Klassifikation zweidimensionaler Systeme

Wir klassifizieren die zweidimensionalen Systeme anhand ihrer Determinante und Spur. Mit

$$s = \operatorname{sp} A, \qquad d = \det A$$

ist das charakteristische Polynom eines zweidimensionalen Operators A

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - s\lambda + d,$$

wie man anhand einer beliebigen Matrixdarstellung verifiziert. Seine Eigenwerte sind somit

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(s \pm \sqrt{s^2 - 4d}\right).$$

Die eben diskutierten Fälle korrespondieren dann mit dem Vorzeichen der Diskriminante

$$\Delta := s^2 - 4d$$

und dem Vorzeichen der Determinante:

$$\begin{aligned}
&\det A < 0 && \rightsquigarrow \text{ Sattel,} \\
&\det A \geqslant 0 && \\
&\qquad \wedge\ \Delta > 0 && \rightsquigarrow \text{ Knoten,} \\
&\qquad\quad\ \ \Delta = 0 && \rightsquigarrow \text{ entarteter Knoten,} \\
&\qquad\quad\ \ \Delta < 0 && \rightsquigarrow \text{ Strudel oder Zentrum.}
\end{aligned}$$

Im Fall $\det A \geqslant 0$ bestimmt das Vorzeichen der Spur von A die Stabilität des Gleichgewichtspunktes:

$$\begin{aligned}
&\det A \geqslant 0 && \\
&\quad \wedge\ \operatorname{sp} A < 0 && \rightsquigarrow \text{ stabil,} \\
&\qquad\ \ \operatorname{sp} A > 0 && \rightsquigarrow \text{ instabil.}
\end{aligned}$$

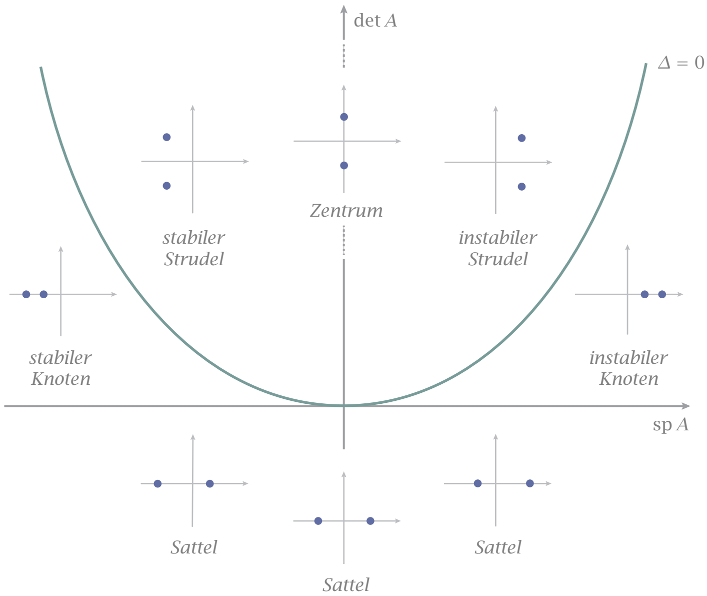
Abbildung 9 zeigt diese Fälle in einem Spur-Determinante-Diagramm, zusammen mit der zugehörigen Konfiguration der beiden Eigenwerte. Die Kurve

$$\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det A = (\operatorname{sp} A)^2/4$$

ist eine Parabel, die Knoten und Sattel von Strudeln und Zentren trennt. Sie ist der Ort der entarteten Knoten, wobei deren Typ – diagonalisierbar oder nicht – nicht von Spur und Determinante ablesbar ist.

16.19

Abb 9 Spur-Determinante-Diagramm



Die Fälle

$$\begin{aligned} \det A = 0 &\quad\rightsquigarrow\quad A \text{ singulär}, \\ \Delta = 0 &\quad\rightsquigarrow\quad \text{doppelte Eigenwerte}, \\ \operatorname{sp} A = 0 &\quad\rightsquigarrow\quad \text{Fluss flächentreu} \end{aligned}$$

sind ›untypisch‹ und treten in einem ›allgemeinen‹ System nicht auf.

