▪ Fundamentallösung

Etwas allgemeiner und flexibler als das Exponenzial e^{At} ist der Begriff einer *Fundamentallösung*. Hierfür nehmen wir nun an, dass V endliche Dimension hat.

6 **Definition** *Sei $n = \dim V$. Dann heißt jedes System $\varphi_1, .., \varphi_n$ von n linear unabhängigen Lösungen von $\dot{x} = Ax$ eine Fundamentallösung dieser Differenzialgleichung.* ⋊

Dabei genügt es zu verlangen, dass diese Lösungen nur in *einem* Zeitpunkt linear unabhängig sind:

7 **Lemma** *Sind die Lösungen $\varphi_1, .., \varphi_n$ von $\dot{x} = Ax$ zu einem Zeitpunkt t_0 linear unabhängig, so sind sie es auch zu jedem anderem Zeitpunkt t.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sind die $\varphi_1, .., \varphi_n$ bei t_0 linear abhängig, so verschwindet dort eine nichttriviale Linearkombination aus ihnen. Diese stellt eine Lösung von $\dot{x} = Ax$ mit Wert 0 bei t_0 dar. Aufgrund der Eindeutigkeit aller Lösungen ist diese *identisch* 0. Also sind die $\varphi_1, .., \varphi_n$ zu jedem Zeitpunkt t linear abhängig. ⟩⟩⟩⟩⟩

8 **Satz** *Jede Lösung von $\dot{x} = Ax$ ist Linearkombination der Lösungen eines beliebigen Fundamentalsystems $\varphi_1, .., \varphi_n$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Jede Lösung φ ist eindeutig durch ihren Anfangswert bei $t = 0$ bestimmt. Dieser lässt sich als Linearkombination aus $\varphi_1(0), .., \varphi_n(0)$ darstellen:

$$\varphi(0) = a_1\varphi_1(0) + .. + a_n\varphi_n(0).$$

Aus Eindeutigkeitsgründen gilt dann auch $\varphi(t) = a_1\varphi_1(t) + .. + a_n\varphi_n(t)$ zu jedem anderen Zeitpunkt t. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Determinante und Spur

Die *Determinante* und die *Spur* eines Operators $A \in L(V)$ sind definiert als die Determinante und Spur einer beliebigen Matrixdarstellung von A. Dies ist *unabhängig* von der Wahl der Matrixdarstellung, denn für Matrizen gilt ja

$$\det(AB) = \det(BA), \qquad \operatorname{sp}(AB) = \operatorname{sp}(BA).$$

Sind B und C zwei Matrixdarstellung von A, so ist $C = T^{-1}BT$ mit einem geeigneten T und damit beispielsweise

$$\operatorname{sp}(C) = \operatorname{sp}(T^{-1}BT) = \operatorname{sp}(BTT^{-1}) = \operatorname{sp}(B).$$

Also sind Determinante und Spur unabhängig von der Koordinatenwahl.

Für die Determinante einer 1-Parametergruppe $t \mapsto e^{tA}$ gilt eine nützliche Differenzialgleichung.

Lemma *Für $A \in L(V)$ gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det \mathrm{e}^{tA} \Big|_{t=0} = \operatorname{sp} A. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Es ist

$$\mathrm{e}^{tA} = I + tA(t), \qquad A(t) = \sum_{k \geqslant 1} \frac{t^{k-1}}{k!} A^k.$$

In einer beliebigen Basis erhält dies eine Spaltenvektordarstellung

$$\mathrm{e}^{tA} = [I_1 + tA_1(t), .., I_n + tA_n(t)],$$

wobei A_i die i-te Spalte der Matrix A bezeichnet. Mit der Linearität der Determinante in jeder Spalte folgt hieraus

$$\begin{aligned} \det \mathrm{e}^{tA} &= \det [I_1 + tA_1(t), .., I_n + tA_n(t)] \\ &= \det I + t \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \det [I_1, .., A_i(t), .., I_n] + O(t^2), \end{aligned}$$

wobei $A_i(t)$ in der i-ten Spalte der Matrix steht. Also ist

$$\det \mathrm{e}^{tA} = 1 + t \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} A_{ii}(t) + O(t^2) = 1 + t \operatorname{sp}(A) + O(t^2).$$

