

$$\varphi:\ [0,l] \to [a,b], \qquad \varphi(t) = \lambda^{-1}(t)$$

ist ebenfalls stetig differenzierbar, und es gilt 7.13

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\lambda'(\varphi(t))} = \frac{1}{\|\dot\gamma(\varphi(t))\|_E} > 0, \qquad t \in [0,l].$$

Somit bildet $\eta = \gamma \circ \varphi\colon [0,l] \to E$ eine C^1-Parametrisierung von ω, mit

$$\|\dot\eta(t)\|_E = \|\dot\gamma(\varphi(t))\|_E\,|\varphi'(t)| = 1, \qquad t \in [0,l].$$

Dann aber ist auch

$$L_{[0,t]}(\eta) = \int_0^t \|\dot\eta\|_E = \int_0^t 1 = t.$$

Damit ist die Existenz einer Bogenlängenparametrisierung gezeigt.

Um noch die Eindeutigkeit zu zeigen, sei $\chi\colon [0,l] \to E$ eine weitere solche Parametrisierung. Da η und χ denselben Weg parametrisieren, sind sie topologisch äquivalent, es existiert also eine *stetige* Parametertransformation $\varphi\colon [0,l] \to [0,l]$ mit $\eta = \chi \circ \varphi$. Für $s \in [0,l]$ und $t = \varphi(s)$ gilt dann – vergleiche den Beweis des letzten Lemmas –

$$\begin{aligned} s = L_{[0,s]}(\eta) &= L_{[0,s]}(\chi \circ \varphi) \\ &= L_{[\varphi(0),\varphi(s)]}(\chi) \\ &= L_{[0,t]}(\chi) \\ &= t. \end{aligned}$$

Also ist φ die Identität und damit $\eta = \chi$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve wird also mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen, und es gilt *Weglänge = Geschwindigkeit × Zeit.*

13.21

Diese Parametrisierungen sind für viele theoretische Untersuchungen nützlich. Bezüglich dem Standardskalarprodukt gilt dann zum Beispiel in jedem Punkt

$$\dot{\gamma}(t) \perp \ddot{\gamma}(t),$$

das heißt, der Beschleunigungsvektor steht immer orthogonal zum Geschwindigkeitsvektor A-14 .

13.22