■ Der harmonische Oszillator mit Dämpfung

Als Beispiel betrachten wir den harmonischen Oszillator mit Dämpfung. Er wird durch die Gleichung

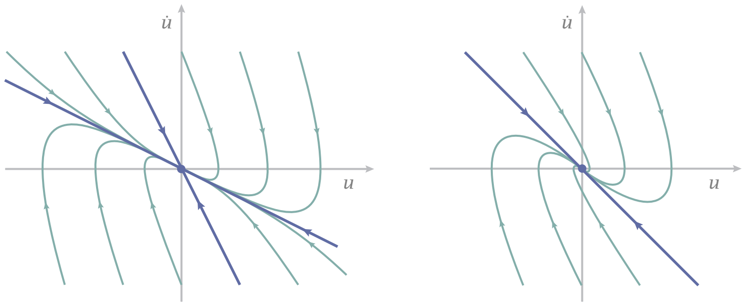
$$\ddot{u} = -\omega^2 u - \rho \dot{u}$$

beschrieben. Hierbei ist $\omega > 0$ die Frequenz des ungedämpften Oszillators und $\rho \geqslant 0$ der Reibungskoeffizient der Dämpfung. Diese ist proportional zur Geschwindigkeit $\dot{u}$ und wirkt dieser entgegengesetzt.

Setzen wir

$$u = x_1, \qquad \dot{u} = x_2,$$

Abb 10 Stark gedämpfter Oszillator: stabiler und entarteter Knoten



so ist die Gleichung äquivalent zum System

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\rho \end{pmatrix}.$$

Es ist also

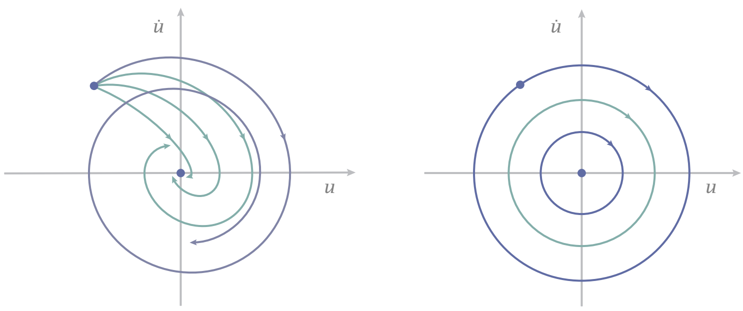
$$\operatorname{sp} A = -\rho \leqslant 0, \qquad \det A = \omega^2 > 0, \qquad \Delta = \rho^2 - 4\omega^2.$$

Insbesondere ist

$$\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = 2\omega.$$

Betrachten wir die Frequenz ω als fest und den Reibungskoeffizienten ρ als Parameter, so erhalten wir eine Familie von Operatoren $A = A(\rho)$, die im Spur-Determinante-Diagramm eine horizontale Halbgerade beschreiben, die die Parabel $\Delta = 0$ im Punkt $(-2\omega, \omega)$ schneidet und im Punkt $(0, \omega)$ endet. Dabei treten vier Fälle auf.

Abb 11 Gedämpfte und ungedämpfte Schwingungen: Strudel und Zentrum



Stabiler Knoten für $\rho > 2\omega$ Fast alle Lösungen konvergieren gegen die Gleichgewichtslage in der Richtung des Eigenraumes des größeren der beiden negativen Eigenwerte, wobei sie höchstens einmal die Richtung wechseln (Abbildung 10 links).

Entarteter stabiler Knoten für $\rho = 2\omega$ Da A *kein* Diagonaloperator ist, konvergieren alle Lösungen in der Richtung des eindimensionalen Eigenraumes von A gegen 0. Dieser wird von dem Vektor $(1,-1)^\top$ aufgespannt (Abbildung 10 rechts).

Stabiler Strudel für $0 < \rho < 2\omega$ Man spricht von *gedämpften Schwingungen*. Der Oszillator schwingt mit immer kleineren Ausschlägen unendlich oft um die Gleichgewichtslage (Abbildung 11 zeigt Lösungen für *verschiedene* ρ).