Das ergibt die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

9 **Satz von Liouville** *Für $A \in L(V)$ gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det \mathrm{e}^{tA} = \operatorname{sp}(A) \det \mathrm{e}^{tA}$$

und damit auch $\det \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t \operatorname{sp}(A)}$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Für die skalare Funktion $d(t) = \det \mathrm{e}^{tA}$ gilt

$$\begin{aligned} d(s+t) &= \det(\mathrm{e}^{(s+t)A}) \\ &= \det(\mathrm{e}^{sA} \mathrm{e}^{tA}) \\ &= \det(\mathrm{e}^{sA}) \det(\mathrm{e}^{tA}) = d(s)d(t). \end{aligned}$$

Mit dem vorangehenden Lemma gilt deshalb

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} d(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} d(s+t) \Big|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} d(s) \Big|_{s=0} d(t) = \operatorname{sp}(A) d(t).$$

Dies ist die erste Behauptung. Die zweite folgt hieraus mit $d(0) = 1$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Die Bedeutung des Satzes von Liouville liegt in der geometrischen Interpretation von e^{tA} als Zeit-t-Abbildung der Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$. Die Determinante einer linearen Abbildung ist derjenige Faktor, mit dem das Volumen jedes Körpers unter dieser Abbildung multipliziert wird. Der Satz von Liouville besagt also, dass die Zeit-t-Abbildung einer linearen Differenzialgleichung das Volumen jedes beliebigen Körpers mit dem Faktor $\exp(t \operatorname{sp} A)$ multipliziert. — Ein Spezialfall ist folgendes

Korollar *Die 1-Parametergruppe* e^{tA} *ist volumenerhaltend genau dann, wenn die Spur von* A *verschwindet.* ⋊

Bei zweidimensionalen Systemen spricht man auch von *flächentreuen* Abbildungen.

▪ Koordinatentransformationen

Bis hierhin betrachteten wir die lineare Differenzialgleichung

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

ohne Bezug zu konkreten Koordinaten. Erst wenn wir eine Basis $v_1, .., v_n$ und damit Koordinaten $x = x_1 v_1 + .. + x_n v_n$ in einem endlich-dimensionalen Vektorraum V auszeichnen, wird A durch eine $n \times n$-Matrix (A_{ij}) dargestellt. Gleichung (1) geht dann über in ein System

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

von, wie man sagt, *n homogenen linearen Differenzialgleichungen erster Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten*.

Wählen wir eine andere Basis, so erhalten wir natürliche eine andere solche Darstellung

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{n} B_{ij} y_j, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Deren Zusammenhang ist gegeben durch einen linearen Isomorphismus

$$T: \ V \to V, \quad x = Ty.$$

Dann gilt

$$T\dot{y} = (Ty)^{\cdot} = \dot{x} = Ax = ATy.$$

Somit geht (1) über in die lineare Differenzialgleichung

$$\dot{y} = By \tag{2}$$

mit der zu A ähnlichen Matrix

$$B = T^{-1}AT.$$

Jede Lösung von (2) geht dann unter T über in eine Lösung von (1). Kennen wir das sogenannte *Phasenportrait* von (2), also die Gesamtheit aller Lösungen der Differenzialgleichung, so kennen wir bis auf einen linearen Isomorphismus auch das Phasenportrait von (1).

