11. Vorlesung 31. 5. 2021

$$f : \mathbb{R} \supset I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f(t)$$

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$t \longmapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_m(t) \end{pmatrix}$$

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \longmapsto y = f(x)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$ kapcsolat

(azonosítjuk ezt $\mathbb{C}$

$(x,y) \longrightarrow z = x + iy$

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$\mathbb{R}^n \supset D \longrightarrow \mathbb{R}^m$

V, W Banachräume

$\|\cdot\|_V, \quad \|\cdot\|_W \qquad \|\cdot\|$

$A: V \longrightarrow W$ lineare Abb.

$$\|A\|_{V,W} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_W$$

$$= \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V}$$

$$= \sup_{x\neq 0} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|_V}\right)\right\|_W$$

$\|\cdot\|_V = 1$

Daraus folgt:

$$\boxed{\|Ax\|_W \le \|A\|_{V,W} \cdot \|x\|_V}, \quad x \in V$$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) ✓

(ii) $\Rightarrow$ (iii) ✓

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Zu $\varepsilon = 1$ ex. $\delta > 0$:

$$\|Ax\|_W \leq 1, \quad \|x\|_V \leq \delta.$$

Für $x \in V$ mit $\|x\|_V = 1$:

$$\|Ax\|_W = \frac{1}{\delta} \cdot \|A\underbrace{(\delta x)}_{\|\cdot\|_V = \delta}\|_W \leq \frac{1}{\delta}$$

Also:

$$\|A\|_{V,W} \leq \frac{1}{\delta} < \infty.$$

Also A beschränkt.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Folgt aus Linearität:

$$\|Au - Av\|_W = \|A(u-v)\|_W$$

$$\leq \underbrace{\|A\|_{V,W}}_{L} \cdot \|u-v\|_W$$

$L(V,W) := \{ A : A : V \to W$ linear & stetig $\}$
                                              $\parallel$
                                        beschränkt.

$\|\cdot\|_{V,W}$ ist Norm auf $L(V,W)$

Beweis: $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{V,W}$.

Definitheit ✓

Pos. Homogenität ✓

Δ-Ungleichung:

$$\|A+B\| = \sup_{\|x\|_V = 1} \|(A+B)x\|_W$$

$$\leq \sup_{\|x\|=1} \left(\|Ax\| + \|Bx\| \right)$$

$$\leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| + \sup_{\|x\|=1} \|Bx\|$$

$$= \|A\| + \|B\|$$

Also: $\|\cdot\|_{V,W}$ ist eine Norm.

Vollständigkeit:

Sei (A_n) eine CF in $L(U,W)$.

Zu zeigen: $\exists$ ein $A \in L(U,W)$:

$$\|A_n - A\|_{U,W} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Sei $x \in U$: Dann gilt:

$$\|A_n x - A_k x\| \le \|A_n - A_k\| \cdot \|x\|$$

Also $(A_n x)$ ist CF in W.

Da W vollständig: $(A_n x)$ konvergiert.

Damit definiere: $A : U \to W$

$$\boxed{Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x.}$$

Damit definiert: $A : U \to W$

$$\boxed{Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x.}$$

A ist linear:

$$A(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty} \left(A_n (\lambda x + \mu y) \right)$$

$$= \lim \left(\lambda A_n x + \mu A_n y \right)$$

$$= \lambda \lim A_n x + \mu \lim A_n y$$

$$= \lambda A x + \mu A y. \quad \checkmark$$

A ist beschränkt: $\checkmark$

$$M = \sup_{n\geq 1} \|A_n\| < \infty.$$

Denn gilt:

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \|A_n\| \cdot \|x\|$$

$$\leq M \cdot \|x\|, \qquad x \in U.$$

Daraus folgt:

$$\|A\| \leq M.$$

Zeige: $\|A_n - A\|_{U,W} \longrightarrow 0.$

Denn:

$$\|(A_n - A)x\| = \lim_{\ell\to\infty} \|(A_n - A_\ell)x\|$$

$$\le \lim_{\ell\to\infty} \|A_n - A_\ell\| \cdot \|x\|, \quad x \in U$$

Daraus folgt:

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|(A_n - A)x\|$$

$$\le \lim_{\ell\to\infty} \|A_n - A_\ell\|$$

$$\le \sup_{\ell\ge n} \|A_n - A_\ell\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \,. \boxtimes$$

$$U^* = L(U, \mathbb{R})$$

$W = \mathbb{R}$

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : U \times U \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle} .$$

CS-Ungl.:

$$\boxed{|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|}$$

$v \in U$:

$$L_v : x \mapsto \langle v,x \rangle$$
$$U \to \mathbb{R}$$

Beschränkt:

$$|L_v x| = |\langle v,x \rangle|$$
$$\leq \|v\| \cdot \|x\| .$$

$$\|L_v\| \leq \|v\| .$$

Beweis: Annahme

$$\|L\| = 1 = \sup_{\|x\|=1} |Lx| .$$

Dann ex. Folge (x_n) mit

$$\|x_n\| = 1 , \quad \underbrace{Lx_n}_{\in \mathbb{R}} \longrightarrow 1 .$$

Wir zeigen: (x_n) CF.

