16

Lineare Differenzialgleichungen

Eine *lineare Differenzialgleichung* auf einem Vektorraum V ist von Form

$$\dot{x} = Ax$$

mit $A \in L(V)$, also einem beschränkten linearer Operator A auf V. Im Standardfall sieht das so aus:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Eine *Lösung* dieser Gleichung ist jede differenzierbare Kurve $\varphi\colon I \to V$, so dass

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t), \qquad t \in I.$$

Wir werden sehen, dass jedes *Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = Ax, \qquad x(0) = x_0$$

eine eindeutige und sogar für alle Zeiten definierte Lösung $\varphi\colon \mathbb{R} \to V$ mit

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{At}x_0$$

besitzt. Dazu müssen wir nur das Symbol e^{At} geeignet definieren. Eine Darstellung des Operators A in einer geeigneten Normalform verhilft uns dann zu einem umfassenden Verständnis aller Lösungen von $\dot{x} = Ax$.

16.1

16.1 Exponenziale linearer Operatoren

Für reelle Zahlen a und t ist bekanntlich

$$e^{at} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{a^k}{k!} t^k.$$

Um diese Darstellung auf beschränkte lineare Operatoren auszudehnen, benötigen wir ein paar Vorbereitungen.

Eine Norm $|\cdot|$ auf einem Vektorraum V induziert auf dem Raum $L(V)$ aller stetigen linearen Operatoren auf V eine *Operatornorm* $\|\cdot\|$ durch

$$\|A\| \coloneqq \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Ax|.$$

Wie wir bereits gesehen haben $_{14.1}$, wird $L(V)$ mit dieser Norm zu einem Banachraum $_{14.2}$. Es gilt sogar mehr.

1 **Satz** *Der Raum $L(V)$ mit der Operatornorm $\|\cdot\|$ bildet bezüglich der Addition und Komposition von Operatoren eine Banachalgebra.* ⋊

Eine *Banachalgebra* ist ein Banachraum, in dem eine Multiplikation erklärt ist, die sich mit der Addition mittels der *Distributivgesetze*

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC$$

und mit der Norm mittels der Ungleichung

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|$$

verträgt. Die Multiplikation muss jedoch nicht kommutativ sein, und im Fall der Hintereinanderausführung von Operatoren ist sie es auch nicht. — Der Beweis dieser Eigenschaften ist eine leichte Übung.

Das Exponenzial e^A

In einem beliebigen Banachraum können wir *unendliche Reihen* bilden. Diese definieren wir wie üblich als Limes endlicher Partialsummen, also

$$\sum_{k \geqslant 0} A_k \coloneqq \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} A_k,$$

wenn dieser existiert.

Die Reihe heißt *absolut* oder *normal konvergent*, falls die Reihe $\sum_k \|A_k\|$ konvergiert, was äquivalent ist mit

$$\sum_{k \geqslant 0} \|A_k\| < \infty.$$

In diesem Fall bilden die Partialsummen eine Cauchyfolge, die aufgrund der Vollständigkeit von $L(V)$ auch gegen einen Grenzwert konvergiert.

Definition und Satz *Das Exponenzial von $A \in L(V)$ ist der lineare Operator*

$$e^A \coloneqq \exp(A) \coloneqq \sum_{k \geqslant 0} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \,..\; .$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf jeder beschränkten Menge in $L(V)$, und es gilt

$$\|e^A\| \leqslant e^{\|A\|}. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Aus $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$ folgt mit vollständiger Induktion $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$ für alle $k \geqslant 0$. Für alle $n \geqslant 0$ gilt daher

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\|A^k\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\|A\|^k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\|A\|^k = e^{\|A\|} < \infty.$$

Also konvergiert die Exponenzialreihe absolut und gleichmäßig auf jeder beschränkten Menge in $L(V)$. Die behauptete Ungleichung folgt dann aus

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}A^k\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\|A^k\| \leqslant e^{\|A\|}$$

und Grenzübergang $n \to \infty$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Für die weiteren Eigenschaften des Exponenzials benötigen wir den Produktsatz von Cauchy, der es erlaubt, das Produkt zweier Reihen durch Ausmultiplizieren und Umordnung unendlich vieler Summanden darzustellen. Der Beweis wurde im Kapitel über Reihen skizziert A-6.16. Er gilt für absolut konvergente reelle Reihen ebenso wie für normal konvergente Reihen von Operatoren.

