2. Vorlesung 20.4.2021

Regelfunktion : $\underbrace{\varphi_n}_{\text{Treppenf. auf } [a,b]} \rightrightarrows f$

$$\int_a^b (f) := \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\varphi_n)$$

$$\int_a^b f := \int_a^b (f) , \quad f \in R_a^b$$

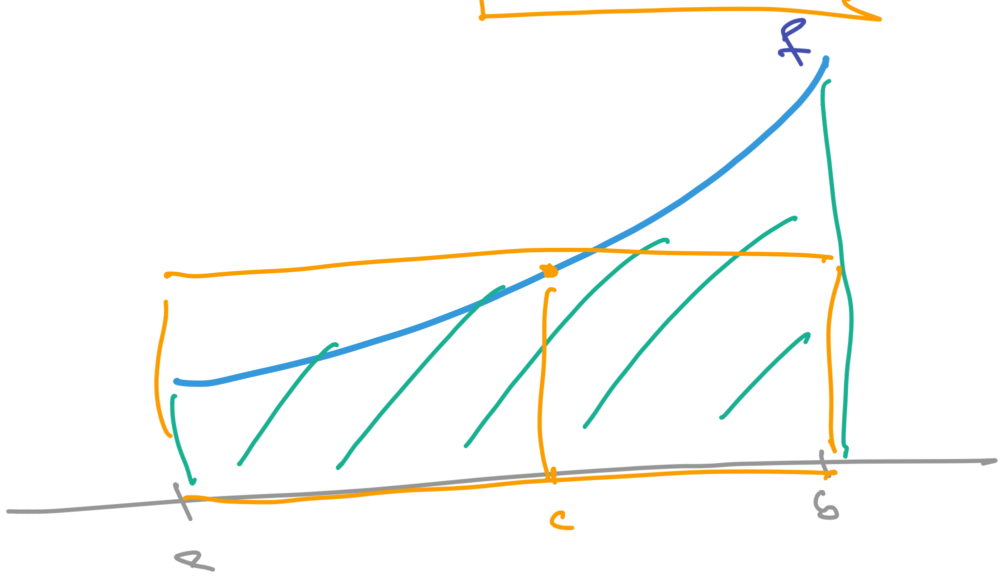
$$\int_a^b f p = f(c) \cdot \int_a^b p$$

mit geeignetem $c \in [a,b]$.

z.B. $p = 1$:

$$\int_a^b f = f(c) \cdot \int_a^b 1$$

$$= f(c) \cdot (b-a).$$



Bew: f stetig auf $[a,b]$, und Max M u. existiert also Minimum m

Also: $m \le f \le M$ auf $[a,b]$.

Dann gilt auch wegen $p(t) \ge 0$:

$$m\,p(t) \le f(t)\,p(t) \le M \cdot p(t), \quad t \in [a,b]$$

also:

$$mp \le fp \le Mp \quad \text{auf } [a,b].$$

Monotonie:

$$m \cdot \int_a^b p = \int_a^b mp \le \int_a^b fp \le \int_a^b Mp = M \cdot \int_a^b p.$$

Ist nun: $\int_a^b p = 0$

$$\Rightarrow \int_a^b fp = 0. \quad ✓$$

Also sei $\int_a^b p > 0$: Dann

$$m \le \underbrace{\frac{1}{\int_a^b p} \cdot \int_a^b fp}_{\text{reelle Zahl}} \le M$$

Gilt für stetige f: $\Rightarrow$ gibt

$\Rightarrow$ gibt $c \in (a,b)$:

$$f(c) = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}. \qquad \boxtimes$$

$$\boxed{\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n}$$

Beweis: (f_n) Folge in R_a^b

Cauchy-Folge bzgl. Sup-Norm auf R_a^b.

Dann auch CF " " in B_a^b.

Also auch gleichm. Konvergenz:

$$f_n \Rightarrow f \in B_a^b$$

$\lim_{n\to\infty} t_{n,k}$ $\in T_a^b$

$f \in R_a^b$

Damit ist $\int_a^b f$ wohldefiniert.

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right|$$

$$= \left| \int_a^b (f - f_n) \right|$$

$$\leq \int_a^b |f - f_n|$$

$$\leq \|f - f_n\|_{[a,b]} \cdot \int_a^b 1$$

$$= \underbrace{\|f - f_n\|_{[a,b]}}_{\longrightarrow 0} (b-a)$$

Also: $\displaystyle\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f = \int_a^b (\lim f_n)$. $\square$

<u>Beweis</u>: $f \in R_a^b$. Dann

$$\varphi_n \rightrightarrows f$$

$U_n = \{$ Unstetigkeitsstellen von $\varphi_n \}$ ist endliche Menge.

