15

Funktionen mehrerer Variablen

15.1 Die Taylorsche Formel

Die Formel von Taylor in höheren Dimensionen ist eine direkte Folge der klassischen Formel in einer Dimension. Ist die Strecke $[a, a+h]$ im Definitionsbereich von $f : V \hookrightarrow W$ enthalten, so können wir bei entsprechender Diferenzierbarkeit von f die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \hookrightarrow W, \quad t \mapsto f(a+th)$$

um 0 entwickeln und bei $t = 1$ auswerten, um $f(a+h)$ darzustellen. Dabei treten die höheren Richtungsableitungen

$$\partial_h^k f(a) \coloneqq \partial_t^k f(a+th)\Big|_{t=0}, \qquad k \geqslant 1,$$

auf.

1 **Satz von Taylor in höheren Dimensionen** *Sei $f : V \hookrightarrow W$ eine C^{r+1}-Abbildung. Gehört $[a, a+h]$ zum Definitionsbereich von f, so gilt*

$$f(a+h) = T_a^r f(h) + R_a^r f(h)$$

mit dem r-ten Taylorpolynom an der Stelle a,

$$T_a^r f(h) \coloneqq \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} \partial_h^k f(a),$$

und dem zugehörigen Restglied

$$R_a^r f(h) = \frac{1}{r!} \int_0^1 (1-t)^r \partial_h^{r+1} f(a+th)\,\mathrm{d}t. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨ Nach Voraussetzung ist $\varphi : t \mapsto f(a+th)$ für $0 \leqslant t \leqslant 1$ wohldefiniert. Aufgrund der Kettenregel $_{14.12}$ ist

$$\varphi'(t) = \partial_h f(a + th) = Df(a + th)h.$$

Mit Induktion folgt, dass

$$\varphi^{(k)}(t) = \partial_h^k f(a + th)$$

durch die totale Ableitung von f der Ordnung k dargestellt wird. Somit ist φ auf $[0,1]$ von der Klasse C^{r+1}, und die klassische Taylorformel mit Integralrest $_{8.22}$ ergibt

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{r} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{1}{r!} \int_0^1 (1-t)^r \varphi^{(r+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ersetzen wir φ durch die entsprechenden Ausdrücke in f, so erhalten wir die Behauptung. ⟫⟫⟫

Bemerkung Diese Formulierung des Satzes von Taylor ist *koordinatenunabhängig*, denn sie benötigt nur die Richtungsableitung ∂_h. Für $n = 1$ ist

$$\partial_h^k f(a) = f^{(k)}(a)h^k.$$

Wir erhalten damit wieder die klassische Taylorformel $_{8.22}$. ⊸

▪ Multiindex-Notation

Um die Richtungsableitungen $\partial_h^k f$ im Standardfall durch die partiellen Ableitungen von f bequem darzustellen, hat sich die *Multiindex-Notation* bewährt. Ein *Multiindex* ist ein Tupel mit ganzzahligen, nichtnegativen Komponenten,

$$\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n.$$

Potenzen von $x = (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ sind definiert als

$$x^\alpha \coloneqq x_1^{\alpha_1} \cdot .. \cdot x_n^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i},$$

wobei vereinbarungsgemäß $x_i^0 = 1$. Entsprechend erklärt man

$$\partial^\alpha \coloneqq \partial_1^{\alpha_1} \cdot .. \cdot \partial_n^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^{n} \partial_i^{\alpha_i},$$

wobei vereinbarungsgemäß $\partial_i^0 = I$ den Identitätsoperator ergibt. Es ist also

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \cdot .. \cdot \partial_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{\alpha_1 + .. + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot .. \cdot \partial x_n^{\alpha_n}} f.$$

Das heißt, es wird α_1-mal nach x_1, α_2-mal nach x_2, .., α_n-mal nach x_n differenziert. Ist $\alpha_i = 0$, so wird *nicht* nach x_i differenziert. Für hinreichend oft differenzierbares f kommt es wegen des Lemmas von Schwarz ${}_{14.18}$ auf die *Reihenfolge* der partiellen Ableitungen nicht an, nur auf die jeweilige *Anzahl*. Genau diese Informationen beinhaltet der Multiindex.

