14. Vorlesung 8.6.2021

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

Falls f in a differenzierbar:

$$\underbrace{Df(a) : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h \longmapsto Df(a) \cdot h}$$

lineare Funktional, also $\in U^*$

Falls U Hilbertraum mit $\langle \cdot , \cdot \rangle$:

$$Df(a) \cdot h = \langle \varphi , h \rangle .$$

↑ Gradient von f

Bez.:

$\underbrace{\nabla f(a)}$ "nabla f"

Gradient f.

Beispiele: $U \subset \mathbb{R}$, $\langle \cdot , \cdot \rangle$

1. Sei $w \in U$, dann

$$L_w : U \to \mathbb{R}, \quad L_w(x) = \langle w, x \rangle$$

Differential:

$$DL_w(x)(\xi) = \langle w, \xi \rangle$$

also

$$\nabla L_w(x) = w$$

2. Sei $A : U \to U$ symmetrisch:

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

Betrachte:

$$f : U \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \langle Ax, x\rangle .$$

Dann:

$$Df(x)h = 2\langle Ax, h\rangle$$

$$= \langle 2Ax, h\rangle$$

Also:

$$\nabla \cancel{D} f(x) = 2Ax$$

Schreibfehler in der Vorlesung.

<u>Dem</u>:

$$\langle \nabla f, e_j \rangle = Df \cdot e_j$$
$$= \partial_j f$$

and

$$Df = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f)$$
$$= \nabla f^T$$

$$Df^T = \nabla f .$$

Symbol ∇ Nabla-Operator

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}$$

Definition

∇f Produkt aus

∇ und f

↑ ↑

Vektor Skalar

$$= \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_n f \end{pmatrix}.$$

Skalarprodukt und Kreuzprodukt $(n=3)$

Rotation Divergenz

$$\nabla \cdot \nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 = \Delta$$

Laplace-Operator

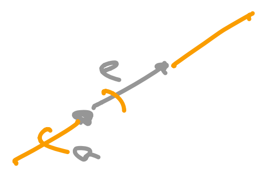
Diff.-Operator

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, a ein Def.

Sei $e \in \mathbb{R}^n$: $\|e\|_2 = 1$:

$f_e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$t \mapsto f(a+te)$



$f_e'(0)$ Anstiegsrate in Punkt a .

wenn Rate und fein, da $\|e\| = 1$ gewählt.

Beweis: $\qquad f_e(t) = f(a+te)$

$$f_e'(0) = f(a+te)'\big|_{t=0}$$

$$= Df(a)\,e = \partial_e f(a)$$

$$= \langle \nabla f(a), e \rangle$$

CS:

$$|f_e'(0)| = | \qquad | \leq \|\nabla f(a)\|.$$

Anmerkung: "=" gilt $\nabla f(a) \parallel e$

$\nabla f(a)$: größter Anstieg

$-\nabla f(a)$: größter Abstieg.

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \omega$$

$\partial_h f = f_{x_h}$ ~~[illegible]~~ :

$$\underbrace{\partial_h f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \omega}$$

Zweite partielle Abl. :

$$\partial_e(\partial_h f) = \partial_e \partial_h f$$

$$= (f_{x_h})_{x_e} = f_{x_h x_e}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_e} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \omega.$$

Beispiel :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = x^2 y^4 \sin z$$

$f_x = 2xy^4 \sin z$ $\qquad$ $f_z = x^2 y^4 \cos z$

$f_{xy} = 8xy^3 \sin z$ $\qquad$ $f_{zy} = 4x^2 y^3 \cos z$

$\underline{f_{xyz}} = 8xy^3 \cos z = \underline{f_{zyx}} = 8xy^3 \cos z$

Beispiel:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x,y) := \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}$$

Dann:

$$f_x(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - \cancel{f(0,y)}^{\,0}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h^3y - hy^3}{h^2+y^2}$$

$$= \qquad = \frac{-y^3}{y^2} = -y$$

Ebenso:

$f_y(x,0) = \dots \quad x$ [illegible]

