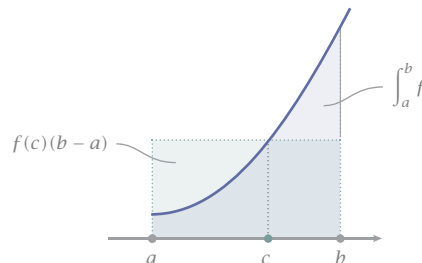


Abb 4

Zum Mittelwertsatz
der Integralrechnung
mit $p \equiv 1$



- 7 **Mittelwertsatz der Integralrechnung** Seien f und p integrierbar auf $[a, b]$, außerdem sei f stetig und $p \geq 0$. Dann existiert ein $c \in [a, b]$, so dass

$$\int_a^b f p = f(c) \int_a^b p. \quad \times$$

«»» Aufgrund ihrer Stetigkeit nimmt die Funktion f auf $[a, b]$ ihr Minimum m und Maximum M an_{7.16}. Es gilt dann $m \leq f \leq M$. Wegen $p \geq 0$ gilt dann auch $mp \leq fp \leq Mp$ auf $[a, b]$. Mit der Monotonie des Integrals_{2.3} folgt

$$m \int_a^b p \leq \int_a^b fp \leq M \int_a^b p.$$

Ist nun $\int_a^b p = 0$, so ist folglich auch $\int_a^b fp = 0$, und die Behauptung gilt für jedes $c \in [a, b]$. Andernfalls ist $\int_a^b p > 0$ und damit

$$m \leq w := \left(\int_a^b p \right)^{-1} \int_a^b fp \leq M.$$

Nach dem Zwischenwertsatz von Bolzano gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = w$. Das ergibt die Behauptung. »»»

- 8 **Vertauschungssatz** Eine Cauchyfolge (f_n) in R_a^b ist konvergent, und es gilt

$$\int_a^b \lim f_n = \lim \int_a^b f_n. \quad \times$$

«»» Dies folgt aus der Definition des Regelintegrals. Eine Cauchyfolge (f_n) in R_a^b bezüglich $\|\cdot\|_{[a,b]}$ ist auch eine Cauchyfolge im umgebenden Banachraum B_a^b und hat dort einen Grenzwert $f \in B_a^b$. Da aber R_a^b in B_a^b abgeschlossen ist, ist auch $f \in R_a^b$, also integrierbar. Die Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integral ist dann gerade die Stetigkeit des Funktional J_a^b auf R_a^b . »»»

10.3 Regelfunktionen

Im Folgenden charakterisieren wir Regelfunktionen durch eine leicht zu verifizierende Eigenschaft. Zunächst eine einfache Feststellung.

- 9 **Satz** Eine Regelfunktion besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. \times

««« Sei f der gleichmäßige Limes einer Folge (φ_n) in T_a^b . Jede Treppenfunktion φ_n hat nur endlich viele Unstetigkeitsstellen. Die Menge S der Unstetigkeitsstellen aller φ_n zusammengenommen ist somit abzählbar A-3.18. Auf $[a, b] \setminus S$ ist nun jedes φ_n stetig. Als gleichmäßiger Limes der φ_n ist dann f auf dieser Menge ebenfalls stetig 7.45. »»»

Wir sagen, eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt in jedem Punkt einseitige Grenzwerte, wenn auf $[a, b)$ alle rechtsseitigen Grenzwerte f_+ und auf $(a, b]$ alle linksseitigen Grenzwerte f_- von f existieren.

- 10 **Satz** Eine Regelfunktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt in jedem Punkt von $[a, b]$ einseitige Grenzwerte. \times

««« Wir betrachten den linksseitigen Grenzwert einer Funktion $f \in R_a^b$ in einem Punkt $c \in (a, b]$. Sei dazu (t_n) eine Folge in $[a, b]$ mit $t_n \nearrow c$, und sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Treppenfunktion $\varphi \in T_a^b$ mit

$$\|f - \varphi\|_{[a, b]} < \varepsilon/2. \quad (1)$$

Diese ist auf einem kleinen, offenen Intervall $(c - \delta, c)$ links von c konstant, unabhängig davon, ob c ein Teilungspunkt der zugehörigen Zerlegung ist oder nicht. Wegen $t_n \nearrow c$ $n, m \geq N$ gibt es dazu ein $N \geq 1$, so dass

$$\varphi(t_n) = \varphi(t_m), \quad n, m \geq N.$$

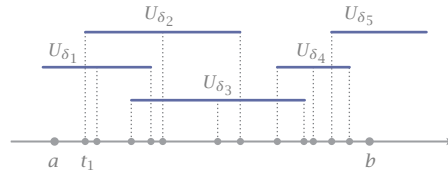
Mit (1) gilt dann auch

$$|f(t_n) - f(t_m)| \leq |f(t_n) - \varphi(t_n)| + |\varphi(t_m) - f(t_m)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da es für jedes ε ein solches N gibt, bildet $f(t_n)$ eine Cauchyfolge. Ihr Grenzwert hängt nicht von (t_n) ab, denn ist (t'_n) eine weitere solche Folge, so zeigt dasselbe Argument, dass $(f(t_n) - f(t'_n))$ eine Nullfolge bildet. Also existiert der linksseitige Grenzwert $f_-(c) = \lim_{t \nearrow c} f(t)$. Für rechtsseitige Grenzwerte $f_+(c) = \lim_{t \searrow c} f(t)$ argumentiert man analog. »»»

Von diesem Satz gilt auch die Umkehrung. Für den Beweis benötigen wir noch den folgenden Spezialfall eines Satzes über kompakte Mengen.

