

$$x \mapsto Ax$$

$$x(t) \mapsto e^{At} x_0 \quad \text{Eigenwert } \lambda_j$$

bei Laplace Transform:

$$x(s) = \frac{A s^{-1} x_0}{sI - A}$$

() ()
Zi f. Wert

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

Ziel:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

$$L(U) = \{ A: U \rightarrow U \text{ Sei } \alpha \text{ vgl.} \}$$

l. i. Na auf U

$$(Ax) := \sum_{x \in X} \frac{(Ax)}{(x)} = \sum_{x \in X} (Ax)$$

wird dann

Distributiv:

$$A(B+C) = \underbrace{AB} + AC$$

Nun:

$$\|AB\| \cong \|A\| \cdot \|B\|$$

wei: Multipl. Sei mit die Komposition.

eser nicht
Zerlegung.

Gauss: $C(U)$ Standardform:

$$\|A\| = \|A\| \|B\|$$

$$\Rightarrow \|A^D\| = \|A^D\|, \quad B \geq 0$$

Also:

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{\lambda_i} \|A^D\| = \sum_{i=0}^n \frac{1}{\lambda_i} \|A^D\|$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\lambda_i > 0} \frac{1}{\lambda_i} \|A^D\| = \rho(A^D) \\ &\text{für alle } \lambda \end{aligned}$$

Also: $\rho(A)$ Hauptwert absolut
und gleichmäßig auf jede
beschränkte Teilmenge von $C(U)$.

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{i=0}^n \frac{1}{\lambda_i} \|A^D\| \right\| = \sum_{i=0}^n \frac{1}{\lambda_i} \|A^D\| = \rho(A^D) \\ &\quad \downarrow \text{also} \\ &\| \rho(A) \| = \rho(A^D) \end{aligned}$$

für alle λ

Beweis: (1) die Gleichheit:

$$\begin{aligned} (T^{-1}AT)^R &= \underbrace{T^{-1}AT}_{\text{linear}} \underbrace{T^{-1}AT}_{\text{linear}} \dots \underbrace{T^{-1}AT}_{\text{linear}} \\ &= T^{-1}A^R T \end{aligned}$$

Dann:

$$\begin{aligned} T^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) T &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{-1}A^k T}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (T^{-1}AT)^k \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$

$$T^{-1}e^{AT} T = \exp(T^{-1}AT)$$

Ex 1 $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} A^i B^{n-i}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} A^i B^{n-i} &= \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} A^i B^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{A^i B^{n-i}}{i! (n-i)!} \end{aligned}$$

Proof:

$$\begin{aligned} A^n B^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} A^i B^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} A^i B^{n-i-j} \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} A^i B^{n-i-j} \\ &= A^n B^n \end{aligned}$$

(iii)

für (ii)

$$I = e^0 = e^{A-A} \\ = e^{A+A} = e^A e^A$$

$$\Rightarrow e^A = (e^A)^{-1}$$

(und auch $e^A = (e^{-A})^{-1}$).

\square

A compact: $x^{\text{out}} = 0$

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \sum_{k=0}^3 \frac{1}{\sqrt{2}} x_k = \sum_{k=0}^3 \frac{1}{\sqrt{2}} x_k \\ &= x_0 + x_1 + \dots + \frac{1}{\sqrt{2}} x_3 \end{aligned}$$

Let x orthogonal:

$$x = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \sum \frac{1}{\sqrt{2}} x_k \\ &= \sum \frac{1}{\sqrt{2}} \text{diag}(x_1^k, \dots, x_n^k) \\ &= \text{diag}(x_1^k, \dots, x_n^k) \end{aligned}$$

Let x orthogonal:

$$A = T^{-1} T T$$

$$T^{-1} A T = T^{-1} T T = T^{-1} T T$$

1- Per. Gruppe ist

Gruppenhomomorphismen:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{Q}, +) \\ \log_{1/2} \uparrow & & \parallel \log_{1/2} \uparrow \end{array}$$

Aufgaben:

$$\log_{1/2} \log_{1/2} \parallel \log_{1/2} \log_{1/2} \parallel \log_{1/2} \log_{1/2} \parallel \log_{1/2} \log_{1/2}$$

Die $\log_{1/2}$ kommutieren!

