12. Vorlesung 1. 6. 2021

U, W Banachräume

$f: U \to W$:

es gibt offene, nichtleere Teilmenge

$\Omega \subset U$, so dass

$f: \Omega \to W$

Normen auf U, W :

$\|\cdot\|_U$, $\|\cdot\|_W$, $|\cdot|$

$|||\cdot|||$ Operatornorm

Lineare Approx. von f in a

$$\frac{\left| \overbrace{f(a+h)} - \overbrace{(f(a) + Lh)} \right|_W}{|h|_V} \xrightarrow[|h|\to 0]{} 0$$

$$L = Df(a).$$

2. L eindeutig bestimmt.

3. $U = \mathbb{R}$ $(n=1)$, W beliebig:

Kurve

Dann gilt: $L : \mathbb{R} \to W$

gegeben durch Vektor $v \in W$:

$$f(a) + Lh = f(a) + hv.$$

$$v = \dot{f}(a) = f'(a).$$

4. $U = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}$:

$n = 1$, $m = 1$:

$$L : U \longrightarrow W \; : \; t \mapsto mt.$$

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f'(a) = m \, .$$

5. Stetigkeit von L :

automatisch erfüllt, wenn

$\dim U < \infty$

$L : U \to W$, $\dim U < \infty$.

Dann:

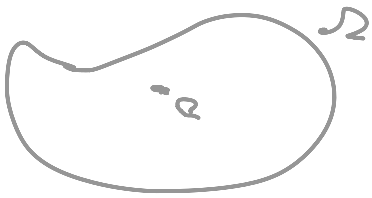
$$\sup_{\|x\| \le 1} \|Lx\| < \infty .$$

kompakt falls $\dim U < \infty$

$\dot{\Omega}$ punktierte Umgebung von a:

$$\dot{\Omega} = \Omega \setminus \{a\},$$

Ω ist offene Umgebung von a:



$\dot{\Omega} = \Omega \setminus \{a\}$

$f = O(g)$ auf Ω : $\iff$ es gibt M :

$$|f(x)| \le M \cdot |g(x)|, \quad x \in \Omega$$

$f = o(g)$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$:

$$|f(x)| \le \varepsilon \cdot |g(x)|, \quad 0 < |x| < \delta.$$

Wichtig: $O(g)$, $o(g)$ stehen nicht für bestimmte Funktion, sondern für F-klassen.

Daher: $\boxed{O(x) + O(x) = O(x)}$

korrekt.

Bsp.:

1. $\sin t = o(t)$

$1 - \cos t = O(t^2) = o(t)$.

2. $A : U \to U$ linear.

A beschränkt gdw

$|Ah| = O(|h|)$, $h \in U$.

3. $\langle \cdot , \cdot \rangle$ Bilinear Form auf V:

$\langle Ah, h \rangle = O(\langle h, h \rangle) = o(h)$

$= O(|h|^2)$

4. $f \in C^{n+1}(I)$:

$$f(x+h) = T_x^n f(h) + \underbrace{O(h^{n+1})}$$

Bem.: Sei $\lambda : U \to W$ eine lineare

Def. Abl.:

$$f(x+h) = f(x) + \lambda h + o(h),$$

Beweis:

$$\underbrace{(L-\lambda)(h) = o(h)}, \quad 0 \neq h \in U$$

$$\Updownarrow$$

$$L - \lambda = 0$$

$$Df : \quad U \longrightarrow L(U,W),$$
$$x \longmapsto Df(x)$$

dim $U = 1$:

$$L(U,W) \cong W$$

also:

$$Df : \quad U \longrightarrow W.$$

dim $U \geq 1$:

$$L(U,W) \not\cong W.$$

Beispiele:

1. Affine Abb.

$$f: U \longrightarrow W$$
$$x \longmapsto f(x) = Ax + b$$

$A \in L(U, W)$, $b \in W$.

f ist überall differenzierbar:

$$f(x+h) = A(x+h) + b$$
$$= f(x) + \underbrace{Ah}_{\uparrow} + 0$$

Also: $Df(x)$

$$Df(x) = A, \quad x \in U$$

$$Df: U \longrightarrow L(U, W), \quad x \mapsto Df(x) = A.$$

ist konstant.