Abb 5
Endliche Teilüberdeckung
und Zerlegung Z



- 11 **Überdeckungslemma von Heine-Borel** Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine beliebige offene Überdeckung von $[a, b]$, das heißt, eine Familie offener Intervalle mit

$$[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda.$$

Dann enthält diese Familie auch eine endliche Teilüberdeckung von $[a, b]$. Das heißt, es gibt endlich viele Intervalle $I_{\lambda_1}, \dots, I_{\lambda_m}$, so dass

$$[a, b] \subset \bigcup_{1 \leq i \leq m} I_{\lambda_i}. \quad \times$$

««« Angenommen, es gibt keine solche endliche Teilüberdeckung. Wir zeigen zuerst, dass es dann eine fallende Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$[a, b] = J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \dots$$

mit Länge

$$|J_n| = 2^{-n} |J_0|, \quad n \geq 0,$$

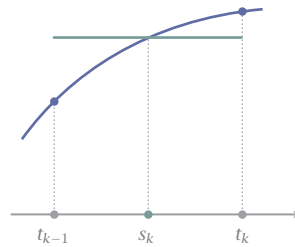
gibt, die alle ebenfalls keine endliche Teilüberdeckung besitzen. Für $J_0 = [a, b]$ entspricht dies der Annahme. Besitzt nun J_n für ein $n \geq 0$ keine endliche Teilüberdeckung, so besitzt mindestens eine der beiden abgeschlossenen Hälften von J_n ebenfalls keine. Wählen wir diese als J_{n+1} , so erhalten wir das nächste abgeschlossene Intervall dieser Folge.

Wir erhalten somit eine *Intervallschachtelung*, deren Durchschnitt genau einen Punkt $p \in [a, b]$ enthält. Dieser ist in wenigstens einem Intervall I_{λ_p} der Überdeckung enthalten. Da I_{λ_p} aber offen ist, enthält es alle Intervalle J_n mit n hinreichend groß. Das heißt, diese Intervalle J_n werden sogar von nur *einem* Intervall I_{λ_p} der Familie überdeckt. Dies ist ein Widerspruch zur Konstruktion der J_n . »»»

- 12 **Satz** Die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ besitze in jedem Punkt von $[a, b]$ einseitige Grenzwerte. Dann ist f der gleichmäßige Limes von Treppenfunktionen. \times

Abb 6

Approximation durch
konstante Funktion
auf $[t_{k-1}, t_k]$



««« Sei $\varepsilon > 0$. Zu jedem Punkt $c \in [a, b]$ existiert aufgrund der Existenz der einseitigen Grenzwerte eine Umgebung $U_\delta(c)$, so dass

$$|f(u) - f(v)| < \varepsilon$$

für alle $u, v \in U_\delta(c) \cap [a, b]$, die beide auf *derselben Seite* von c liegen. Dabei hängt δ vom Punkt c ab.

Die Familie $(U_\delta(c))_{c \in [a, b]}$ bildet eine offene Überdeckung von $[a, b]$. Nach dem Lemma von Heine-Borel¹¹ besitzt diese eine endliche Teilüberdeckung. Es gibt also endlich viele Punkte c_1, \dots, c_m in $[a, b]$ und positive Zahlen $\delta_1, \dots, \delta_m$, so dass

$$[a, b] \subset U_{\delta_1}(c_1) \cup \dots \cup U_{\delta_m}(c_m).$$

Sei $Z = (t_0, \dots, t_n)$ diejenige Zerlegung von $[a, b]$, die aus allen Mittel- und Endpunkten dieser m Intervalle bestehen, die innerhalb von $[a, b]$ liegen, zuzüglich der Punkte a und b selbst. Jedes Zerlegungsintervall (t_{k-1}, t_k) gehört dann entweder zu einer linken oder einer rechten Hälfte eines dieser m Intervalle, da deren Mittelpunkte zu den Teilungspunkten gehören. Somit gilt

$$|f(u) - f(v)| < \varepsilon, \quad u, v \in (t_{k-1}, t_k), \quad (2)$$

auf jedem Teilungsintervall (t_{k-1}, t_k) . Dazu definieren wir nun $\varphi \in T_a^b$ durch

$$\varphi|_{(t_{k-1}, t_k)} = f(s_k), \quad s_k = \frac{t_{k-1} + t_k}{2}.$$

Außerdem setzen wir der Vollständigkeit halber $\varphi(t_k) = f(t_k)$ für $0 \leq k \leq n$. Dann gilt wegen (2) auf jedem Zerlegungsintervall

$$\|f - \varphi\|_{[t_{k-1}, t_k]} \leq \|f - f(s_k)\|_{(t_{k-1}, t_k)} < \varepsilon.$$