Schließlich setzt man noch

$$\alpha! \coloneqq \alpha_1! \cdot .. \cdot \alpha_n!, \qquad |\alpha| \coloneqq \alpha_1 + .. + \alpha_n,$$

und nennt $|\alpha|$ die *Länge* von α. Da alle Komponenten von α nichtnegativ sind, sind Beträge nicht nötig.

⊳ A. Für $f \in C^4(\mathbb{R}^3)$ und $\alpha = (3,1,0)$ sowie $\beta = (1,0,2)$ ist

$$\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f = \frac{1}{6} f_{xxxy}, \qquad \frac{1}{\beta!}\partial^\beta f = \frac{1}{2} f_{xzz}.$$

B. Im Standardfall ist

$$\partial_h = \sum_{k=1}^n h_k \partial_k, \qquad \partial_h^2 = \sum_{k,l=1}^n h_k h_l \partial_k \partial_l.$$ ⊲

Wir benötigen noch folgende Verallgemeinerung der binomischen Formel.

2 **Lemma** *In einem kommutativen Ring gilt*

$$\begin{aligned}(\lambda_1 + .. + \lambda_n)^m &= \sum_{i_1,..,i_m=1}^n \lambda_{i_1} \cdot\cdot \lambda_{i_m} \\ &= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha_1! \cdot\cdot \alpha_n!} \lambda_1^{\alpha_1} \cdot\cdot \lambda_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \lambda^\alpha\end{aligned}$$

für $m \geqslant 1$*, wobei* $\lambda = (\lambda_1, .., \lambda_n)$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Die erste Identität drückt aus, dass wir $(\lambda_1 + .. + \lambda_n)^m$ erhalten, indem wir sämtliche Produkte aus m Faktoren aus den Elementen $\lambda_1, .., \lambda_n$ bilden und diese aufsummieren. Dies beweist man durch Induktion.

Die zweite Identität folgt hieraus durch kombinatorische Überlegungen. Die Anzahl aller im ersten Schritt gebildeten Produkte, die wegen der Kommutativität der Multiplikation gleich dem Produkt $\lambda_1^{\alpha_1} \cdot .. \cdot \lambda_n^{\alpha_n}$ sind, ist

$$\frac{m!}{\alpha_1! \cdot .. \cdot \alpha_n!}.$$

Denn einerseits müssen wir alle Permutation der m Faktoren zählen – deren Anzahl ist $m!$. Andererseits dürfen wir nicht die Permutationen der *identischen* Faktoren untereinander zählen – deren Anzahl ist $\alpha_1! \cdot .. \cdot \alpha_n!$. Dies ergibt die zweite Identität.

Die dritte Identität verwendet lediglich die Multiindex-Notation. ⟩⟩⟩⟩⟩

3 **Korollar** *Ist das Lemma von Schwarz anwendbar, so gilt*

$$\frac{1}{m!}\partial_h^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} h^\alpha \partial^\alpha, \qquad m \geqslant 0. \qquad \rtimes$$

⟪⟪⟪ Für $m = 0$ ergeben beide Seiten vereinbarungsgemäß die Identität, und es nichts zu zeigen. Für $m = 1$ und $h = (h_1, .., h_n)$ ist

$$\partial_h = h_1\partial_1 + .. + h_n\partial_n = \sum_{|\alpha|=1} h^\alpha \partial^\alpha.$$

Die Behauptung gilt hier also ebenfalls. Und können wir sämtliche partiellen Ableitungen vertauschen, so gilt aufgrund des letzten Lemmas für $m \geqslant 2$

$$\frac{1}{m!}\partial_h^m = \frac{1}{m!}(h_1\partial_1 + .. + h_n\partial_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} h^\alpha \partial^\alpha. \qquad ⟫⟫⟫$$

Die Taylorsche Formel können wir nun wie folgt schreiben.