$U := \bigcup_{n \geq 1} U_n$ ist <u>abzählbar</u>

Dann folgt: Jedes φ_n ist auf $[a,b]\setminus C$ stetig

und $\varphi_n \xRightarrow{\text{glm.}} f$ auf $[a,b]\setminus C$.

$\Longrightarrow$ f stetig auf $[a,b]\setminus C$. $\blacksquare$

Bsp: Dirichletfunktion $\delta = \chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$ ist keine Regelfunktion. $(a<b)$

Wir sagen: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ besitzt einseitige Grenzwerte:

$$f_+(x) = \lim_{t\downarrow x} f(t), \quad x\in[a,b)$$

$$f_-(x) = \lim_{t\uparrow x} f(t), \quad x\in(a,b]$$

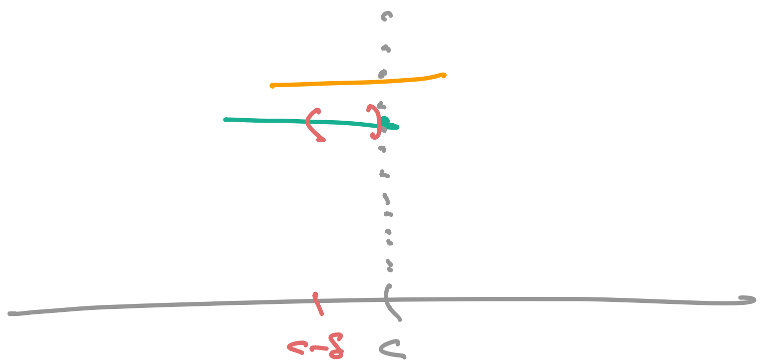
Beweis: $f \in R_a^b$, $c \in (a,b)$

Sei (t_n) Folge in (a,c):

$t_n \uparrow c$.

Dann sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. $\varphi \in T_a^b$:

$\|f - \varphi\|_{[a,b]} < \frac{\varepsilon}{2}$.



Dann ist φ konstant auf dem Intervall $(c-\delta, c)$.

Da $t_n \uparrow c$, liegen fast alle t_n in $(c-\delta, c)$.

Also: $\varphi(t_n) = \varphi(t_m)$, $n, m \geq N$

Dann gilt auch:

$|f(t_n) - f(t_m)|$

$$\le |f(t_n) - \varphi(t_n)| + |\varphi(t_n) - f(t_m)|$$

$$\le \|f - \varphi\|_{[a,b]} + \text{——} \cdot \text{——}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \varepsilon, \qquad n, m \ge N$$

Damit folgt: $(f(t_n))$ konvergent, sei CF.

Also ex. $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n) = f_*$.

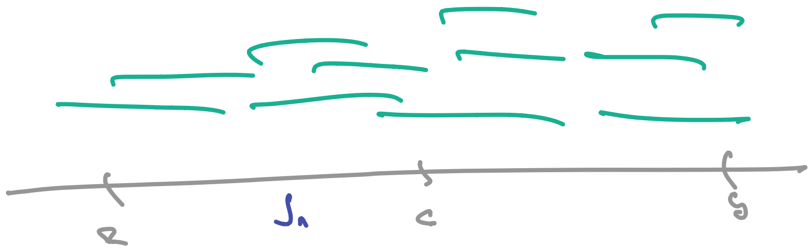
Für eine zweite Folge (t_n') mit $t_n' \uparrow c$:

Dieselben Argumente:

$(f(t_n) - f(t_n'))$ konvergent Nullfolge.

Also: $\lim f(t_n) = \lim f(t_n')$.

Beweis: Konstruktion: Angenommen, dies ist nicht möglich.



$J_0 = [a,b]$

Damit Folge von Intervallen:

$$J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \dots \quad \text{mit}$$

$$|J_n| = 2^{-n} \cdot |J_0| \,,$$

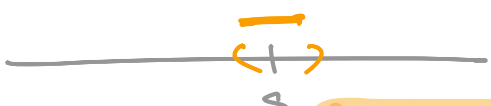
so dass J_i keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Die J_i bilden eine Intervallschachtelung:

$$\bigcap_{i \geq 0} J_i = \{c\} \,, \quad c \in [a,b].$$

Daher ex. I_{λ_c} mit

$$c \in I_{\lambda_c} \leftarrow \text{offen}$$



Dann gilt auch: $\boxed{J_i \subset I_{\lambda_c}}$, für $i \geq i_0$

Das Intervall: J_i wird ganz von I_{x_i} überdeckt. ↯

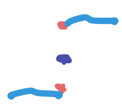
Sei $\varepsilon > 0$.

