17. Vorlesung 22.6.2021

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 u$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 = \nabla \cdot \nabla$$

$\Delta u =$ Spur H_u

$=$ Summe der Eigenwerte von H_u

Beispiele:

1. $n=1$, $u: I \to \mathbb{R}$

$$\Delta u = u'' = 0$$

$\iff$ u linear.

2. $n=2$. p beliebiges Polynom mit komplexen Koeff.

$$u = u(x,y) = \underset{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}\; p(x+iy)$$

ist harmonisch.

3. $n \geq 2$:

$$u: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$

$$u(x) = \begin{cases} \log|x|, & n=2 \\ |x|^{2-n}, & n \geq 3 \end{cases}$$

Beweis: (i) Betrachte die modifizierte Funktion

$$w = u + \varepsilon v, \qquad \varepsilon > 0,$$

mit $v(x) = x_1^2 + .. + x_n^2 \geqslant 0$. Es ist $\Delta v = 2n > 0$ und damit

$$\Delta w = \Delta u + \varepsilon \Delta v = 2n\varepsilon > 0.$$

Diese Funktion besitzt in Ω keine Maximalstelle. Denn wäre $c \in \Omega$ eine solche Maximalstelle, so wäre $Hw(c) \leqslant 0$ [11], und somit wären alle Eigenwerte von $Hw(c)$ nichtpositiv. Dann ist aber auch

$$\Delta w(a) = \operatorname{sp} Hw(c) \leqslant 0,$$

im Widerspruch zu $\Delta w > 0$. Somit besitzt w in Ω kein lokales Maximum.

Andererseits ist w nach Voraussetzung auf $\bar{\Omega}$ stetig. Diese Menge ist abgeschlossen und beschränkt und damit kompakt. Also nimmt w auf $\bar{\Omega}$ sein Maximum an, und es gilt

$$\max_{\bar{\Omega}} w = \max_{\partial\Omega} w = \max_{\partial\Omega} (u + \varepsilon v) \leqslant (\max_{\partial\Omega} u) + \varepsilon r^2$$

$B_r(0) \supset \Omega$

für ein hinreichend großes r. Also gilt auch

$$\boxed{\max_{\bar{\Omega}} u \leqslant \max_{\bar{\Omega}} w \leqslant \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon r^2.}$$

$\Longrightarrow \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt hieraus die erste Behauptung.

(ii) Mit u ist auch $-u$ harmonisch und mit dem gerade Bewiesenen also

$$\max_{\bar{\Omega}} (-u) = \max_{\partial\Omega} (-u).$$

Dies ist äquivalent mit $\boxed{\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.}$, Zusammen mit (i) folgt hieraus die zweite Behauptung.

(iii) Nach Voraussetzung ist $u|_{\partial\Omega} = m$ mit einer reellen Konstanten m. Dann ist aber auch $u - m$ harmonisch, also

$$\boxed{\max_{\bar{\Omega}} |u - m| = \max_{\partial\Omega} |u - m| = 0.}$$

Also gilt $u \equiv m$ auf $\bar{\Omega}$. »»»

Beispiele:

1. $U = \mathbb{R}$, M konvex gdw
   M Intervall.

2. Jede offene Kugel $B_r(a)$

$$B_r(a) = \{ x \in U : \|x-a\| < r \}$$

ist konvex:

Sei $u, v \in B_r(a)$; $0 \le t \le 1$:

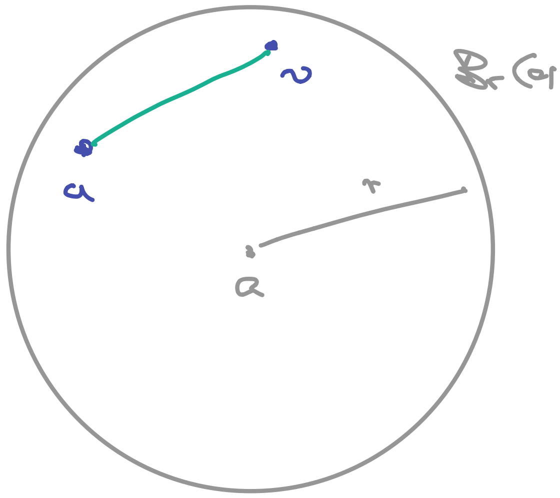
$$\| (1-t)u + tv - \underbrace{a}_{= (1-t)a + ta} \|$$

$$= \| \underbrace{(1-t)}_{\geq 0}(u-a) + \underbrace{t}_{\geq 0}(v-a) \|$$

$$\le (1-t) \underbrace{\|u-a\|}_{< r} + t \cdot \underbrace{\|v-a\|}_{< r}$$

$$< (1-t)r + t \cdot r = r$$

Also : $(1-t)u + tv \in B_r(a)$, $0 \le t \le 1$.