2. Quadratische Form:

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ Bilinearform auf V

$A \in L(V)$

$f: V \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \langle Ax, x\rangle$

(a) Annahme: Σ positiv, dann A symmetrisch:

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle .$$

Dann folgt:

$$f(x+h) = \langle \overset{Ax+Ah}{A(x+h)}, x+h\rangle$$

$$= \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, h\rangle + \langle Ah, x\rangle + \langle Ah, h\rangle \qquad = \langle h, Ax\rangle = \langle Ax, h\rangle$$

$$= f(x) + 2\langle Ax, h\rangle + \langle Ah, h\rangle$$

$$= f(x) + \underbrace{2\langle Ax, h\rangle}_{\text{linear in } h} + o(h) .$$

Also: $\quad Df(x) : U \longrightarrow L(U, \mathbb{R}) = U^*$

$$x \longmapsto Df(x) = 2\langle Ax, \cdot \rangle$$

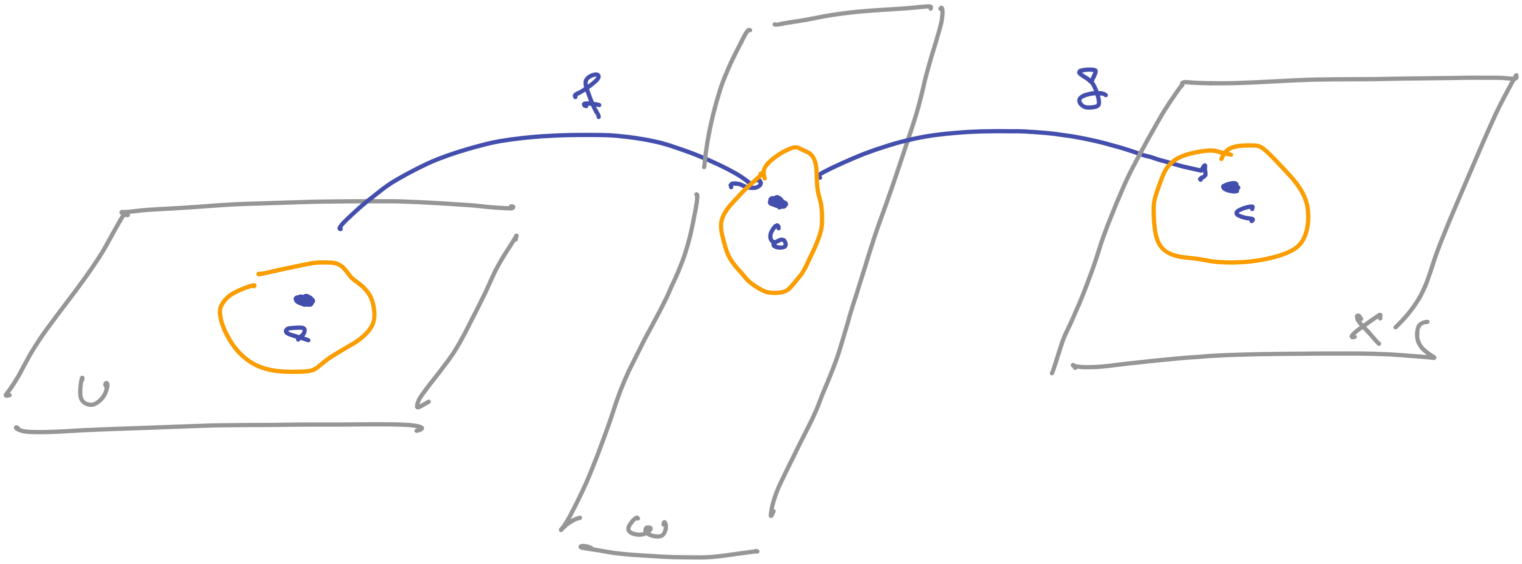
$$(Df(x))(h) = 2\langle Ax, h\rangle$$

Fixed x. $\quad$ Argument to $Df(x)$

$$f, g : U \to W$$

$$\lambda f + \mu g : U \to W$$

$$\boxed{\begin{aligned} &D(\lambda f + \mu g)(a) \\ &\qquad = \lambda Df(a) + \mu Dg(a). \end{aligned}}$$



