19. Vorlesung 29.6.2021

$\dot{x} = ax$

$x(t) = e^{at} x_0$ eindeutige Lsg.

Im Falle Dim:

$x(t) = e^{At} x_0$.

Sinn? , Lsg?

$e^{at} = \sum_{k\geq 0} \frac{a^k}{k!} t^k$

Ziel:

$e^{At} = \sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!} t^k$.

$L(U) = \{ A : U \to U$ linear & stetig $\}$

$|\cdot|$ Norm auf U

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Ax|$$

induzierte Norm

Distributiv:

$$A(B+C) = AB + AC$$

Norm:

$$\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$$

Hier: Multipl. hier ist die Komposition.

eben nicht kommutativ.

Beweis: $C(U)$ Banachalgebra:

$$\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$$

$$\Rightarrow \quad \|A^k\| \le \|A\|^k, \qquad k \ge 0$$

Also:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\|A^k\| \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\|A\|^k$$

$$\le \sum_{k\ge 0} \frac{1}{k!}\|A\|^k = e^{\|A\|}$$

für alle k $\qquad < \infty.$

Also: $\exp(A)$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf jeder beschränkten Teilmenge von $C(U)$.

$$\left\| \sum_{h=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k \right\| \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\|A^k\| \le e^{\|A\|} \quad \text{für alle } n$$

$\downarrow n\to\infty$

$$\|\exp(A)\| \le e^{\|A\|}.$$

Beweis: (i) Die Gesetzte:

$$(T^{-1}AT)^k = T^{-1}AT\,T^{-1}AT \cdots T^{-1}AT$$

linear

$$= T^{-1}A^kT\,.$$

Damit:

$$T^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right)T = \sum_{k=0}^{n} \frac{T^{-1}A^kT}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,(T^{-1}AT)^k$$

$n \longrightarrow \infty$

$$T^{-1}e^{A}T = \exp(T^{-1}AT)\,.$$

(ii) Si $AB = BA$:

$$\frac{1}{n!}(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!} A^k B^{n-k}$$

$$= \sum_{k+\ell=n} \frac{A^k B^\ell}{k!\,\ell!}$$

Donc :

$$e^{A+B} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(A+B)^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} \sum_{k+\ell=n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^\ell}{\ell!}$$

$$\underset{\text{CPR}}{=} \sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!} \cdot \sum_{\ell\geq 0} \frac{B^\ell}{\ell!} = e^A e^B.$$

(iii) see (ii)

$$I = e^{0} = e^{A-A} = e^{A}e^{-A} = e^{-A}e^{A}$$

$$\implies e^{-A} = (e^{A})^{-1}$$

(and also $e^{A} = (e^{-A})^{-1}$).

A nilpotent: $\quad A^{m+1} = 0$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k$$

$$= 1 + A + \dots + \frac{1}{m!} A^m .$$

Ist A Diagonalgestalt:

$$A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$e^A = \sum \frac{1}{k!} A^k$$

$$= \sum \frac{1}{k!} \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$$

$$= \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) .$$

Im [illegible] Fall:

$$A = T^{-1} \Lambda T$$

$$\Rightarrow \quad e^A = e^{T^{-1}\Lambda T} = T^{-1} e^{\Lambda} T$$

1-Par. Gruppe ist

Gruppenhomomorphismus:

$$(\mathbb{R},+) \longrightarrow (G,\cdot)$$

$$\Phi^{s+t} = \Phi^s \Phi^t .$$

Insbesondere:

$$\Phi^s \Phi^t = \Phi^{s+t} = \Phi^{t+s} = \Phi^t \Phi^s$$

Alle Φ^t kommutieren!