Bemerkung Die allgemeine Lösung von (2) ist

$$y(t) = \mathrm{e}^{Bt} y_0.$$

Mit $x_0 = Ty_0$ ist die allgemeine Lösung von (1) dann

$$x(t) = T\mathrm{e}^{Bt}T^{-1}x_0 = \mathrm{e}^{TBT^{-1}t}x_0 = \mathrm{e}^{At}x_0,$$

wie es sich gehört. ⊸

Die Differenzialgleichung (1) versteht man am leichtesten, wenn man diese in Koordinaten betrachtet, in denen sie eine besonders einfache Form annimmt. Dies wird hier die sogenannte SN-Zerlegung sein – eine einfachere Version der jordanschen Normalform –, die wir in Abschnitt 5 betrachten. Zunächst betrachten wir den besonders übersichtlichen, aber wichtigen Spezialfall zweidimensionaler Systeme.

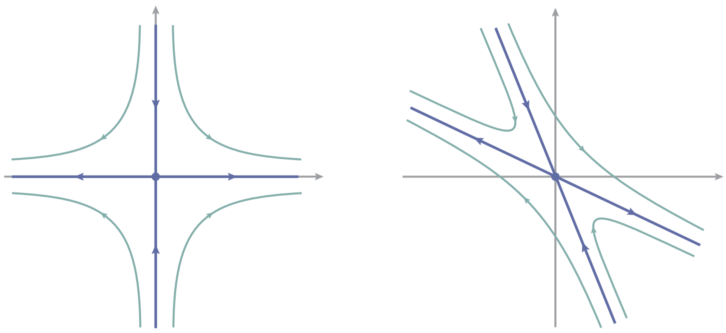
16.3 Zweidimensionale lineare Systeme

Das Phasenportrait zweidimensionaler linearer Differenzialgleichungen wird fast ausschließlich durch die beiden Eigenwerte des linearen Operators bestimmt. Im Wesentlichen kommt es darauf an, ob diese (i) reell und einfach, (ii) reell und doppelt, oder (iii) komplex konjugiert sind. Im Fall doppelter Eigenwerte ist noch zu unterscheiden, ob A diagonalisierbar ist oder nicht.

Der Nullpunkt ist immer ein *Gleichgewichtspunkt* jeder linearen Differenzialgleichung. Das heißt, die konstante Kurve $t \mapsto 0$ ist immer eine Lösung. Uns interessiert auch noch die Frage, welche anderen Lösungen für $t \to \infty$ oder $t \to -\infty$ gegen diesen Gleichgewichtspunkt konvergieren.

16.12

Abb 1 Sattelpunkt in angepassten und allgemeinen Koordinaten



Einfache reelle Eigenwerte

In diesem Fall ist A ein Diagonaloperator. In geeigneten Koordinaten ist

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

mit den beiden Eigenwerten λ und μ. Die allgemeine Lösung von $\dot{x} = Ax$ lautet

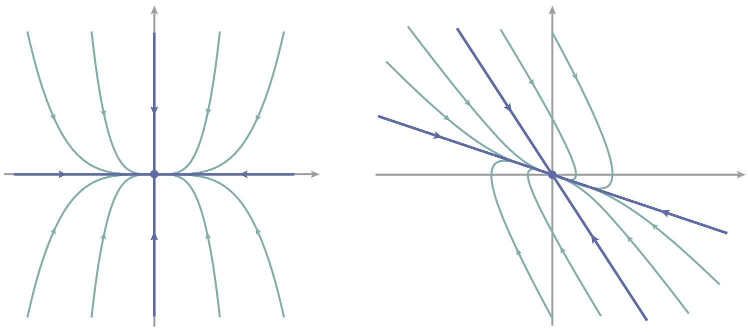
$$x(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mu t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Das *Phasenportrait* – das ist die Gesamtheit der Lösungen – hängt nun von der Lage der Eigenwerte auf der reellen Achse ab. Gilt $\lambda\mu < 0$, so spricht man von einem *Sattel*. Es gibt je eine Richtung, die Abszisse und die Ordinate, in denen die Lösungen für $t \to \infty$ respektive $t \to -\infty$ gegen den Gleichgewichtspunkt 0 konvergieren. Alle anderen Lösungen sind unbeschränkt. In allgemeinen Koordinaten gilt daher folgender Satz.