2 **Produktsatz** *Sind die Reihen $\sum_{k \geqslant 0} A_k$ und $\sum_{l \geqslant 0} B_l$ absolut konvergent, so gilt*

$$\sum_{k \geqslant 0} A_k \sum_{l \geqslant 0} B_l = \sum_{k,l \geqslant 0} A_k B_l = \sum_{n \geqslant 0} \sum_{k+l=n} A_k B_l,$$

wobei alle Reihen absolut konvergieren. $\rtimes$

3 **Rechenregeln** *Seien $A, B, T \in L(V)$ und T invertierbar. Dann gilt:*

(i) $e^{T^{-1}AT} = T^{-1}e^A T$.

(ii) $e^{A+B} = e^A e^B$, *falls $AB = BA$.*

(iii) $e^{-A} = (e^A)^{-1}$. *Insbesondere ist e^A immer invertierbar.* $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ (i) Mit Induktion zeigt man

$$(T^{-1}AT)^k = T^{-1}A^k T, \qquad k \geqslant 0.$$

Für jedes $n \geqslant 0$ gilt deshalb

$$T^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}\right)T = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}T^{-1}A^kT = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(T^{-1}AT)^k.$$

Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt

$$T^{-1}\mathrm{e}^AT = T^{-1}\left(\sum_{k\geqslant 0}\frac{A^k}{k!}\right)T = \sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}(T^{-1}AT)^k = \mathrm{e}^{T^{-1}AT}.$$

(ii) Mit $AB = BA$ gilt auch für alle $n \geqslant 0$ die *binomische Formel*

$$\frac{1}{n!}(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}A^kB^{n-k} = \sum_{k+l=n}\frac{A^kB^l}{k!l!}.$$

Daraus folgt mit dem Produktsatz 2

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{A+B} &= \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}(A+B)^n \\ &= \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k+l=n}\frac{A^kB^l}{k!l!} = \sum_{k\geqslant 0}\frac{A^k}{k!}\sum_{l\geqslant 0}\frac{B^l}{l!} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B.\end{aligned}$$

(iii) Dies folgt aus (ii) mit

$$I = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{A-A} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^{-A} = \mathrm{e}^{-A}\mathrm{e}^A.$$

Also ist e^A invertierbar, und die Inverse ist e^{-A}. ⟫⟫⟫

Achtung Für nicht kommutierende Operatoren gilt die binomische Formel für $n \geqslant 2$ und auch Aussage (ii) im Allgemeinen *nicht* A-4. ⊸

▪ Zwei Beispiele

Im Allgemeinen ist die Berechnung der Reihe von e^A praktisch kaum durchführbar. Zwei wichtige Ausnahmen bilden jedoch diagonale und nilpotente Operatoren.

Definition *Ein Operator $A \in L(V)$ heißt Diagonaloperator, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren von A besitzt. Er heißt nilpotent, falls $A^{m+1} = 0$ für ein $m \geqslant 0$.* ⋊

Ist A nilpotent mit $A^{m+1} = 0$, so ist

$$\mathrm{e}^A = \sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}A^k = \sum_{0\leqslant k\leqslant m}\frac{1}{k!}A^k = I + A + .. + \frac{1}{m!}A^m$$

ein *Polynom* in A. Ist A ein Diagonaloperator, so nimmt er in einer Basis aus Eigenvektoren Diagonalgestalt $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, .., \lambda_n)$ an. Hierfür gilt offensichtlich

$$\mathrm{e}^\Lambda = \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, .., \mathrm{e}^{\lambda_n}).$$

In einer anderen Basis ist dann $A = T^{-1}\Lambda T$ mit einem entsprechenden Isomorphismus T, und es gilt

$$e^A = e^{T^{-1}\Lambda T} = T^{-1}e^{\Lambda}T.$$

Die komplizierte Bestimmung von e^A wird damit auf die einfache Bestimmung von e^Λ zurückgeführt.

Mit Hilfe der SN-Zerlegung von Operatoren werden wir in Abschnitt 5 den allgemeinen Fall auf diese beiden Spezialfälle zurückführen.