4 **Satz von Taylor in Multiindex-Notation** *Sei $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow W$ eine C^{r+1}-Abbildung. Gehört $[a, a+h]$ zum Definitionsbereich von f, so gilt*

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha|\leqslant r} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(a) h^\alpha + R_a^r f(h)$$

mit

$$R_a^r f(h) = (r+1) \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^r \partial^\alpha f(a+th)\,\mathrm{d}t.$$

Im Fall einer skalaren Funktion existiert außerdem ein $\xi \in [a, a+h]$, so dass

$$R_a^r f(h) = \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(\xi) h^\alpha. \qquad \rtimes$$

⟪⟪⟪ Mit dem Satz von Taylor 1 und der binomischen Formel 2 ist

$$\begin{aligned} R_a^r f(h) &= \frac{1}{r!}\int_0^1 (1-t)^r \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{(r+1)!}{\alpha!} h^\alpha \partial^\alpha f(a+th)\,\mathrm{d}t \\ &= (r+1)\int_0^1 (1-t)^r \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(a+th)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Ziehen wir alle t-unabhängigen Terme vor das Integral, so erhalten wir die erste Restgliedformel. Für eine *skalare* Funktion besteht der letzte Integrand aus dem Produkt einer Linearkombination stetiger skalarer Ableitungen von f mit der auf $[0,1]$ nichtnegativen Funktion $(1-t)^r$. Hierauf können wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung ${}_{10.6}$ anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} R_a^r f(h) &= \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(a+\theta h) \cdot (r+1) \int_0^1 (1-t)^r \, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\xi) h^\alpha \end{aligned}$$

mit einem $\theta \in [0,1]$ und $\xi = a + \theta h \in [a, a+h]$, denn

$$\int_0^1 (1-t)^r \, \mathrm{d}t = \frac{1}{r+1}.$$

Dies ist die zweite Restgliedformel. ⟫⟫⟫

Wir benötigen die Taylorformel vor allem bis zum quadratischen Restglied. Hierbei spielt die *Hessematrix* eine zentrale Rolle.

Definition *Für eine C^2-Funktion $f \colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ heißt*

$$Hf(a) \coloneqq \left(f_{x_k x_l}(a)\right)_{1 \leqslant k,l \leqslant n}$$

die Hessematrix oder Hessische von f an der Stelle a. ⋊

Wegen des Satzes von Schwarz ist die Hessische einer C^2-Funktion immer eine *symmetrische* Matrix.

▹ Für eine quadratische Form

$$f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n a_{kl} x_k x_l$$

mit einer symmetrischen Matrix $A = (a_{kl})$ und dem Standardskalarprodukt ist

$$f_{x_k x_l} = a_{kl}, \qquad 1 \leqslant k, l \leqslant n.$$

Also ist $Hf = A$. ◂

5 **Quadratische Taylorformel** *Sei $f \colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Gehört $[a, a+h]$ zum Definitionsbereich von f, so gilt*

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(\xi) h, h \rangle \tag{1}$$

mit einem $\xi \in [a, a+h]$. ⋊

⟪⟪⟪ Dies folgt aus der Taylorformel in Multiindex-Notation ${}_4$ mit $r = 1$. Der Multiindex der Länge 0 ergibt den Term $f(a)$, die Multiindizes der Länge 1 den linearen Term

$$\sum_{k=1}^n f_{x_k}(a) h_k = \langle \nabla f(a), h \rangle.$$

Das Restglied für skalare Funktionen 4 ergibt den Term

$$\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=2}\partial^\alpha f(\xi)h^\alpha = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n} f_{x_k x_l}(\xi)h_k h_l = \frac{1}{2}\langle Hf(\xi)h, h\rangle$$

wobei die erste Identität auf der binomischen Formel 2 beruht. ⟫⟫⟫

Bemerkung Dieses Ergebnis ergibt sich auch direkt aus dem entsprechenden eindimensionalen Satz. Für $\varphi(t) = f(a+th)$ gilt

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,\mathrm{d}t.$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung 10.6 und

$$\varphi''(\theta) = \langle Hf(\xi)h, h\rangle$$

ergibt dies (1). ⊸

▪ Polynome und Taylorreihen

Die Taylorformel approximiert Funktionen lokal durch Polynome in mehreren Variablen. Hier erklären wir noch die zugehörigen Begriffe.

