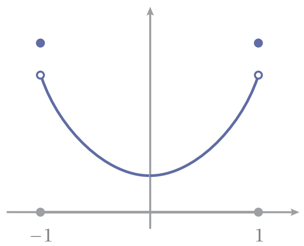


Abb 10

Eine konvexe unstetige Funktion

▪ Konvexität und Differenzierbarkeit

Wir wollen nun Konvexität durch Eigenschaften der ersten und zweiten Ableitung charakterisieren. Grundlegend ist folgender Satz.

18 **Satz** *Sei $\Omega \subset V$ offen und konvex und $f \in C^1(\Omega)$. Dann ist f konvex genau dann, wenn*

$$f(x+h) \geqslant f(x) + Df(x)h$$

für alle $x, x+h \in \Omega$. Sie ist strikt konvex genau dann, wenn außerdem

$$f(x+h) > f(x) + Df(x)h$$

für alle $h \neq 0$ gilt. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ $\Rightarrow$ Sei f konvex. Mit $x, x+h$ gehört dann auch

$$x + th = (1-t)x + t(x+h), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

zu Ω, und aufgrund der Konvexität von f gilt

$$f(x+th) \leqslant (1-t)f(x) + tf(x+h) = f(x) + t\,(f(x+h) - f(x)).$$

Wegen $f \in C^1(\Omega)$ gilt also

$$f(x+h) - f(x) \geqslant \frac{1}{t}\,(f(x+th) - f(x)) = \frac{1}{t}\int_0^t Df(x+sh)h\,\mathrm{d}s \tag{2}$$

für alle $0 < t < 1$ mit einem in s stetigen Integranden. Mit $t \to 0$ und dem Riemannschen Lemma $_{10.15}$ erhalten wir somit die Behauptung

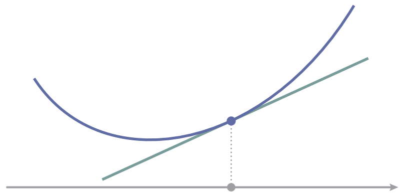
$$f(x+h) - f(x) \geqslant Df(x)h \tag{3}$$

für den Fall der einfachen Konvexität.

Ist f sogar strikt konvex, so gilt in (2) die strikte Ungleichung. Zusammen mit der eben bewiesenen Ungleichung (3) für th anstelle von h erhalten wir

Abb 11

Konvexe Funktion mit Stützgerade



$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &> \frac{1}{t}(f(x+th)-f(x)) \\ &\geqslant \frac{1}{t}Df(x)(th) = Df(x)h \end{aligned}$$

wie behauptet.

$\Leftarrow$ Seien $x \neq y$ zwei Punkte in Ω und $z = (1-t)x + ty$ mit $0 < t < 1$. Dann ist mit $h = y - x$ umgekehrt

$$x = z - th, \qquad y = z + (1-t)h.$$

Wenden wir hierauf (3) an, so erhalten wir

$$f(x) \geqslant f(z) - tDf(z)h, \qquad f(y) \geqslant f(z) + (1-t)Df(z)h.$$

Multiplizieren der ersten Gleichung mit $1-t \geqslant 0$, der zweiten mit $t \geqslant 0$ und anschließendes Addieren ergibt

$$(1-t)f(x) + tf(y) \geqslant f(z) = f((1-t)x + ty).$$

Somit ist f konvex. Gilt in der Voraussetzung (3) sogar die strikte Ungleichung, so gilt sie auch in den letzten drei Ungleichungen, und wir erhalten die strikte Konvexität von f. ⟫⟫⟫

Der Graph der Funktion $h \mapsto f(x) + Df(x)h$ beschreibt die *Tangentialebene* an den Graphen von f im Punkt $(x, f(x))$. Eine C^1-Funktion ist somit (strikt) konvex genau dann, wenn ihr Graph (strikt) oberhalb aller ihrer Tangentialebenen liegt, mit Ausnahme natürlich des jeweiligen Berührpunktes. Solche Ebenen werden *Stützebenen*, im eindimensionalen Fall *Stützgeraden* genannt.

Im eindimensionalen Fall ergibt sich aus dem letzten Satz folgende Charakterisierung konvexer C^1-Funktionen.