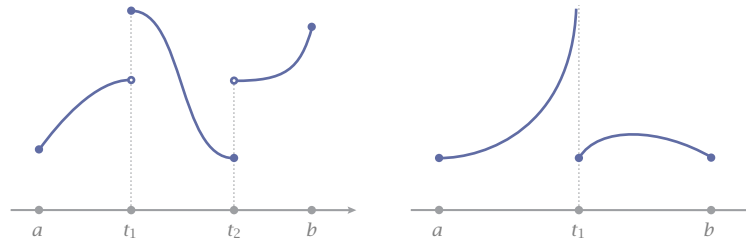
Also gilt insgesamt

$$\|\varphi - f\|_{[a, b]} < \varepsilon.$$

Da für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches φ existiert, ist die Behauptung bewiesen. »»»

Zusammengefasst^{10, 12} erhalten wir folgende

Abb 7 Stückweise, und nicht stückweise stetige Funktion



- 13 **Charakterisierung der Regelfunktionen** Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion genau dann, wenn sie in jedem Punkt des Intervalls $[a, b]$ einseitige Grenzwerte besitzt. Insbesondere sind stetige, stückweise stetige und monotone Funktionen Regelfunktionen und damit integrierbar. ✕

Dabei heißt eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *stückweise stetig*, wenn es eine Zerlegung (t_0, \dots, t_n) von $[a, b]$ gibt, so dass die Einschränkungen $f|_{(t_{k-1}, t_k)}$ für $1 \leq k \leq n$ stetig sind und einseitige Grenzwerte in allen Endpunkten besitzen.

- ▶ A. Die Gaußklammer und die Signumfunktion sind auf jedem abgeschlossenen Intervall integrierbar. Sie sind ja auch Treppenfunktionen.
- B. Die Dirichletfunktion δ ist auf *keinem* nichttrivialen Intervall integrierbar, da in keinem Punkt einseitige Grenzwerte existieren.
- C. Die Thomaefunktion ist integrierbar A-5 . ◀

10.4 Der Hauptsatz

Wir wissen nun, welche Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen im Sinne von Cauchy integrierbar sind. Jetzt geht es darum, eine brauchbare Methode zu finden, um deren Integrale auch zu bestimmen.

Die Idee ist, das Integral einer stetigen Funktion f als Funktion der rechten Intervallgrenze zu betrachten. Auf diese Weise erhält man eine differenzierbare Funktion F mit $F' = f$. Man spricht von einer *Stammfunktion* von f . Auswertung einer solchen Stammfunktion f zwischen den Grenzen von $[a, b]$ ergibt dann das Integral von f über $[a, b]$.

Um diese Idee auch für Regelfunktionen umzusetzen, definieren wir noch die *rechts-* und *linksseitige Ableitung* einer Funktion f ,

$$f'_+(t) := \lim_{h>0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

und

$$f'_-(t) := \lim_{h<0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

wenn diese Grenzwerte existieren. Offensichtlich ist f in einem inneren Punkt c differenzierbar genau dann, wenn dort links- und rechtsseitige Ableitung existieren und übereinstimmen. In diesem Fall ist $f'_-(t) = f'(t) = f'_+(t)$.

Definition Eine Funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* einer Regelfunktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, wenn F in jedem Punkt von I einseitige Ableitungen besitzt und

$$F'_+ = f_+, \quad F'_- = f_-$$

auf I gilt. In einem Randpunkt von I wird dabei nur der jeweilige einseitige Grenzwert betrachtet. \times

Besonders übersichtlich ist der Fall einer stetigen Funktionen.

- 14 **Notiz** Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist jede Stammfunktion F von f stetig differenzierbar, und es gilt $F' = f$ auf ganz I . \times

⟨⟨⟨ Ist F Stammfunktion der stetigen Funktion f , so ist überall

$$F'_- = f_- = f = f_+ = F'_+.$$

Also ist $F'_- = F'_+$ auf I , somit F differenzierbar, und $F' = f$. Außerdem folgt hieraus die Stetigkeit von F' . $\rangle\rangle\rangle$

Stammfunktionen sind *nicht eindeutig*. Ist F eine Stammfunktion, so ist es auch $F + c$ für jede reelle Konstante c . Auf einem *Intervall* ist dies aber die einzige Unbestimmtheit:

- 15 **Lemma** Auf einem Intervall unterscheiden sich verschiedene Stammfunktionen einer Regelfunktion nur durch eine additive Konstante. \times

⟨⟨⟨ Seien G und H zwei Stammfunktionen derselben Regelfunktion f . Dann besitzt auch $G - H$ in jedem Punkt einseitige Ableitungen – das ist eine leichte Übung –, und es gilt

$$(G - H)'_+ = G'_+ - H'_+ = f_+ - f_+ = 0.$$

Entsprechendes gilt für linksseitige Grenzwerte. Also ist $G - H$ sogar differenzierbar mit $(G - H)' = 0$. Aufgrund des Monotoniesatzes ?? ist $G - H$ auf dem Intervall I konstant. $\rangle\rangle\rangle$