$$g \circ f : U \longrightarrow X$$
$$x \longmapsto g(f(x))$$

$$Df(a) : U \to W \qquad , \qquad b = f(a)$$
$$Dg(b) : W \to X$$

$$\boxed{D(g \circ f)(a) = Dg(b) \cdot Df(a) \ : \ U \to X}$$

Beweis:

$$(*)\quad \begin{cases} f(a+h) = f(a) + Ah + o(h), & A = Df(a) \\ g(b+k) = g(b) + Bk + o(k), & B = Dg(b) \end{cases}$$

Sei k definiert, durch

$$k = Ah + o(h) = O(h)$$

Also k klein wenn h klein, dann (*) gilt.

$$(g \circ f)(a+h) = g(f(a+h))$$

$$= g(\overbrace{f(a)}^{b} + \overbrace{Ah + o(h)}^{k})$$

$$= g(f(a)) + B(Ah + o(h)) + o(Ah + o(h))$$

$$= (g \circ f)(a) + BAh + \underbrace{B \cdot o(h)}_{o(h)} + o(\underbrace{Ah}_{o(h)} + \underbrace{o(h)}_{o(h)})$$

$$= (g \circ f)(a) + \underbrace{BAh} + o(h).$$

Also ist $g \circ f$ im Punkt a differenzierbar:

$$D(g \circ f)(a) = BA = Dg(b) \cdot Df(a). \quad \square$$

Remarque :

1. $f : U \longrightarrow W$

$A : W \longrightarrow X$

Donc

$Af : U \longrightarrow X$

avec

$D(Af)(a) = \underbrace{(DA)(f(a))}_{} \cdot Df(a)$

$= A \cdot Df(a)$.

$(Af)(a+h) = \ldots$

2. Ableitung einer Kurve:

$$\varphi : I \longrightarrow U \qquad \text{differb.}$$

$$f : U \longrightarrow W \qquad \text{differb.}$$

Dann:

$$f \circ \varphi : I \longrightarrow W \qquad \text{Kurve in } W$$

differb.:

$$(f\circ\varphi)^{\cdot}(t) = \underbrace{Df}_{U \to W}(\varphi(t)) \cdot \underset{\substack{\in \\ U}}{\dot{\varphi}(t)} , \qquad t \in I$$

Spezialfall: $\varphi(t) = x + tv$:

$$(f\circ\varphi)^{\cdot}(t) = f(x+tv)^{\cdot}\Big|_{t=0}$$

$$= Df(x) \cdot \underset{\substack{\shortparallel \\ \dot{\varphi}(t)}}{v}$$

3) Quadratische Form entlang einer Kurve:

$$\varphi : I \to U \qquad \text{diffb. Kurve}$$

$$f : U \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \langle Ax, x\rangle$$

Symm.

Damit

$$\Phi = f \circ \varphi : I \to \mathbb{R}$$

$$\Phi(t) = \langle A\varphi(t), \varphi(t)\rangle .$$

Ist diffbar:

$$\Phi'(t) = \underbrace{Df(\varphi(t))}_{2\langle A\varphi(t),\ \cdot\ \rangle} \cdot \dot\varphi(t)$$

$$= 2\langle A\varphi(t), \dot\varphi(t)\rangle .$$

Spezialfall: $\varphi(t) = x + tv$:

$$\Phi'(0) = \Phi'(t)\big|_{t=0}$$

$$= 2\langle \underbrace{Ax}_{\varphi(0)}, \underbrace{v}_{\dot\varphi(0)}\rangle .$$