13. Vorlesung 7.6.2021

$f: \quad U \hookrightarrow W$

U, W Banachräume

$\hookrightarrow$ „Gilt auch offene Teilmenge ab“.

$Df(a) \in \mathcal{L}(U, W)$

schreibe auch $f'(a)$.

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)h + o(h).$$

$$\partial_v f(a) = \frac{d}{dt} f(a+tv)\Big|_{t=0}.$$

„auch“ partielle Ableitung — Richtung v

Beispiele:

1. Affine Abb.: $Ax + b$

$$\partial_v (Ax+b) = \big(A(x+tv)+b\big)'\big|_{t=0}$$

$$= \big(Ax + t\cdot Av + b\big)'\big|_{t=0}$$

$$= Av.$$

2. Quadratische Form: $\langle Ax, x\rangle$:

$$\partial_v \langle Ax,x\rangle = \langle A(x+tv), x+tv\rangle'\big|_{t=0}$$

$$= \big(\langle Ax,x\rangle + 2t\langle Ax,v\rangle + t^2\langle Av,v\rangle\big)'\big|_{t=0}$$

$$= 2\langle Ax,v\rangle$$

Beweis:

äußere Abl.

$$\partial_v f(x) = f(x+tv)'\big|_{t=0}$$

innere Abl.

Kettenregel

$$= Df(x) \cdot \left[(x+tv)'\big|_{t=0} \right]$$

$$= Df(x) \cdot v .$$

Beispiel:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & = 0. \end{cases}$$

Sei $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

$$f(tv) = t\, f(v).$$

Also gilt:

$$\partial_v f(0) = f(tv)' \big|_{t=0} = \left(t f(v)\right)' \big|_{t=0} = f(v).$$

wäre f diffbar in 0, wäre das lin. in v. ↯

$$\partial_j f(x) = f(x + t e_j)'\Big|_{t=0}$$

$$= f(x_1, \dots, x_j + t, \dots, x_n)'\Big|_{t=0}$$

Bezeichnung:

$$\partial_j f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \partial_{x_j} f(x)$$

$$= f_{x_j}(x)$$

$$= f_{,j}(x).$$

Bezeichnung:

$$\partial_j f(x) = \partial_{x_j} f(x) = f_{x_j}(x)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

$$= f_{,j}.$$

Esempio:

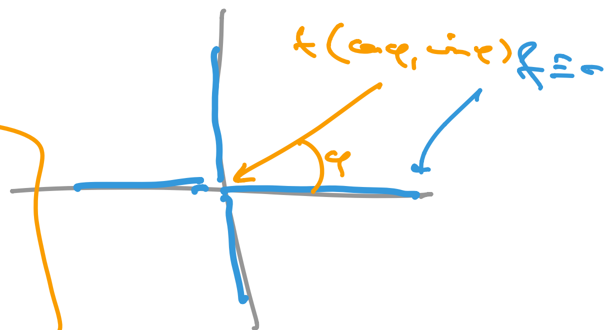
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x,y) \doteq \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

Dunque

$$f(x,0) = 0, \qquad f(0,y) = 0$$

Allora:

$$\partial_x f(0,0) = 0$$
$$\partial_y f(0,0) = 0$$



$$f(t\cos\varphi,\ t\sin\varphi) = \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}$$

$$= \sin 2\varphi, \qquad t \neq 0$$

quindi [illegible] Codom. è [illegible]

$$Df(a): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$Jf(a) = \left(\partial_j f_i\right)_{1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n}$$

$$= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{mn}$$

$$= \left(f_{i,x_j}(a)\right)_{mn}$$

$$= \begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,n} \\ \vdots & & \\ f_{m,1} & \cdots & f_{m,n}(a) \end{pmatrix}.$$

Dem : $Df(a) = (a_{ij})$ écrit

$$a_{ij} = \langle e_i , Df(a)\, e_j \rangle$$

$$= \langle e_i , \partial_j f(a) \rangle$$

$$= \partial_j \langle e_i , f(a) \rangle$$

$$= \partial_j f_i(a)$$

$$= f_{ij}(a)$$

Exemples :

1. Affine $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$f(x) = Ax + B = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \right)_{1 \le i \le m}$$

Dem : ∂_j :

$$\partial_j f_i(x) = a_{ij}$$

Donc :

$$Jf(x) = (a_{ij})_{mn} = A .$$

2. Quadratische Form: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle = \sum_{1 \le k, l \le n} a_{kl} x_k x_l$$

wobei $a_{kl} = a_{lk}$.