Sattel *Hat A die reellen Eigenwerte $\mu < 0 < \lambda$, so konvergieren die Lösungen im μ-Eigenraum für $t \to \infty$ und im λ-Eigenraum für $t \to -\infty$ gegen den Gleichgewichtspunkt 0. Alle anderen Lösungen sind für $t \to \pm\infty$ unbeschränkt.* ⋊

Sind beide Eigenwerte negativ, so spricht man von einem *stabilen Knoten*. Alle Lösungen konvergieren für $t \to +\infty$ gegen den Gleichgewichtspunkt 0, wobei für $\mu < \lambda < 0$ alle Lösungen außerhalb des μ-Eigenraumes tangential zum λ-Eigenraum gegen den Gleichgewichtspunkt konvergieren. Dies ist auch das Bild in allgemeinen Koordinaten.

Abb 2 Stabiler Knoten in angepassten und allgemeinen Koordinaten



Stabiler Knoten *Hat A die reellen Eigenwerte $\mu < \lambda < 0$, so konvergieren alle Lösungen für $t \to \infty$ gegen den Gleichgewichtspunkt 0, wobei außerhalb des μ-Eigenraumes alle Lösungen tangential zum λ-Eigenraum konvergieren.* ⋊

Sind beide Eigenwerte positiv, so spricht man von einem *instabilen Knoten*. Es gelten analoge Konvergenzaussagen, wenn man $t \to -\infty$ statt $t \to \infty$ betrachtet.

Der Fall $\mu < 0 = \lambda$ ist in Abbildung 3 skizziert.

Doppelte Eigenwerte

Diesen Fall nennt man *entartet*. Man sieht dem Operator sofort an, ob er diagonalisierbar ist oder nicht.

Lemma *Sei A ein zweidimensionaler Operator mit doppelten Eigenwert. Ist A diagonalisierbar, so hat A in jeder Basis Diagonalgestalt.* ⋊

Abb 3 Eigenwerte $\mu < 0 = \lambda$

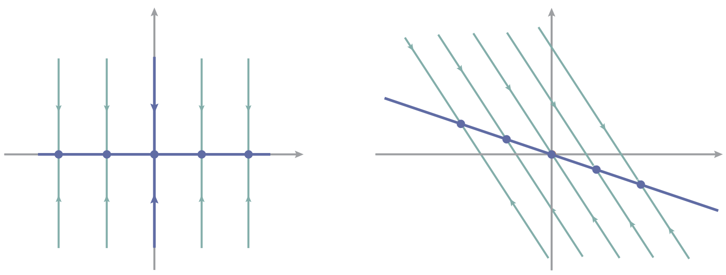
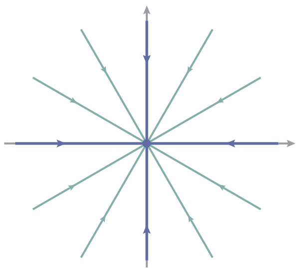


Abb 4 Entarteter stabiler Knoten, diagonalisierbar



⟪⟪⟪ In diesem Fall existiert ein T mit

$$T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda) = \lambda I.$$

Dann ist aber auch $A = T\lambda I T^{-1} = \lambda T T^{-1} = \lambda I$. Mit anderen Worten, A ist ein Vielfaches der Identität, und diese hat Diagonalgestalt in jeder Basis. ⟫⟫⟫

A ist ein Diagonaloperator Für $\lambda < 0$ spricht man von einem *entarteten stabilen Knoten*. Alle Lösungen konvergieren gegen den Gleichgewichtspunkt 0, und sämtliche Lösungskurven sind Geraden – siehe Abbildung 4. Entsprechendes gilt für $\lambda > 0$, dem *entarteten instabilen Knoten*.