Definition *Ist α ein Multiindex, so heißt die Funktion*

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot\cdot\, x_n^{\alpha_n}$$

ein Monom in n Variablen vom Grad $|\alpha|$. Eine Linearkombination

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{|\alpha|\leqslant N} a_\alpha x^\alpha$$

mit reellen Koeffizienten a_α heißt reelles Polynom in n Variablen. Sein Grad ist $\max\{|\alpha| : a_\alpha \neq 0\}$. ⋊

A. Das Nullpolynom hat Grad $-\infty$, da nach Vereinbarung $\max\varnothing = -\infty$.
B. Es ist xy^2z^3 ein Monom vom Grad 6, und $1+x+xy^2+xy^2z^3$ ein Polynom vom Grad 6.

Jede partielle Ableitung verringert den Grad eines Polynoms um 1, wenn es nicht das Nullpolynom ist. Nach endlich vielen Ableitungen erhält man somit das Nullpolynom. Hiervon gilt auch die Umkehrung.

Satz *Ist $f : V \hookrightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^{r+1} und*

$$\partial^\alpha f \equiv 0, \qquad |\alpha| = r+1,$$

so ist f lokal ein Polynom vom Grad $\leqslant r$. ⋊

15.6

⟪⟪ Entwickeln wir f in einem beliebigen Punkt a seines Definitionsbereichs, so gilt in einer Umgebung von a aufgrund des Satzes von Taylor 4

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant r} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a)(x-a)^\alpha + R_a^{r+1} f(x).$$

Nach Voraussetzung verschwindet das Restglied, und es bleibt ein Polynom vom Grad $\leqslant r$. ⟫⟫

Bemerkung Der Satz macht nur eine *lokale* Aussage, da eine solche Funktion auf nicht zusammenhängenden Komponenten seines Definitionsbereichs durch verschiedene Polynome definiert sein kann. ⊸

Eine C^∞-Funktion $f: V \hookrightarrow \mathbb{R}$ können wir um einen Punkt a seines Definitionsbereiches *formal* in seine *Taylorreihe*

$$T_a f(x) \coloneqq \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a)(x-a)^\alpha$$

entwickeln. Bereits im eindimensionalen Fall braucht diese jedoch in keinem Punkt $x \neq a$ zu konvergieren. Und selbst wenn sie konvergiert, muss sie nicht die Funktion f darstellen – siehe das Gegenbeispiel von Cauchy 12.2. Ist dies aber der Fall, so nennt man die Funktion f *reell analytisch* in n Variablen.

Es gilt zum Beispiel folgender Satz in einer wie in mehreren Dimensionen.

6 **Satz** *Sei $f: V \hookrightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^∞. Existiert zu einer Kugel $B_r(a)$ im Definitionsbereich von f ein $M > 0$, so dass*

$$\frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in B_r(a)} |\partial^\alpha f(x)| \leqslant \frac{M}{r^{|\alpha|}}, \qquad \alpha \in \mathbb{N}_0^n,$$

so konvergiert die Taylorreihe $T_a f$ auf jeder abgeschlossenen Kugel in $B_r(a)$ absolut und gleichmäßig gegen f. ⋊

Da wir den Satz nicht benötigen, ist der Beweis als Übung überlassen A-1. Seine Voraussetzung ist zum Beispiel erfüllt für die in Kapitel 9 betrachteten elementaren Funktionen.