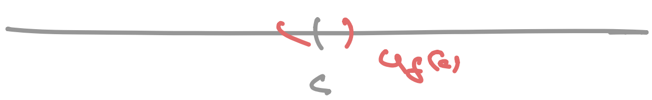
Zu jedem Punkt $c \in [a,b]$ existiert dann eine Umgebung $U_\delta(c)$:

$$|f(u) - f(v)| < \varepsilon, \quad u,v \in U_\delta(c)$$

und $u,v < c$

oder $c < u,v$



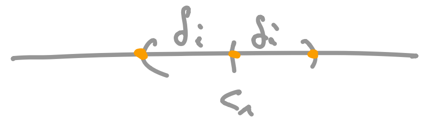


Also: $c \mapsto U_\delta(c)$.

Die Familie $(U_\delta(c))_{c \in [a,b]}$ ist eine offene Überdeckung von $[a,b]$.

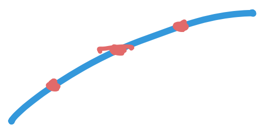
Also ex. endliche Teilüberdeckung:

$$\boxed{[a,b] \subset U_{\delta_1}(c_1) \cup \dots \cup U_{\delta_m}(c_m).}$$

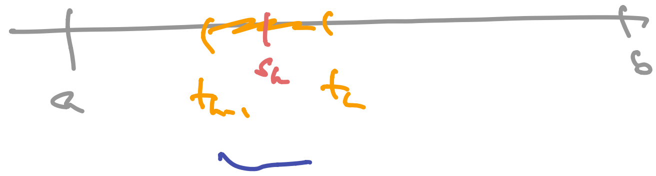


tùy ý a, b

$\rightsquigarrow$ liên tục đều trên $[a,b]$



$\} < \varepsilon$



giới hạn tồn tại ... $\delta(\varepsilon)$

Dễ thấy: $\boxed{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad x, x_0 \in (t_{k-1}, t_k)}$

Đặt:
$$\varphi|_{(t_{k-1}, t_k)} = f(s_k), \quad s_k = \frac{t_{k-1}+t_k}{2}$$

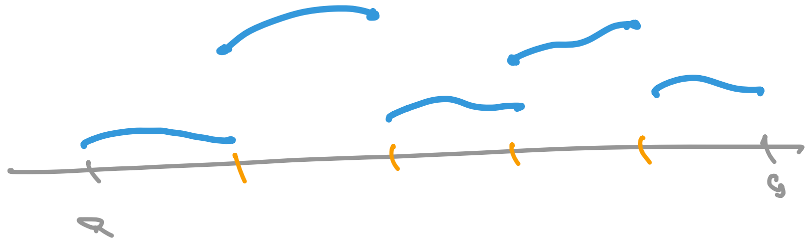
Dễ thấy:
$$\|\varphi - f\|_{(t_{k-1}, t_k)} < \varepsilon.$$

Chú ý rằng $\varphi(t_k) = f(t_k)$. Dễ kiểm tra φ là hàm bậc thang và

$$\|\varphi - f\|_{[a,b]} < \varepsilon.$$

Do tính chất giới hạn $\varepsilon > 0$ tùy ý nên ...

stückweise stetig:



Beispiele:

1. Sägezahn und Gauß-Klammer $[\cdot]$. ✓

2. Thomae-Funktion "$\tau\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$" *)

3. Dirichletfunktion keine Regelfunktion.

*) $\lim_{t \uparrow x} \tau(t) = 0$

$\lim_{t \downarrow x} \tau(t) = 0$.

$$f'_+(t) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$f'_-(t) := \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

f ist im Punkt t differenzierbar, wenn f'_+ und f'_- existieren und übereinstimmen:

$$f'_+(t) = f'(t) = f'_-(t).$$

Beweis: Sei F Stammfkt. von f,

und f stetig:

$$F'_-(t) = f_-(t) = f(t) = f_+(t) = F'_+(t)$$

Also:

$$F'_-(t) = F'_+(t)$$

Also: F ist in t differenzierbar:

$$F'(t) = f(t) \,..$$

Insgesamt:

$$F' = f \text{ stetig},$$

also F stetig differenzierbar. $\square$

Beweis: Seien G, H Stammfkt. zu $f \in R_a^b$.

Dann existiert auch $G - H$ in jedem Punkt einseitige Abl., und:

$$(G-H)'_+ = \underbrace{G'_+}_{} - \underbrace{H'_+}_{}$$

$$= f_+ - f_+ = \underline{0}$$

Ebenso:

$$(G-H)'_- = \underline{0}.$$

Also: $G - H$ sogar differenzierbar, mit

$$(G-H)' = 0.$$

Also $G - H = \text{konst.}$ $\boxtimes$