19 **Satz** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C^1(I)$. Dann ist f (strikt) konvex genau dann, wenn f' (streng) monoton steigt.* ⋊

⟪⟪⟪ $\Rightarrow$ Besteht I nur aus einem Punkt, so ist nichts zu tun. Sei also I nichtentartet, und seien $u < v$ innere Punkte von I. Dann ergibt der letzte Satz

$$f(v) - f(u) \geqslant f'(u)(v-u), \qquad f(u) - f(v) \geqslant f'(v)(u-v).$$

Daraus folgt $f'(u)(v-u) \leqslant f'(v)(v-u)$ und damit $f'(u) \leqslant f'(v)$. Aus Stetigkeitsgründen gilt dies dann auch für etwaige Randpunkte von I. Ist f zudem strikt konvex, so gelten überall auch die strikten Ungleichungen.

$\Leftarrow$ Ist f' monoton wachsend, so gilt

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 f'(x+sh)h\,\mathrm{d}s \geqslant \int_0^1 f'(x)h\,\mathrm{d}s = f'(x)h,$$

und zwar sowohl für $h \geqslant 0$ wie auch $h \leqslant 0$. Ist f' streng monoton wachsend, so gilt für $h \neq 0$ sogar die strikte Ungleichung. Die Behauptung folgt dann mit dem letzten Satz $_{18}$. 》》》

Nun betrachten wir nun noch den Fall einer C^2-Funktion.

Satz *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $f \in C^2(\Omega)$. Dann ist f konvex genau dann, wenn $Hf \geqslant 0$ auf ganz Ω. Gilt sogar $Hf > 0$, so ist f strikt konvex.* ⋊

《《《 Mit $x, x+h \in \Omega$ ist wegen der Konvexität von Ω auch $[x, x+h] \subset \Omega$. Aufgrund der quadratischen Taylorformel $_5$ gilt

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(\xi)h, h \rangle \tag{4}$$

für ein $\xi \in [x, x+h]$. Ist $Hf \geqslant 0$ auf Ω, so folgt

$$f(x+h) \geqslant f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle \tag{5}$$

und hieraus die Konvexität von f $_{18}$. Gilt sogar $Hf > 0$ auf Ω, so folgt entsprechend die strikte Konvexität.

Ist umgekehrt f konvex, so gilt wieder (5) $_{18}$, und mit (4) folgt somit

$$\langle Hf(\xi)h, h \rangle \geqslant 0$$

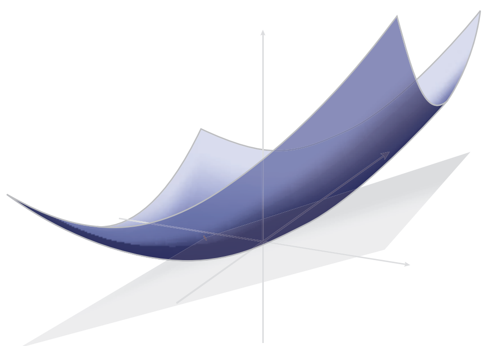


Abb 12

Konvexe Fläche mit Stützebene

mit einem $\xi \in [x, x+h]$. Ersetzen wir h durch εh, so gilt *dieselbe* Ungleichung mit $\xi \in [x, x+\varepsilon h]$. Lassen wir ε gegen Null konvergieren, so konvergiert ξ gegen x, und wir erhalten

$$\langle Hf(x)h, h\rangle \geqslant 0.$$

Da dies für jedes kleine h gilt, ist $Hf(x) \geqslant 0$. Dies gilt für jedes $x \in \Omega$. ⟫⟫⟫

Bemerkung Umgekehrt folgt aus der strikten Konvexität *nicht*, dass auch die Hessische strikt positiv definit ist. Zum Beispiel ist $x \mapsto x^4$ strikt konvex, aber die zweite Ableitung verschwindet bei $x = 0$. ⊸

A. exp ist strikt konvex auf $\mathbb{R}$.
B. log ist strikt anti-konvex, das heißt, $-\log$ ist strikt konvex auf $(0, \infty)$.
C. Jede C^2-Funktion f auf einem Intervall mit $f'' > 0$ ist strikt konvex.

15.5 Konvexe Ungleichungen

Auf Konvexitätsargumenten beruhen einige wichtige Ungleichungen der Analysis. Zunächst die

20 **Jensensche Ungleichung** *Sei φ integrierbar auf dem Intevall I. Ist f stetig und konvex auf $\varphi(I)$, so gilt*

$$f\left(\fint_I \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \fint_I f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t,$$

wobei

$$\fint_I \varphi(t)\,\mathrm{d}t \coloneqq \frac{1}{|I|}\int_I \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

das gemittelte Integral über I bezeichnet ⋊

⟪⟪⟪ Für eine Treppenfunktion $\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{(t_{k-1}, t_k)}$ gilt

$$\fint_I \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k - t_{k-1}}{|I|} c_k.$$