Insbesondere:

$$(\Phi^t)^{-1} = \Phi^{-t} :$$

$$I = \Phi^0 = \Phi^{t-t} = \Phi^t \cdot \Phi^{-t} = \Phi^{-t} \Phi^t$$

$$\Longrightarrow \quad \Phi^{-t} = (\Phi^t)^{-1} .$$

Beweis: $$e^{A\cdot 0} = e^{0} = I \quad ✓$$

$$e^{A(s+t)} = e^{As + At}$$
$$= e^{As}\, e^{At}. \quad ✓$$

Diff.: Abl. bei $t=0$:

$$\left(e^{At}\right)'\Big|_{t=0} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(e^{Ah} - I\right)$$

$$e^{Ah} - I = \sum_{k\geq 1} \frac{A^k}{k!} h^k = Ah + O(h^2)$$

$$\dots = \lim_{h\to 0}\left(A + O(h)\right) = A.$$

Allgemein:

$$(e^{At})'(t) = \frac{d}{ds} e^{A(s+t)}\Big|_{s=0}$$

$$= \frac{d}{ds} e^{As} e^{At}\Big|_{s=0}$$

$$= \underbrace{\frac{d}{ds} e^{As}\Big|_{s=0}}\, e^{At}$$

$$= A \cdot e^{At}. \qquad \square$$

Beweis: Formel von Taylor:

$$(T_t p)(x) = p(x+t)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{(k)}(x)}{k!} t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\cancel{\infty}\; n} \frac{(tD)^k p(x)}{k!}$$

Also:

$$\boxed{e^{tD} = T_t} \qquad \square$$

Bsp.:

$$e_k = \frac{x^k}{k!}, \qquad k = 0, \dots, n-1$$

Dann

$$De_k = \begin{cases} e_{k-1}, & k \geq 1 \\ 0, & k = 0 \end{cases}.$$

Matrixdarstellung:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis: φ ist eine Lsg:

$$\varphi(0) = e^0 x_0 = x_0 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \left(e^{At} x_0\right)' \\ &= \left(e^{At}\right)' x_0 \\ &= A\left(e^{At} x_0\right) = A\varphi(t). \end{aligned}$$

Eindeutigkeit: Sei φ eine weitere Lösung.

Betrachte $e^{-At}\varphi(t)$:

$$\left(e^{-At}\varphi(t)\right)' = -A e^{-At}\varphi(t) + e^{-At}A\varphi(t)$$

$$= \quad \text{———} \,\text{"}\, \text{—} \quad + A e^{-At}\varphi(t)$$

$$= 0 \qquad \text{für alle } t.$$

Also

$$e^{-At}\varphi(t) = \text{const} = e^{At}\varphi(t)\Big|_{t=0} = x_0$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(t) = e^{At}x_0. \qquad \blacksquare$$

Bem. $\varphi(t) \equiv 0$ ist eine Lösung, und zwar die zum AW 0, Gleichgewicht.

Beweis: Definiere

$$A(x) := \frac{d}{dt} \Phi^t x \Big|_{t=0} .$$

A ist linear, da alle Φ^t linear sind,

$$A(x+y) = \frac{d}{dt} \Phi^t (x+y) \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \Phi^t (x) \Big|_{t=0} + \frac{d}{dt} \Phi^t (y) \Big|_{t=0}$$

$$= A(x) + A(y).$$

Also kurz: $Ax = A(x)$.

Axiome für Φ^t:

(G1) $\Phi^0 x_0 = I x_0 = x_0$ ✓

(G2) $$\frac{d}{dt}\Phi^t x_0 = \frac{d}{ds}\Phi^{s+t} x_0 \Big|_{s=0}$$

$$= \frac{d}{ds}\Phi^s(\Phi^t x_0)\Big|_{s=0}$$

$$\underset{\text{Def von } A}{=} A(\Phi^t x_0)$$

$$= A\Phi^t x_0.$$

Also: $\Phi^t x_0$ löst $\dot{x} = Ax$.

Eindeutigkeit: $\Phi^t x_0 = e^{At} x_0$. □

$A \in L(U) \longleftrightarrow \dot{x} = Ax$

$\longleftrightarrow$ diffb. lin. Flussgruppe von Φ^t in $L(U)$