16. Vorlesung 15. 6. 2021

Bsp:

1. $L_v : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \langle v, x \rangle$

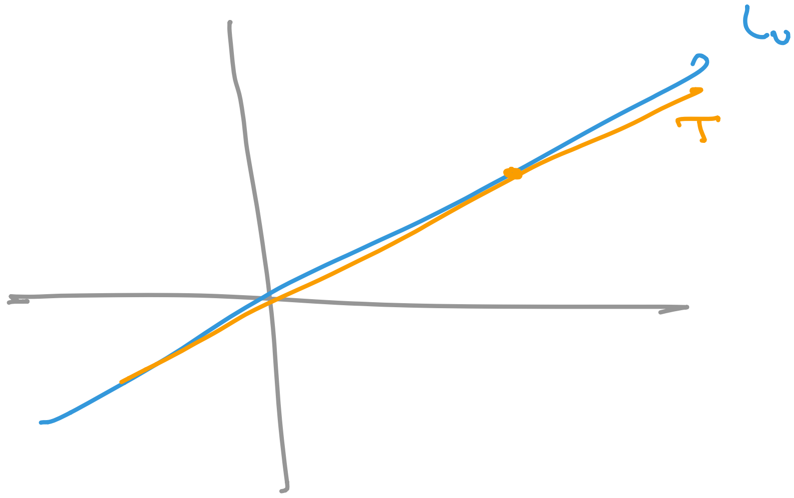
$v \in U$ fest, U Teilraum.

$DL_v \cdot h = \langle v, h \rangle$

Also:

$T = \langle v, a \rangle + \langle v, x-a \rangle$

$= \langle v, x \rangle = L_v(x)$



2. $Q : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$$Q(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle$$

$$DQ(x_0)h = \langle Ax_0, h\rangle$$

Tang. plane :

$$z = \frac{1}{2}\langle Ax_0, x_0\rangle + \langle Ax_0, x - x_0\rangle$$

$$= \left\langle Ax_0, x - \frac{x_0}{2}\right\rangle .$$

2

Dann:

$$z = f(a) + Df(a) \cdot (x - x_0)$$

$$= f(a) + \langle \nabla f(a), x - x_0 \rangle$$

$(\Leftrightarrow)$

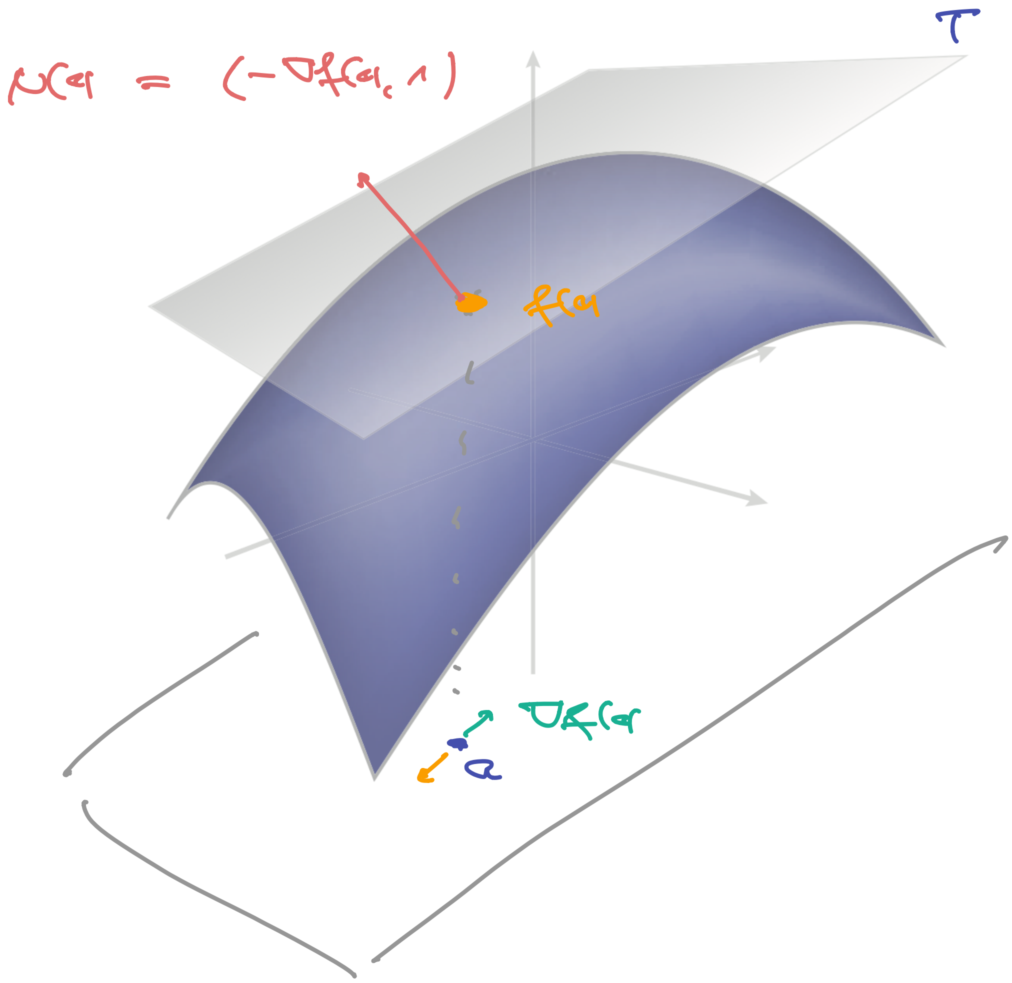
$$\langle -\nabla f(a), x - a \rangle_{\mathbb{R}^n} + 1 \cdot (z - f(a))_{\mathbb{R}} = 0$$