A ist ein Jordanblock In geeigneten Koordinaten ist

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da I und N kommutieren und N^2 verschwindet, ist

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t\lambda I}\mathrm{e}^{tN} = \mathrm{e}^{\lambda t}(I + Nt) = \mathrm{e}^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung ist damit

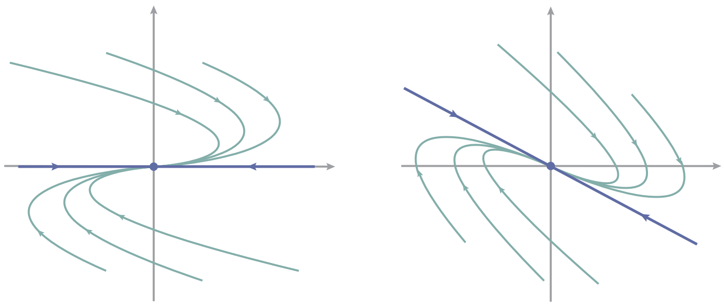
$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\begin{pmatrix} a + bt \\ b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Alle Lösungskurven sind dabei im Gleichgewichtspunkt tangential an die Abszisse, also den eindimensionalen Eigenraum des doppelten Eigenwerts. Man spricht ebenfalls von einem *entarteten Knoten* – siehe Abbildung 5.

Entarteter stabiler Knoten *Hat A den doppelten reellen Eigenwerte $\lambda < 0$ und Diagonalgestalt, so konvergieren alle Lösungen für $t \to \infty$ aus allen Richtungen geradlinig gegen den Gleichgewichtspunkt 0. Hat A*

16.15

Abb 5 Entarteter stabiler Knoten, nicht diagonalisierbar



dagegen keine Diagonalgestalt, so konvergieren diese tangential zum eindimensionalen λ*-Eigenraum gegen den Gleichgewichtspunkt* 0. ⋊

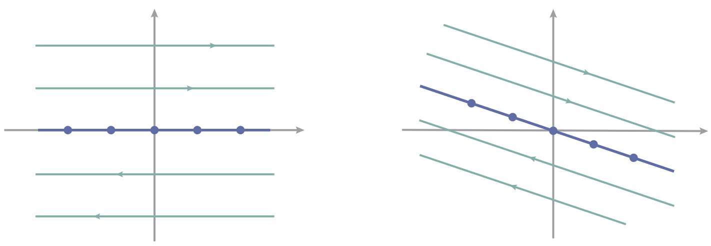
Für $\lambda > 0$ gilt Entsprechendes für $t \to -\infty$. Der Fall eines nichtdiagonalisierbaren Operators mit doppeltem Eigenwert 0 ist in Abbildung 6 skizziert.

Die verschiedenen Knoten kann man somit geometrisch anhand der Anzahl der asymptotischen Richtungen ihrer Lösungskurven unterscheiden. Diese ist

$$\begin{array}{lll} 2 & \text{für} & \lambda \ne \mu, \\ \infty & \text{für} & \lambda = \mu,\ A = \lambda I, \\ 1 & \text{für} & \lambda = \mu,\ A \ne \lambda I. \end{array}$$

Die Anzahl 2 gilt im Prinzip auch für den Sattel, nur dass hier fast alle Lösungen weder für $t \to \infty$ noch für $t \to -\infty$ konvergieren.

Abb 6 Entarteter Knoten mit Eigenwert 0



16.16

▪ Komplexe Eigenwerte

Ein zweidimensionaler reeller Operator mit nicht-reellen Eigenwerten kann in folgende *reelle Normalform* gebracht werden.