3. Beweise jetzt die abgeschlossene Kugel.

Ersetze '<' durch '≤'.

4. Sei $\{K_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ Familie konvexer Mengen in V.

Dann

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda \quad \text{auch konvex.}$$

5. Sei $A \subset U$ beliebig, nicht-leer.

$\hat{A} := \bigcap \{K \supset A : K \text{ konvex}\}$

konvexe Hülle von A:

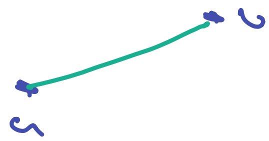
die kleinste konvexe Menge, die

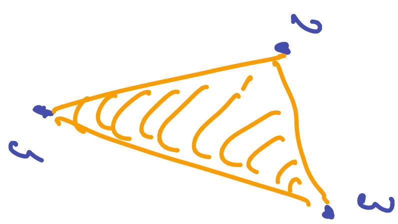
A enthält.

Bsp:

$A = \{u, v\}$:

$\hat{A} = [u, v]$





6. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, sei $a \in \Omega$.

Dann ist

$\Omega \setminus \{a\}$ nicht konvex.

7. Eine Kreisscheibe ist konvex.

$(1-t)u + tv$, $\quad 0 \le t \le 1$

Konvexkombination.

Beweis: $\Leftarrow$ ✓

$\Rightarrow$ Induktion über n:

$n = 1$ ✓

$n = 2$ ✓

Betrachte

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{n+1} u_{n+1}$$

Fall $\lambda_{n+1} = 1$: $u = u_{n+1}$ ✓

Sei $\lambda_{n+1} < 1$: Dann

$$\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 - \lambda_{n+1} > 0$$

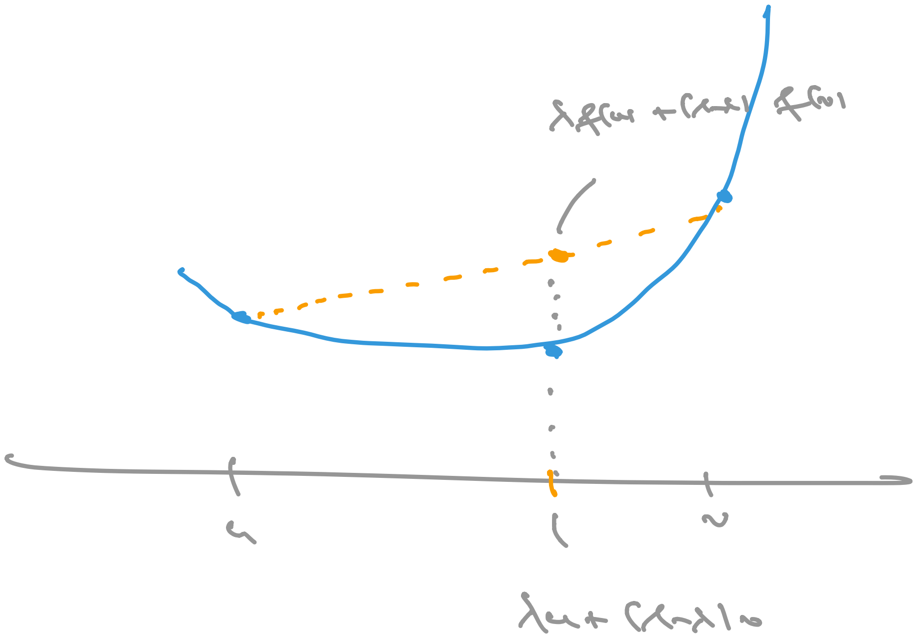
IA:

$$v = \underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda} u_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda} u_n}_{\text{konvex Komb.}} \in K$$