Zentrum für $\rho = 0$ Man spricht von *ungedämpften Schwingungen*. Alle Lösungen sind periodisch mit Frequenz ω und Periode $T = 2\pi/\omega$.

Im Fall der gedämpften Schwingung sind die Eigenwerte $\alpha \pm \mu\mathrm{i}$ mit

$$\alpha = -\rho/2, \qquad \mu = \sqrt{\omega^2 - \rho^2/4}.$$

Für die Auslenkung u des Oszillators erhält man somit

$$u(t) = a\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\mu t + b\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\mu t, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Mit $r^2 = a^2 + b^2$ und trigonometrischen Identitäten erhält dies die Form

$$u(t) = r\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\mu t + \tau)$$

mit der Amplitude r und der Phase τ als Parameter.

Man nennt μ die *reduzierte Frequenz* des gedämpften Oszillators. Für die zugehörige Periode gilt

$$T = \frac{2\pi}{\mu} \to \begin{cases} \infty, & \rho \nearrow 2\omega, \\ \dfrac{2\pi}{\omega}, & \rho \searrow 0. \end{cases}$$

16.22

16.4 Diagonalisierbare Gleichungen

Wir betrachten nun $\dot{x} = Ax$ in einem endlich-dimensionalen Vektorraum. Am einfachsten ist die Situation, wenn A in einer geeigneten Basis Diagonalgestalt annimmt, oder, wie man sagt, *im Reellen diagonalisert kann.* Dies ist immer dann der Fall, wenn alle Eigenwerte von A reell und verschieden sind, oder allgemeiner, wenn A bezüglich eines Skalarproduktes *symmetrisch* ist.

▪ Reelle Diagonalisierbarkeit

11 **Satz aus der linearen Algebra** *Sind alle Eigenwerte von $A \in L(V)$ reell und einfach, so besitzt der Vektorraum V eine Basis aus Eigenvektoren von A. In dieser nimmt A Diagonalgestalt an. Dasselbe gilt, wenn A symmetrisch bezüglich eines Skalarproduktes ist.* ⋊

Für reelle wie auch komplexe Eigenwerte gilt nun Folgendes, wenn wir die reelle Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$ ›im Komplexen‹ betrachten.

12 **Lemma** *Ist v Eigenvektor von $A \in L(V)$ zum Eigenwert λ, so ist $e^{\lambda t} v$ eine Lösung der linearen Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wegen $Av = \lambda v$ gilt ja für jedes t

$$(e^{\lambda t} v)^{\cdot} = e^{\lambda t} \lambda v = e^{\lambda t} A v = A(e^{\lambda t} v). \qquad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

Geometrisch betrachtet spannt der Eigenvektor v einen unter A invarianten eindimensionalen Unterraum von V auf, auf dem sich die Differenzialgleichung auf $\dot{x} = \lambda x$ reduziert. Ist λ reell, so ist dies ein eindimensionaler reeller Unterraum. Ist λ komplex, so entspricht dem ein zweidimensionaler reeller Unterraum, wie wir gleich zeigen werden.

Ist nun $v_1, .., v_n$ eine Basis aus Eigenvektoren von A zu den reellen Eigenwerten $\lambda_1, .., \lambda_n$, so bilden die Kurven

$$\varphi_k(t) = e^{\lambda_k t} v_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{5}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen zu $\dot{x} = Ax$. Da sich jede andere Lösung daraus linear kombinieren lässt $_8$, erhalten wir folgenden

13 **Satz** *Besitzt V eine Basis aus reellen Eigenvektoren $v_1, .., v_n$ von A mit Eigenwerten $\lambda_1, .., \lambda_n$, so bilden die Kurven (5) ein Fundamentalsystem von $\dot{x} = Ax$. Die allgemeine Lösung ist somit*

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t} v_k, \qquad c_k \in \mathbb{R}. \quad ⋊ \tag{6}$$

Die allgemeine Lösung ist somit die Überlagerung der n Exponenziallösungen auf den durch die einzelnen Eigenvektoren aufgespannten eindimensionalen invarianten Unterräumen. Dies wird auch als *Superpositionsprinzip* bezeichnet. Beispiele sind der Sattel und die Knoten aus Abschnitt 3.