$$\underbrace{\langle (-\nabla f(a), 1), (x - a, z - f(a)) \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}}_{} = 0$$

Normalvektor in $\mathbb{R}^{n+1}$ Punkt in $\mathbb{R}^{n+1}$ fester Punkt auf T

Normalform einer Ebene.

$\square$



N(a) = (−∇f(a), 1)
T
f(a)
∇f(a)
a

Beweis: $v \in U$

$\varphi: \quad \varphi(t) = f(a+tv)$

$(-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$

φ besitzt in $t=0$ ein lokales Extr.

φ ist in $t=0$ differenzierbar!

Fermat für t: $\varphi'(0) = 0$.

Also: $\frac{d}{dt} f(a+tv) \Big|_{t=0} = 0$

$Df(a)v = 0 \quad , \forall v \in U.$

Also: $Df(a) = 0.$ $\blacksquare$

Bsp: $f(x) = \frac{1}{2}\langle x, x \rangle$

hat bei 0 ein striktes Minimum

Bew.: $Df(x)\cdot h = \langle x, h \rangle$

$= 0$ für $x = 0$, $h \in U$.

$\square$

Tangentialraum im kritischen Punkt:

$$\nu = (-\underbrace{\nabla f(x)}_{0}, 1)$$

$$= (0, \dots, 0, 1)$$

$$= e_{n+1}$$

$$S(n) = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T = A \}$$

$$\dim S(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bsp.:

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} > 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \gtrless 0 .$$

$\blacksquare$

Bew: (i) $\Longrightarrow$ (ii)

$$Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Q(v) = \langle Av, v\rangle.$$

stetig, und $Q\big|_{S^{n-1}} > 0$. Kompakt

Q nimmt Minimum an:

$$\mu = \min_{\|u\|=1} Q(u) = Q(u_0) > 0, \quad \|u_0\| = 1$$

Für $v \neq 0$ beliebig:

$$\langle Av, v\rangle = |v|^2 \Big\langle A \underbrace{\tfrac{v}{|v|}}_{\in S}, \underbrace{\tfrac{v}{|v|}}_{\in S} \Big\rangle \geq \mu \cdot |v|^2$$

Gilt auch für $v = 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii):

$$\langle (A - \mu E_n) v, v\rangle = \langle Av, v\rangle - \mu \langle v, v\rangle = \langle Av, v\rangle - \mu |v|^2 \geq 0.$$