Dann

$$\partial_j f = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} x_k + \sum_{l=1}^{n} a_{jl} x_l$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k$$

$$= 2 \langle Ax, e_j \rangle$$

$$= 2 (Ax)^T e_j$$

Also gilt:

$$Jf(x) = 2(Ax)^T$$

$1 \times n$ Matrix = Zeilenvektor !

Beispiele :

1. Sei $s = 1$, $g = g(y_1, \dots, y_m)$ reell

Dann

$$\partial_j (g \circ f)(x) = D(g \circ f)(x)\, e_j$$

$$= Dg(f(x)) \cdot Df(x) \cdot e_j$$

$$= (g_{,1}, \dots, g_{,m})(f(x)) \cdot \begin{pmatrix} f_{1,j}(x) \\ \vdots \\ f_{m,j}(x) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$$

Schreibe : $f(x) = y$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(x)) \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x).$$

2.

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) = |x|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Für $x \neq 0$:

$$\partial_j f(x) = \frac{x_j}{|x|_2}, \quad 1 \leq j \leq n$$

Also:

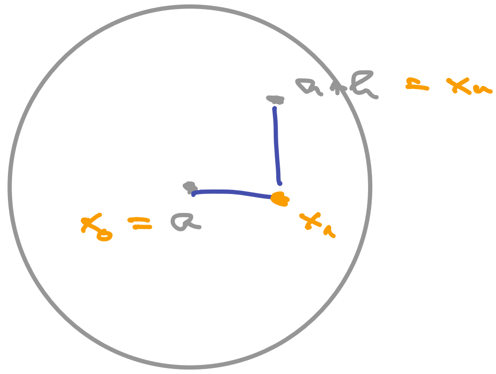
$$Jf(x) = \frac{x^T}{|x|_2}$$

x Spaltenvektor

x^T Zeilenvektor.

also $Jf(x)$ = Zeilenvektor

Beweis: a in Def



$$B_r(a) = \{x : |x-a| < r\} \text{ in Def.}$$

Setze

$$0 \le k \le n$$

$$x_k = a + h_1 e_1 + \dots + h_k e_k,$$

Also

$$x_0 = a, \quad x_n = a+h$$

Dann $x_k \in B_r(a)$. Es gilt dann

$$f(a+h) - f(a)$$

$$= f(x_n) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right)$$

Für jeden Summanden:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f(x_{i-1} + t h_i e_i)\Big|_0^1$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x_{i-1} + t h_i e_i)\, dt$$

$$= \int_0^1 \partial_i f(x_{i-1} + t h_i e_i) \cdot h_i \, dt$$

$$= \partial_i f(a) h_i + h_i \int_0^1 \left(\partial_i f(\ldots) - \partial_i f(a) \right) dt \to 0$$

Aufgrund Def. von x_i und Stetigkeit der part. Abl.:

$$\partial_i f(x_{i-1} + t h_i e_i) - \partial_i f(a) \longrightarrow 0$$
$$h \to 0$$

gleichmäßig für $0 \le t \le 1$

Also gilt:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = \partial_i f(a) h_i + o(h_i)$$

Nun gilt entsprechend: $\sum_{i=1}^{n}$:

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a)\, h_i + o(h)$$

linear fct. in h

Then f is diff. at a with

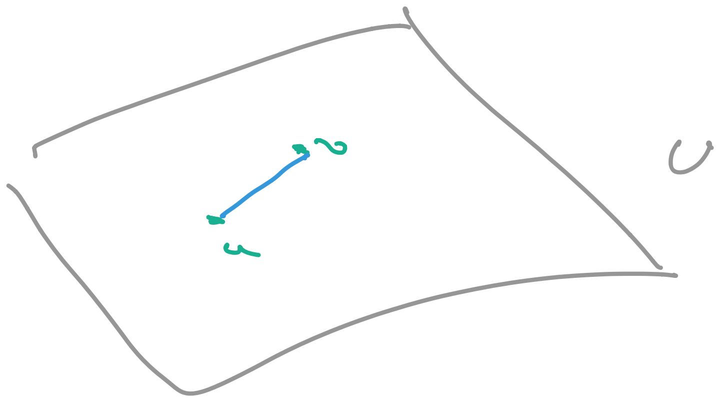
$$Df(a)h = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a)\, h_i .$$