▪ 1-Parametergruppen

Statt des Exponenzials e^A betrachten wir nun die *Familie* $t \mapsto e^{At}$.

Definition *Eine 1-Parametergruppe ist eine Abbildung*

$$\Phi : \mathbb{R} \to G, \quad t \mapsto \Phi^t$$

von $\mathbb{R}$ in eine multiplikative Gruppe G mit den zwei Eigenschaften

$$\Phi^0 = I, \qquad \Phi^{s+t} = \Phi^s\Phi^t, \qquad s, t \in \mathbb{R},$$

wobei I das neutrale Element in G bezeichnet. ⋊

Bei einer 1-Parametergruppe handelt es sich also um einen *Gruppenhomomorphismus* $(\mathbb{R}, +) \to (G, \cdot)$. Wegen

$$\Phi^s\Phi^t = \Phi^{s+t} = \Phi^{t+s} = \Phi^t\Phi^s$$

kommutieren alle Mitglieder einer 1-Parametergruppe, auch wenn G selbst keine kommutative Gruppe ist. Außerdem ist Φ^{-t} das Inverse zu Φ^t, denn

$$I = \Phi^0 = \Phi^{t-t} = \Phi^t\Phi^{-t} = \Phi^{-t}\Phi^t.$$

Jedes Element einer 1-Parametergruppe ist also invertierbar. — Nun zurück zu unserer Familie $t \mapsto e^{At}$.

4 **Satz** *Für jedes $A \in L(V)$ ist*

$$\Phi : \mathbb{R} \to L(V), \quad t \mapsto \Phi^t = e^{At}$$

eine differenzierbare 1-Parametergruppe in $L(V)$ mit

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨ Offensichtlich ist $e^{A0} = e^0 = I$ und, da As und At kommutieren,

$$e^{A(s+t)} = e^{As+At} = e^{As}e^{At}.$$

Somit handelt es sich um eine 1-Parametergruppe. Ferner folgt aus der Exponenzialreihendarstellung

$$(e^{At})'\Big|_{t=0} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(e^{Ah}-I) = A,$$

denn

$$e^{Ah}-I = \sum_{k\geqslant 1}\frac{A^k}{k!}h^k = Ah + O(h^2).$$

Mit der Gruppeneigenschaft folgt daraus für jedes andere t

$$(e^{At})' = \frac{d}{ds}e^{A(s+t)}\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}e^{As}e^{At}\Big|_{s=0} = Ae^{At}. \qquad \rangle\rangle\rangle\rangle\rangle$$

■ **Noch ein Beispiel**

Betrachte den Vektorraum

$$P_n := \{p = a_0 + a_1x + .. + a_{n-1}x^{n-1} : a_0,..,a_{n-1} \in \mathbb{R}\}$$

aller reellen Polynome vom Grad kleiner n. Eine Basis bilden die Monome $1, x, .., x^{n-1}$, somit ist $\dim P_n = n$. Die übliche Differenziation definiert einen linearen *Differenzialoperator*

$$D : P_n \to P_n, \quad Dp = p'.$$

Offensichtlich ist $D^n = 0$, somit ist D nilpotent.

Satz *Das Exponenzial von tD ist der Translationsoperator H^t:*

$$e^{tD} = H^t : P_n \to P_n, \quad H^t p = p(\cdot + t). \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Nach der Formel von Taylor gilt

$$(H^t p)(x) = p(x+t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^{(k)}(x)}{k!}t^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tD)^k(x)}{k!},$$

wobei die Reihe für ein Polynom vom Grad kleiner n nach spätestens n Termen abbricht. Der letzte Ausdruck ist gerade $(e^{tD}p)(x)$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkungen *a.* Für die Basis

$$e_k := \frac{x^k}{k!}, \qquad k = 0,..,n-1,$$

gilt $De_k = e_{k-1}$ für $k \geqslant 1$ und $De_0 = 0$. Damit erhält D die Matrixdarstellung

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

16.6

b. Der Differenzialoperator D ist ein einfaches und wichtiges Beispiel eines Operators, der auf unendlich-dimensionalen Funktionenräumen im Allgemeinen *unbeschränkt* ist. ⊸

Bemerkung Die Ergebnisse dieses Abschnitts gelten auch für unendlich-dimensionale Vektorräume, wenn wir $L(V)$ als Raum aller *beschränkten* linearen Operatoren auf V definieren. ⊸

16.2 Die lineare Differenzialgleichung

Mit den Ergebnissen des vorangehenden Abschnitts können wir die Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$ nun vollständig lösen.