Also: $A - \mu E_n \geq 0$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i)

$$\langle Av, v\rangle \geq \underset{>0}{\mu} |v|^2 > 0, \quad v \neq 0$$

Also: $A > 0$. $\square$

Beweis: A symmetrisch. Dann $\exists$ Orthonormalsystem aus Eigenvektoren:

$w_1, \dots, w_n$:

$$A w_j = \lambda_j w_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\langle w_k, w_l \rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

Für $v = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$:

$$Av = \lambda_1 v_1 w_1 + \dots + \lambda_n v_n w_n$$

und

$$\langle Av, v \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i v_i v_j \underbrace{\langle w_i, w_j \rangle}_{\delta_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{v_i^2}_{\geq 0}$$

Also $\lambda_j \geq \mu > 0$:

$$\langle Av, v \rangle \geq \sum_{i=1}^{n} \mu v_i^2 > 0,$$

$v \neq 0$

$\square$

Beweis:

(iii) $\det A = \lambda_1 \lambda_2 < 0$

falls $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, verschiedene Vorzeichen

$\Longleftrightarrow$ $A \gtrless 0$.

(iv) $\det A > 0$

falls $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, dasselbe Vorzeichen

Vorzeichen bestimmt durch $a = A_{11}$:

$$a = \langle A e_1, e_1 \rangle$$

$$d = \langle A e_2, e_2 \rangle.$$

Bew.: $A(c) > 0$. Dann ex. $\mu > 0$:

$$\langle A(c)v, v\rangle \geq 2\mu \cdot |v|^2, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Zu dieser $\mu > 0$ ex. Umgebung U von c:

$$\| A(x) - A(c) \| \leq \mu, \quad x \in U.$$

Damit:

$$\begin{aligned}
&|\langle A(x)v, v\rangle - \langle A(c)v, v\rangle| \\
&= |\langle (A(x) - A(c))v, v\rangle| \\
&\leq |(A(x) - A(c))v| \cdot |v| \\
&\leq \|A(x) - A(c)\| \cdot |v|^2 \\
&\leq \mu |v|^2, \qquad x \in U.
\end{aligned}$$

Dann gilt auch:

$$\begin{aligned}
|\langle A(x)v, v\rangle| &\geq |\langle A(c)v, v\rangle| - \mu |v|^2 \\
&\geq 2\mu |v|^2 - \mu |v|^2 \\
&\geq \mu \cdot |v|^2
\end{aligned}$$

Also:

$$A(x) > 0, \quad x \in U.$$

$\square$

Bew.: Sei jetzt $v \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi : t \mapsto f(c+tv)$$

hat bei $t=0$ ein lok. Minimum.

Also gilt

$$\varphi''(0) \geq 0$$

Also:

$$\varphi''(0) = \partial_v^2 f(c) = \langle \operatorname{Hess} f(c)\, v, v \rangle$$

$$\geq 0$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$: also

$$\operatorname{Hess} f(c) \geq 0.$$

∎

Nicht äquivalent:

$$f(t) = t^3$$

$$f'(0) = 0, \quad \underbrace{f''(0) = 0}_{\text{semi-definit}}$$

aber 0 kein Extremum.

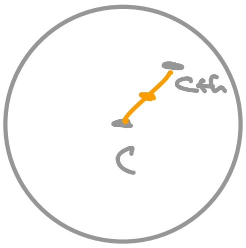
∎

Beweis: Sei c ein ... $Df(c) = 0$.

Quadratische Taylor:

$$f(c+h) = f(c) + \frac{1}{2}\overbrace{\langle \operatorname{Hess} f(\xi)h, h\rangle}^{\geq 0}$$

für ein $\xi \in [c, c+h]$.