10 **Lemma** *Hat der zweidimensionale Operator A komplexe Eigenwerte $\alpha \pm \mathrm{i}\omega$ mit $\omega \neq 0$, so ist in geeigneten Koordinaten*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I + \omega J, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨ Zum Eigenwert $\alpha + \mathrm{i}\omega$ existiert ein komplexer Eigenvektor $u + \mathrm{i}v$ mit

$$A(u + \mathrm{i}v) = (\alpha + \mathrm{i}\omega)(u + \mathrm{i}v) = (\alpha u - \omega v) + \mathrm{i}(\omega u + \alpha v).$$

Somit gilt

$$Au = \alpha u - \omega v, \qquad Av = \omega u + \alpha v.$$

In der reellen Basis (v, u) – in dieser Reihenfolge – erhält A damit die angegebene Gestalt. ⟩⟩⟩⟩

Da I und J kommutieren, gilt in diesen Koordinaten A-8

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{At} &= \mathrm{e}^{\alpha I t + \omega J t} \\ &= \mathrm{e}^{\alpha I t}\mathrm{e}^{\omega J t} = \mathrm{e}^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Abbildung beschreibt eine Streckung um den Faktor $\mathrm{e}^{\alpha t}$ und eine Drehung um den Winkel ωt im mathematischen Sinn – also gegen den Uhrzeigersinn für $\omega t > 0$. Es handelt sich also um eine *Drehstreckung*. Da diese beiden Operationen kommutieren, muss deren Reihenfolge nicht spezifiziert werden.

Strudel und Zentrum *Hat A die nichtreellen Eigenwerte $\alpha \pm \mathrm{i}\omega$, so ist die 1-Parametergruppe e^{At} eine Familie von Drehstreckungen mit dem*

Abb 7 Stabiler Strudel in angepassten und allgemeinen Koordinaten

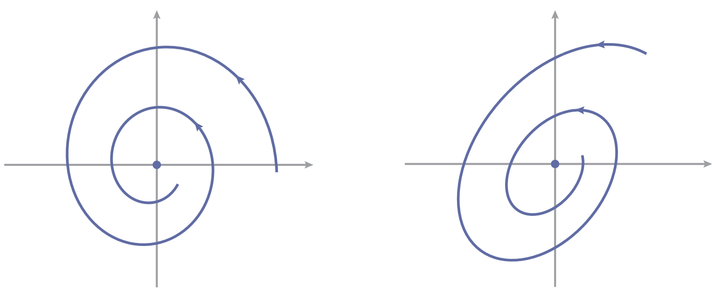
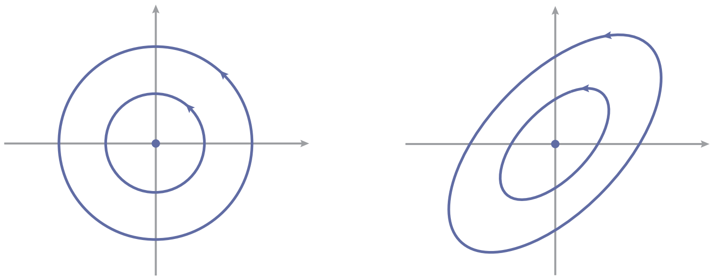


Abb 8 Zentrum in angepassten und allgemeinen Koordinaten



Faktor $\mathrm{e}^{\alpha t}$ *und dem Winkel* ωt. *Man spricht von einem Zentrum, falls* $\alpha = 0$, *und einem stabilen oder instabilen Strudel, falls* $\alpha < 0$ *respektive* $\alpha > 0$. ⋊

In einem stabilen Strudel konvergieren alle Lösungen gegen den Gleichgewichtspunkt, *ohne* eine asymptotische Richtung anzustreben. Dies unterscheidet ihn vom stabilen Knoten.

Das Zentrum ist unter den zweidimensionalen linearen Systemen das *einzige* mit nichttrivialen periodischen Lösungen. Außerdem haben alle Lösungen *dieselbe Periode*

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Dies ist charakteristisch für *lineare* Systeme. In nichtlinearen Systemen wie dem mathematischen Pendel variiert dagegen die Periode periodischer Lösungen mit deren Amplitude.