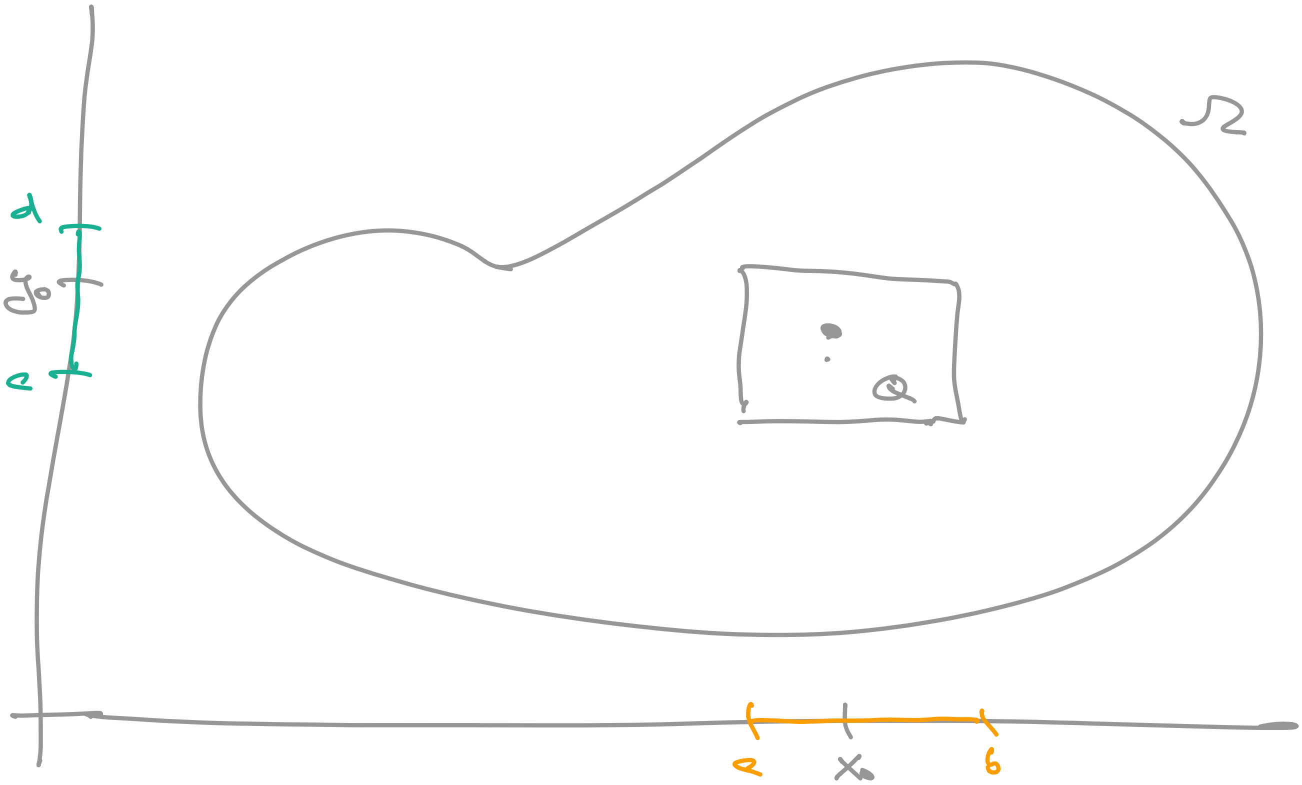
$x \neq 0, \ y = 0,$

Dann gilt:

$$\boxed{f_{xy}(0,0) = -1, \quad f_{yx}(0,0) = 1.}$$

$$f = f(x, y)$$

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2 \qquad Q = [a,b] \times [c,d] \subset \Omega$$



Da f stetig diffbar

$$f(x,y) - f(a,y) = \underbrace{\boxed{\int_a^x f_x(t,y)\,dt}}_{\text{als Funktion in } y}$$

Da $(f_x)_y = f_{xy}$ stetig ist, gilt:

$\boxed{}$ ist diffb. Funktion in y, und Ableitung und Diff. sind zu vertauschen:

Für y diff:

$$f_y(x,y) - f_y(a,y) = \underbrace{\int_a^x \underbrace{f_{xy}}_{\text{stetig}}(t,y)\,dt}_{\text{als Funktion in } x \text{ diffbar.}}$$

Also:

$$f_{yx}(x,y) = \partial_x f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\int_a^x \cdots$$

$$= f_{xy}(x,y).$$

∎

Beweis:

$$Q = [a,b] \times [c,d]$$

$$f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f_y : Q \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{stetig.}$$

$$\phi(y) = \int_a^b f(t,y)\,dt$$

$$[c,d] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{Sei } y \in (c,d)$$

Dann:

$$\phi(y+h) - \phi(y) = \int_a^b \big(f(t,y+h) - f(t,y)\big)\,dt$$

$$= \int_a^b f(t,y+sh)\Big|_0^1\,dt$$

$$= \int_a^b \left(\int_0^1 f_y(t,y+sh)\,h\,ds \right) dt$$

Also:

$$\frac{\phi(y+h) - \phi(y)}{h} - \int_a^b f_y(t,y)\,dt$$

$$= \int_a^b \int_0^1 \cdots\,ds\,dt - \int_a^b \int_0^1 f_y(t,y)\,ds\,dt$$

$$= \int_a^b \int_0^1 \big(f_y(t,y+sh) - f_y(t,y) \big)\,ds\,dt.$$

$$\boxed{\frac{\Phi(y+h)-\Phi(y)}{h} - \int_a^b f_y(t,y)\,dt = \int_a^b \int_0^1 \big(f_y(t,y+sh) - f_y(t,y) \big)\,ds\,dt.}$$

Q ist kompakt, f_y stetig auf Q.

Dann ist f_y sogar gleichmäßig stetig:

Zu $\varepsilon > 0$ ex. $\delta > 0$, sodass für alle $t \in [a,b]$, $s \in [0,1]$:

$$|f_y(t,y+sh) - f_y(t,y)| \le \varepsilon, \quad |h| < \delta$$

Damit erhalten wir:

$$\left| \frac{\Phi(y+h)-\Phi(y)}{h} - \int_a^b f_y(t,y)\,dt \right| \le \int_a^b \int_0^1 \underbrace{| f_y(t,y+sh) - f_y(t,y) |}_{\le \varepsilon}\,ds\,dt$$

$$\le \int_a^b \int_0^1 \varepsilon\,ds\,dt = \varepsilon(b-a)$$

Also: $\lim_{h\to 0} \frac{\Phi(y+h)-\Phi(y)}{h} = \int_a^b f_y(t,y)\,dt.$ $\square$

$$f : U \longrightarrow W \qquad \text{[illegible]} \quad \text{[illegible]}$$

$$Df : U \longrightarrow \mathcal{L}(U, W)$$

$$D^2 f = D(Df) : U \longrightarrow \mathcal{L}(U, \mathcal{L}(U, W))$$

$$\simeq \mathcal{L}(U \times U, W)$$

[illegible]

$$\vdots$$

$$D^r f : U \longrightarrow \mathcal{L}(\underbrace{U \times \dots \times U}_{r}, W)$$