Gilt U Semidefinitheit:

$$\operatorname{Hess} f(x) \geq 0, \quad x \in U$$

Also

$$f(c+h) \geq f(c)$$

Also:

$$f(x) \geq f(c), \quad x \in U.$$

$$f(c+h) = f(c) + \frac{1}{2}\underbrace{\langle \operatorname{Hess} f(\xi)h, h\rangle}_{>0,\ \text{für } \xi \in U,\ h \neq 0}$$

Damit:

$$f(c+h) > f(c), \quad h \neq 0, \quad c+h \in U$$

Also:

$$f(x) > f(c), \quad x \in U, \quad x \neq c. \quad \square$$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(0) = 0$$

$$Df(0) = 0$$

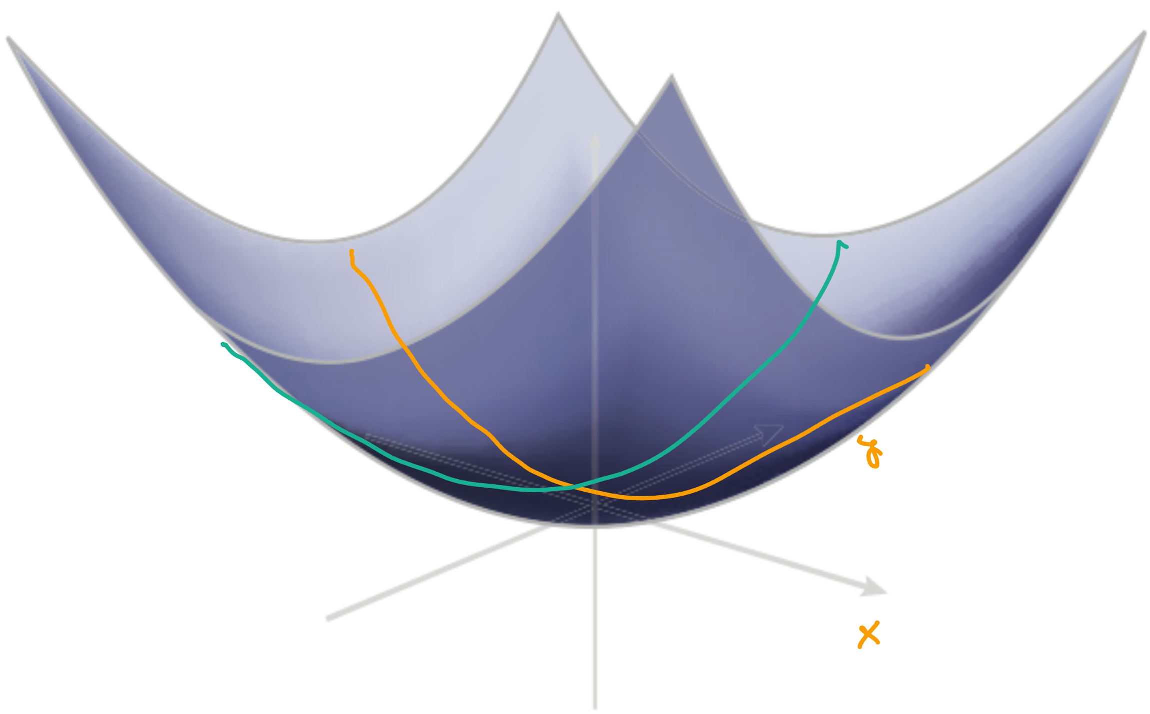
$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \dots$$

① Definite Fall

$$f(x,y) = x^2 + y^2 :$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \quad Hf = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{> 0}$$