Aufgaben:

$$(\log_{1/2}^2)^{-1} \parallel \log_{1/2}^2 \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc} \log_{1/2} \parallel \log_{1/2} & \parallel & \log_{1/2}^2 \parallel \log_{1/2}^2 & \parallel & \log_{1/2}^2 \parallel \log_{1/2}^2 & \parallel & \log_{1/2}^2 \parallel \log_{1/2}^2 \\ \parallel & & \log_{1/2}^2 & \parallel & (\log_{1/2}^2)^{-1} & \parallel & \log_{1/2}^2 \parallel \log_{1/2}^2 \end{array}$$

Proof:

$$\begin{aligned}
 & \rightarrow \mathcal{A} \mathcal{A}^T \mathbf{x}_i = \mathcal{A} \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{if } \mathcal{A} \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \\
 & \rightarrow \mathcal{A} \mathcal{A}^T \mathbf{x}_i = \mathcal{A} (\mathcal{A}^T \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_i) = \mathcal{A} \mathcal{A}^T \mathbf{x}_i + \mathcal{A} \mathbf{x}_i = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

Def:

For $\mathcal{A} \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$:

$$\mathcal{A} \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \mathcal{A}^T \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad \text{if } \mathcal{A} \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

$$\mathcal{A} \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_{j=1}^n \mathcal{A}_{ij} x_j = 0 \Rightarrow \mathcal{A}_{ij} x_j = 0 \quad \text{if } \mathcal{A} \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

$$\dots \Rightarrow \mathcal{A}^T \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad \text{if } \mathcal{A} \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

Answer:

$$(e^{At})' = A e^{At}$$

$$= A e^{At}$$

$$= A e^{At}$$

$$= A e^{At}$$

QED

Proof: From the Taylor:

$$(e^{At})' = A e^{At}$$

$$= A e^{At}$$

$$= A e^{At}$$

QED:

$$e^{At} = e^{At}$$

QED

Beri:

$$r_k = \frac{x_k}{r_i} \quad , \quad k=0, \dots, n-1$$

Dan

$$D r_k = \begin{cases} r_{k-1} & ; \quad k \geq 1 \\ 0 & ; \quad k=0 \end{cases}$$

Matrix-nya :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Beri:

→ \vec{x} seri Gij :

$$f(x) = e^0 x_0 = x_0 \quad \checkmark$$

$$f(x) = (e^{Ax})_0$$

$$= (e^{Ax})_0 x_0$$

$$= A(e^{Ax} x_0) = A f(x)$$

Lemma 1: Sei f eine weitere GZ.

Betrachte $\mathbb{R}[x]$.

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{R}[x] / \langle f \rangle) &= \mathbb{R}[x] / \langle f \rangle + \langle f \rangle / \langle f \rangle \\
 &= \mathbb{R}[x] / \langle f \rangle + \langle f \rangle / \langle f \rangle \\
 &= \mathbb{R}[x] / \langle f \rangle + \langle f \rangle / \langle f \rangle
 \end{aligned}$$

$\mathbb{R}[x]$

$$\mathbb{R}[x] / \langle f \rangle = \mathbb{R}[x] / \langle f \rangle + \langle f \rangle / \langle f \rangle$$

$\mathbb{R}[x]$

Bem. $\langle f \rangle \cap \langle g \rangle = \langle \text{ggT}(f, g) \rangle$ im $\mathbb{R}[x]$.
Beweis. Sei $h \in \langle f \rangle \cap \langle g \rangle$.
 Dann existieren $p, q \in \mathbb{R}[x]$ mit $h = pf = qg$.
 Da h durch g teilbar ist, existiert $r \in \mathbb{R}[x]$ mit $h = rg$.
 Folglich $pf = rg$.
 Da g teilerfremd zu f ist, existiert $s \in \mathbb{R}[x]$ mit $sf = 1$.
 Multipliziert man $pf = rg$ mit s , so erhält man $p = rsg$.
 Folglich $h = pf = rsgf = r$.
 Also $h = r$.
 Da h durch f teilbar ist, existiert $t \in \mathbb{R}[x]$ mit $h = tf$.
 Folglich $r = tf$.
 Folglich $r \in \langle f \rangle$.
 Da $h = r$, existiert $u \in \mathbb{R}[x]$ mit $h = uf$.
 Folglich $h \in \langle \text{ggT}(f, g) \rangle$.
 Umgekehrt ist $\langle \text{ggT}(f, g) \rangle \subseteq \langle f \rangle \cap \langle g \rangle$.
 Folglich $\langle f \rangle \cap \langle g \rangle = \langle \text{ggT}(f, g) \rangle$.

Basis : Defini

$$A(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

A ist Definiert - a_i x^i Definiert.

$$A(x+y) = \sum_{i=0}^n a_i (x+y)^i$$

$$= \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} x^j y^{i-j}$$

$$= \sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n a_i \binom{i}{j} x^j y^{i-j}$$

Aus Defint : $A = A_1$.

$A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt \Leftrightarrow

(1) A ist abgeschlossen und beschränkt

(2) A ist abgeschlossen und jede Folge in A hat eine konvergente Teilfolge

„ \Rightarrow “ (1) \Rightarrow (2)

„ \Leftarrow “ (2) \Rightarrow (1)

„ \Leftarrow “ (2) \Rightarrow (1)

Beispiel: $A = [0, 1]$ ist kompakt

Beispiel: $A = (0, 1)$ ist nicht kompakt

Beispiel: $A = \mathbb{R}$ ist nicht kompakt

$A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt \Leftrightarrow A ist abgeschlossen und beschränkt

\Rightarrow A ist abgeschlossen und beschränkt \Leftrightarrow A ist kompakt