[illegible]

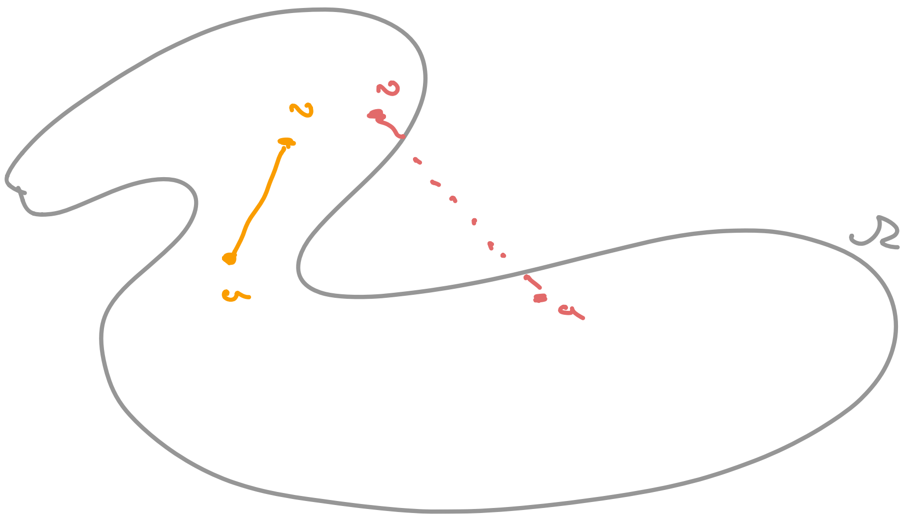
$\Longrightarrow$ $Df(a)$ [illegible]

Notatie : $u, v \in U$:

$[u,v] := \{ (1-t)u + tv \ : \ 0 \le t \le 1 \}$



$U = \mathbb{R}$: Riemann int. Calculus.



$t \longmapsto Df((1-t)u + tv)$ — continu

$0 \le t \le 1$ Kromme in $L(V,W)$

$\int_0^1 Df(\ldots)\,dt \ \in \ L(V,W)$

Beweis:

$$\varphi : [0,1] \to [u,v] ,$$

$$\varphi(t) = (1-t)u + tv$$

Dann

$$f \circ \varphi : [0,1] \to W \quad \text{stetig diff.bar}$$

stetig diff.

HS:

$$f(v) - f(u) = f \circ \varphi \Big|_0^1$$

$$= \int_0^1 (f \circ \varphi)'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 Df(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)\, dt$$

$$\dot{\varphi}(t) = (v-u)$$

$$= \left(\int_0^1 Df(\varphi(t))\, dt \right) (v-u)$$

$$= \underbrace{A}_{\in L(V,W)} \cdot (v-u)$$

[illegible]: [illegible]:

$$|f(x_0) - f(x_1)| \leq \|\Lambda\| \, |x_0 - x_1|$$

und

$$\|\Lambda\| = \left\| \int_0^1 Df(\varphi(t)) \, dt \right\|$$

$$\leq \int_0^1 \underbrace{\| Df(\varphi(t)) \|}_{\leq \sup_{w \in [a,b]} \|Df(w)\|} \, dt$$

$$\leq \sup_{w \in [a,b]} \|Df(w)\|$$

Beweis: $Df : U \to C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ stetig

Also auch

$$\|Df\| : U \to \mathbb{R} \quad \text{stetig}$$

$$x \mapsto \|Df(x)\|$$

Dann gibt es für jeden Punkt x ex. eine kompakte Kugel B, so dass

$$\sup_{x \in B} \|Df(x)\| = M < \infty .$$

Seien nun $x_0, x \in B$, dann ist auch $[x_0, x] \subset B$: Also.

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sup_{w \in [x_0, x] \subset B} \|Df(w)\| \, |x - x_0|$$

$$\leq M \, |x - x_0| . \qquad \blacksquare$$