5 **Fundamentalsatz** *Das Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

besitzt für jedes $x_0 \in V$ *die eindeutige Lösung*

$$\varphi : \mathbb{R} \to V, \quad \varphi(t) = \mathrm{e}^{At} x_0. \qquad \rtimes$$

⟪⟪⟪ Dies ist sicherlich *eine* Lösung, denn es ist $\varphi(0) = x_0$, und φ ist differenzierbar in t $_4$ mit

$$\dot{\varphi}(t) = (\mathrm{e}^{At} x_0)^{\cdot} = (\mathrm{e}^{At})^{\cdot} x_0 = A\mathrm{e}^{At} x_0 = A\varphi(t).$$

Es ist auch die *einzige* Lösung. Denn ist ψ eine weitere Lösung, so gilt, da e^{-At} und A kommutieren,

$$\begin{aligned} (\mathrm{e}^{-At}\psi(t))^{\cdot} &= -A\mathrm{e}^{-At}\psi(t) + \mathrm{e}^{-At}A\psi(t) \\ &= -A\mathrm{e}^{-At}\psi(t) + A\mathrm{e}^{-At}\psi(t) = 0. \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{e}^{-At}\psi$ konstant, und Auswerten bei $t = 0$ ergibt

$$\mathrm{e}^{-At}\psi(t) = \psi(0) = x_0.$$

Also ist $\psi(t) = \mathrm{e}^{At} x_0$. ⟫⟫⟫

Für eine lineare Differenzialgleichung ist $\varphi \equiv 0$ immer eine Lösung, genannt *Gleichgewichtslösung*. Aus dem Fundamentalsatz folgt, dass dies auch die einzige Lösung ist, die jemals den Wert 0 annimmt. Mit anderen Worten, keine andere Lösung kann den Wert 0 annehmen – sie kann ihm allenfalls beliebig nahe kommen. Solche Lösungen werden uns im nächsten Abschnitt begegnen.

▪ Infinitesimaler Generator

Jeder beschränkte lineare Operator definiert also eine lineare Differenzialgleichung und damit eine differenzierbare 1-Parametergruppe von Operatoren, die sämtliche Lösungen dieser Gleichung repräsentiert. Hiervon gilt auch folgende Umkehrung.

Satz *Zu jeder differenzierbaren 1-Parametergruppe Φ in $L(V)$ existiert ein eindeutig bestimmter Operator A in $L(V)$, genannt ihr infinitesimaler Generator, so dass*

$$\Phi^t = \mathrm{e}^{At}. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Da Φ differenzierbar ist, können wir eine Abbildung $A\colon V \to V$ in jedem Punkt $x \in V$ definieren durch

$$A(x) \coloneqq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^t x\Big|_{t=0}.$$

Diese Abbildung ist linear, da Φ^t für jedes t linear ist. Zum Beispiel ist

$$A(x+y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^t(x+y)\Big|_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^t x\Big|_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^t y\Big|_0 = A(x) + A(y).$$

Wir schreiben daher einfacher Ax.

Wir zeigen, dass $\Phi^t x_0$ das Anfangswertproblem $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ löst. Offensichtlich ist $\Phi^0 x_0 = x_0$. Ferner gilt aufgrund der Gruppenstruktur von Φ und der Definition von A

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^t x_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Phi^{s+t} x_0\Big|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Phi^s(\Phi^t x_0)\Big|_{s=0} = A\Phi^t x_0.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung [5] dieses Anfangswertproblems gilt also

$$\Phi^t x_0 = \mathrm{e}^{At} x_0.$$

Da dies für alle $x_0 \in V$ gilt, ist $\Phi^t = \mathrm{e}^{At}$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Damit existiert ein eineindeutiger Zusammenhang

$$A \in L(V) \quad \rightsquigarrow \quad \text{differenzierbare 1-Parametergruppe } \Phi^t \text{ in } L(V).$$

Diesen werden wir im nächsten Kapitel auf n-dimensionale *nichtlineare* Differenzialgleichungen verallgemeinern.

16.8