Dies ist eine Konvexkombination der reellen Zahlen $c_1, .., c_n$ im Intervall $\varphi(I)$. Aufgrund der Konvexität von f auf $\varphi(I)$ gilt daher [17]

$$\begin{aligned} f\left(\fint_I \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k - t_{k-1}}{|I|} f(c_k) = \frac{1}{|I|}\sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) f(c_k) \\ &= \frac{1}{|I|}\int_I f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t = \fint_I f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Somit gilt die Jensensche Ungleichung für Treppenfunktion. Aus Stetigkeitsgründen gilt sie dann auch für alle Regelfunktionen. ⟫⟫⟫

▷ Ist φ integrierbar auf I, so gilt

$$\int_I |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_I |\varphi(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}, \qquad p \geqslant 1.$$

für alle $p \geqslant 1$. ◁

21 **Youngsche Ungleichung** *Für reelle Zahlen $a, b \geqslant 0$ und Exponenten $p, q > 1$ mit $1/p + 1/q = 1$ gilt*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $a^p = b^q$. ⋊

⟪⟪⟪ Für $u, v > 0$ und $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ gilt ja

$$\alpha \log u + (1-\alpha)\log v \leqslant \log(\alpha u + (1-\alpha)v).$$

Bilden wir auf beiden Seiten das Exponenzial, so erhalten wir die *Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel*,

$$u^\alpha v^{1-\alpha} \leqslant \alpha u + (1-\alpha)v.$$

Mit $\alpha = 1/p$, $1 - \alpha = 1/q$ sowie $u = a^p$, $v = b^q$ ergibt sich die Youngsche Ungleichung. ⟫⟫⟫

Reelle Zahlen p und q mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \qquad p, q > 1,$$

werden als *konjugierte Exponenten* bezeichnet. Für diese gelten die oft benötigten Identitäten

$$\begin{aligned} p + q = pq \quad &\Leftrightarrow \quad (p-1)(q-1) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad p(q-1) = q \\ &\Leftrightarrow \quad q(p-1) = p. \end{aligned}$$

Die einzigen *selbstkonjugierten Exponenten* sind $p = q = 2$.

22 **Höldersche Ungleichung** *Für auf einem Intervall I integrierbare Funktionen f, g und konjugierte Exponenten p und q gilt*

$$\int_I |fg| \leqslant \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_I |g|^q\right)^{1/q}.$$ ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Verschwindet das Integral von $|f|$ oder $|g|$, so verschwindet auch das Integral von $|fg|$, und es ist nichts zu zeigen. Wir können also annehmen, dass

$$A = \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p} > 0, \qquad B = \left(\int_I |g|^q\right)^{1/q} > 0$$

gilt. Aufgrund der Youngschen Ungleichung gilt dann punktweise

$$\frac{|f|}{A}\,\frac{|g|}{B} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|f|^p}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{|g|^q}{B^q}.$$

Integration über $[a,b]$ ergibt

$$\frac{1}{AB}\int_I |fg| \leqslant \frac{1}{p}\int_I \frac{|f|^p}{A^p} + \frac{1}{q}\int_I \frac{|g|^q}{B^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dies ist äquivalent zur behaupteten Ungleichung. ⟩⟩⟩⟩⟩

Ein Spezialfall dieser Ungleichung ist die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung in Integralform,

$$\int_I |fg| \leqslant \left(\int_I |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_I |g|^2\right)^{1/2}.$$

Mithilfe der Hölderschen Ungleichung erhalten wir die

23 **Minkowskische Ungleichung** *Für auf einem Intervall I integrierbare Funktionen f,g und $p \geqslant 1$ gilt*

$$\left(\int_I |f+g|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_I |g|^p\right)^{1/p}. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Für $p = 1$ ist dies die Dreiecksungleichung. Sei also $p > 1$. Es ist

$$|f+g|^p = |f+g|^{p-1}\,|f+g| \leqslant |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1}. \tag{6}$$

Mit dem zu p konjugierten Exponenten q ist $(p-1)q = p$ und mit der Hölderschen Ungleichung somit

$$\begin{aligned}\int |f+g|^p &\leqslant \left(\int |f|^p\right)^{1/p} \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\ &\quad + \left(\int |g|^p\right)^{1/p} \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\ &= \left\{\left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\right)^{1/p}\right\} \left(\int |f+g|^p\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Ist nun die linke Seite Null, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls dividieren wir durch den ganz rechts stehenden Faktor und erhalten wegen $1 - 1/q = 1/p$ die Minkowskische Ungleichung. ⟩⟩⟩⟩⟩