$$= 0 \iff (x,y) = 0$$



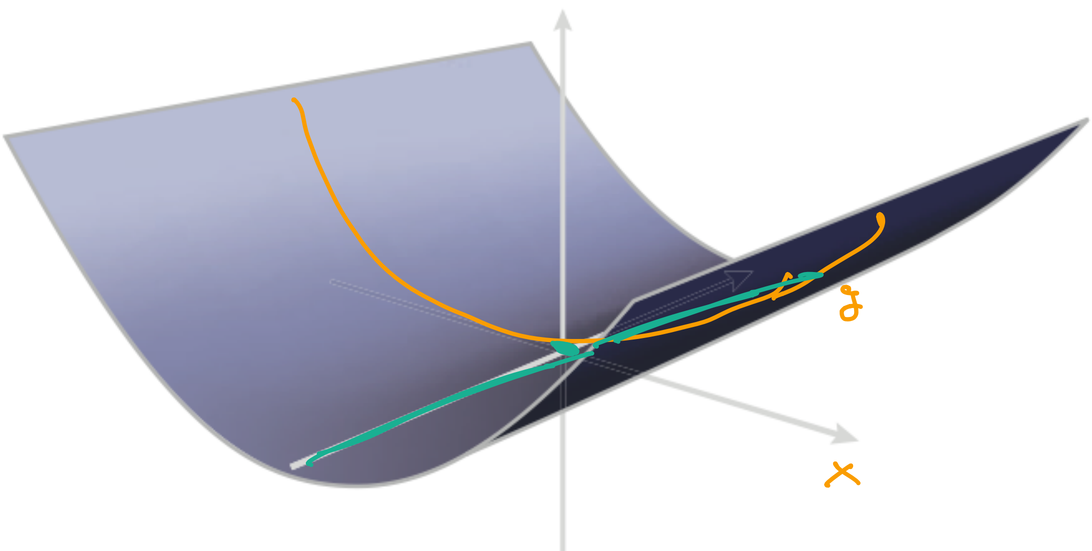
und als geöffnet Paraboloid

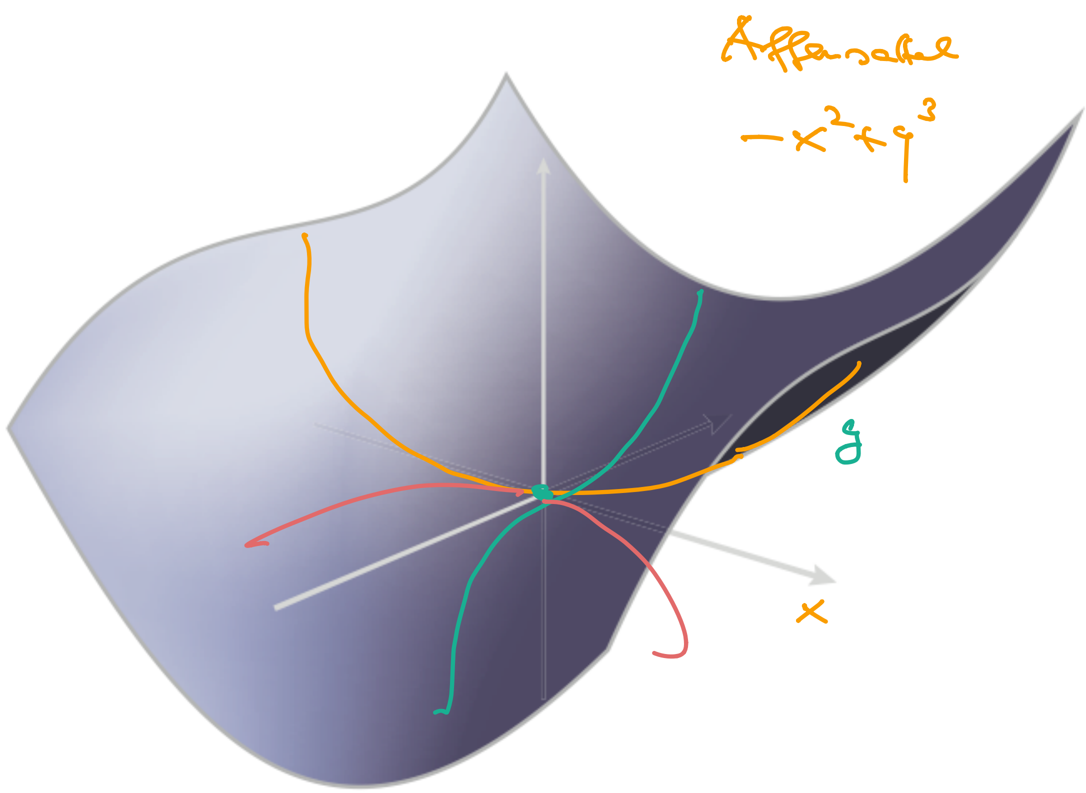
Semidefinit Fall

$$H_f(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

g.R.

$$\nabla f(0) = 0.$$




Affensattel
$-x^2+y^3$
y
x

Sattelpunkt :

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & \\ & -2 \end{pmatrix}$$