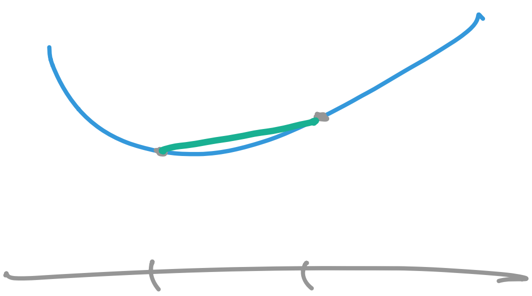
Dann auch

$$\lambda v + (1-\lambda) u_{n+1} \in K$$

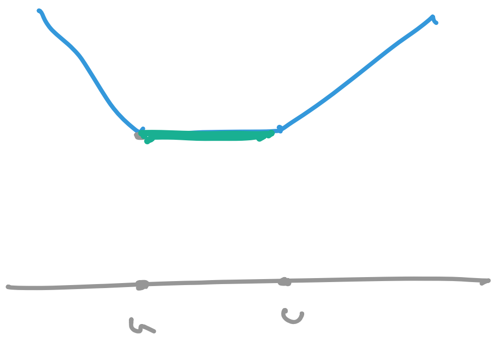
$$= \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} u_{n+1} \qquad \square$$



Bsp:



strikt konvex



konvex, nicht strikt.

Bsp I: Normen sind konvex:

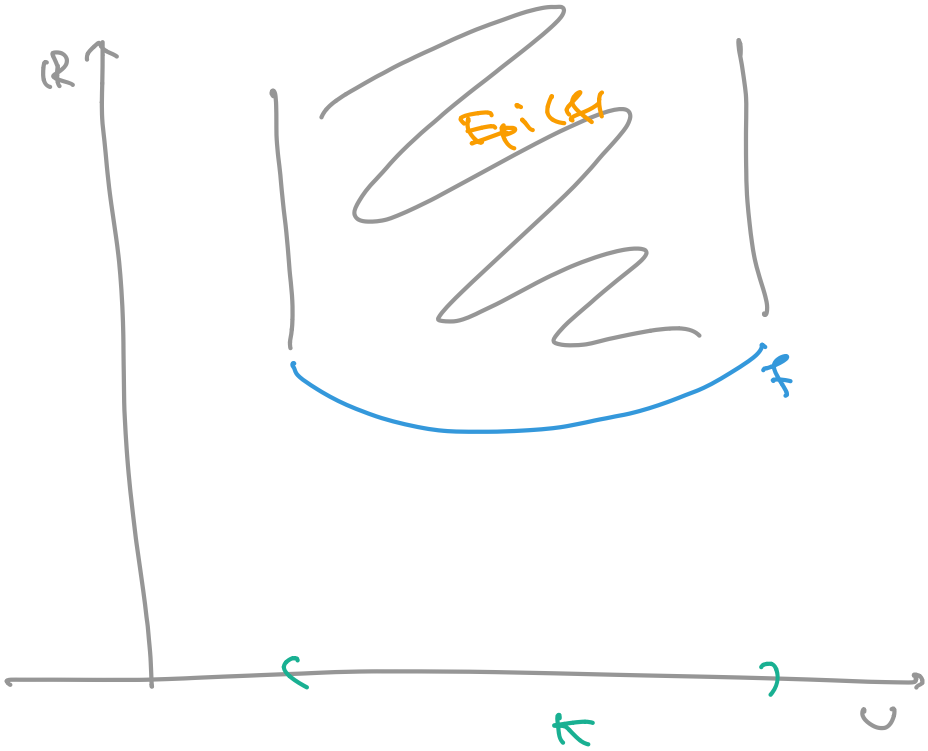
$$N : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

Bew.:

$$N((1-t)u + tv)$$

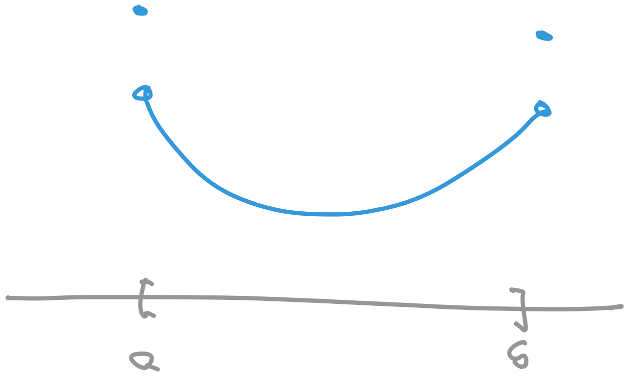
$$\le N(\underbrace{(1-t)}_{\ge 0}u) + N(\underbrace{t}_{\ge 0}v)$$

$$= (1-t)N(u) + tN(v).$$



f convex as function

$\iff$ Epi(f) convex as subset of $U \times \mathbb{R}$.



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

strikt konvex, <u>nicht</u> stetig.