Fixiere $\varepsilon > 0$ ex. N:

$$Lx_n > 1 - \frac{\varepsilon}{8} > 0 , \quad n \geq N , \quad \varepsilon < 8$$

Da $\|L\| = 1$:

$$\begin{aligned} \|x_n + x_m\| &\geq |L(x_n + x_m)| \\ &= Lx_n + Lx_m \\ &> 2 - \frac{\varepsilon}{4} , \quad n, m \geq N . \end{aligned}$$

$$\|v_n + v_m\| \ge |\ell(v_n + v_m)|$$
$$= \ell v_n + \ell v_m$$
$$> 2 - \frac{\varepsilon}{4}, \quad n, m \ge N$$

Parallelogramm:

$$\|v_n - v_m\|^2 + \|v_n + v_m\|^2 = 2\|v_n\|^2 + 2\|v_m\|^2$$

Also:

$$\|v_n - v_m\|^2 = 2\underbrace{\|v_n\|^2}_{\le 1} + 2\underbrace{\|v_m\|^2}_{\le 1} - \|v_n + v_m\|^2$$
$$\le 4 - \left(2 - \frac{\varepsilon}{4}\right)^2$$
$$= \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{16} < \varepsilon, \quad n, m \ge N.$$

Also: (v_n) ist CF:

$$v = \lim_{n \to \infty} v_n:$$

$$\boxed{\|v\| = 1, \quad \ell v = 1 = \|v\|}$$

[illegible] wie: $\ell = \ell_v$.

Sei $x \neq 0$. Zu zeigen: $Lx = \langle v, x \rangle$.

Wissen: $\|L\| = 1$, $Lv = \|v\|$.

Sei $t > 0$:

$$Lx = \frac{L(v+tx) - L(v)}{t} \leq \frac{\|v+tx\| - \|v\|}{t}$$

$$Lx = \frac{L(v-tx) - L(v)}{-t}$$

$$= -\frac{L(v-tx) - \|v\|}{t} \geq -\frac{\|v-tx\| - \|v\|}{t}$$

Also:

$$\boxed{-\frac{\|v-tx\| - \|v\|}{t} \leq Lx \leq \frac{\|v+tx\| - \|v\|}{t},}$$

$t > 0$

$t \to 0$: φ' [illegible]:

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]!

$$\frac{d}{dt} \|v + tx\| \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \sqrt{\langle v+tx, v+tx \rangle} \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\langle v, x \rangle}{\|v\|} = \langle v, x \rangle$$

$n \times 1$-Matrix

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$$= (x_1, \dots, x_n)^T$$

Dann ist

$x^T = (x_1, \dots, x_n)$. $1 \times n$ Matrix

$A : V \to W$

$v_1, \dots, v_n$ Basis von V

$w_1, \dots, w_m$ Basis von W

$$\boxed{A v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i, \qquad 1 \le j \le n.}$$

$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ Koordinaten von $A v_j$

j-te Spalte von (a_{ij})

Spezialfall: Lineare Funktionale:

$$L : U \to \mathbb{R}$$

für $m=1$, Darstellungsmatrix ist $1 \times n$ Matrix:

$$L = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$$

wobei $\ell_j = \underbrace{L v_j}_{\in \mathbb{R}}$.

Für $x = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$:

$$Lx = \sum_{j=1}^{n} x_j L v_j = \sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j$$

$$= (\ell_1, \ldots, \ell_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (\ell_1, \ldots, \ell_n) \cdot (x_1, \ldots, x_n)^T$$

Skalarprodukt: $v_1, \dots, v_n$ Basis von V.

$$A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} : \quad a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle .$$

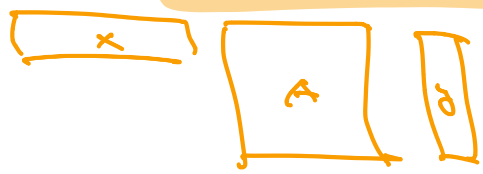
Dann $x = \sum x_i v_i$, $y = \sum y_j v_j$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j} x_i y_j \langle v_i, v_j \rangle$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$

$$= (x_1, \dots, x_n) \cdot (a_{ij}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= x^T A y .$$



$\mathbb{R}^n$

Basis: $$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{j-te Stelle}$$

$e_1, \ldots, e_n$ Standardbasis

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j .$$

Standardskalarprodukt:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{array} \right\} = \delta_{ij}$$

Damit

$$x_i = \langle x, e_i \rangle = \langle e_i, x \rangle .$$

Let $\quad A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Standard basis

Def $\quad A = (a_{ij})$

and $\quad \boxed{a_{ij} = \langle e_i , A e_j \rangle}$

Dem: $\quad Ae_j$ is found in (a_{ij})

$\langle e_i , A e_j \rangle$ is element the j-th place

$= a_{ij}$.