Unter den Voraussetzungen des Satzes existiert auch eine Koordinatentransformation T, so dass

$$T^{-1}AT = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, .., \lambda_n).$$

Wegen $AT = TD$ bestehen die Spalten der Matrixdarstellung von T aus den Eigenvektoren von A. Die allgemeine Lösung von $\dot{x} = Ax$ ist damit

$$\varphi(t) = T\mathrm{e}^{Dt}c, \qquad c = (c_1, .., c_n)^\top \in \mathbb{R}^n.$$

Dies ist nur eine andere Schreibweise für (6).

Korollar *Sind alle Eigenwerte von A einfach und negativ, so gilt*

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$$

für jede Lösung von $\dot{x} = Ax$. ⋊

Diesen Satz werden wir später wesentlich verallgemeinern 18.

▪ Diagonalisierbarkeit im Komplexen

Besitzt A einen *komplexen* Eigenwert λ mit notwendigerweise komplexem Eigenvektor w, so ist $\mathrm{e}^{\lambda t}w$ eine komplexe Lösung von $\dot{x} = Ax$ 12. Ihr Real- und Imaginärteil ergeben dann zwei linear unabhängige reelle Lösungen.

14 **Lemma** *Ist $w = v + \mathrm{i}u$ ein komplexer Eigenvektor von A zum komplexen Eigenwert $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\omega$, $\omega \neq 0$, so bilden*

$$v\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\omega t - u\,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\omega t,$$
$$v\,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\omega t + u\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\omega t,$$

zwei linear unabhängige Lösungen von $\dot{x} = Ax$. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Mit $\mathrm{e}^{\lambda t}w$ ist auch die komplex konjugierte Kurve eine Lösung, da die Gleichung reell ist. Aufgrund ihrer Linearität sind dann auch der Real- und Imaginärteil von

$$\mathrm{e}^{\lambda t}w = \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t)(v + \mathrm{i}u)$$

eine Lösung, was gerade die Behauptung ergibt. Die Vektoren u und v sind linear unabhängig, da es andernfalls auch einen reellen Eigenvektor zu λ gäbe und damit λ selbst reell wäre. ⟩⟩⟩⟩

Wie wir bereits bei den zweidimensionalen Systemen gesehen haben 10, spannen die Vektoren v und u einen unter A invarianten, zweidimensionalen Unterraum von V auf, auf dem A die Matrixdarstellung

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix}$$

erhält. Dieser Unterraum wird also von einem Strudel oder Zentrum ausgefüllt, je nachdem, ob $\alpha \neq 0$ oder $\alpha = 0$.

Der zu λ konjugierte Eigenwert $\bar{\lambda} = \alpha - \mathrm{i}\omega$ mit Eigenvektor $\bar{w} = v - \mathrm{i}u$ definiert übrigens denselben Unterraum und dieselbe Dynamik, allerdings mit entgegengesetzter Orientierung.

Satz aus der linearen Algebra *Sind alle Eigenwerte*

$$\lambda_1, .., \lambda_r, \ \alpha_{r+1} \pm \mathrm{i}\omega_{r+1}, .., \alpha_m \pm \mathrm{i}\omega_m$$

von A einfach mit mit Eigenvektoren v_k respektive $w_k = v_k + \mathrm{i}u_k$, so bilden die Vektoren

$$v_1, .., v_r, \ u_{r+1}, v_{r+1}, .., u_m, v_m$$

eine reelle Basis des Vektorraums V. In dieser erhält der Operator die Blockdiagonalgestalt

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, .., \lambda_r, \Lambda_{r+1}, .., \Lambda_m)$$

mit

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & -\omega_k \\ \omega_k & \alpha_k \end{pmatrix}, \qquad r < k \leqslant m.$$

Dasselbe gilt, wenn A normal bezüglich eines Skalarproduktes ist. ⋊

Bilden wir zu den reellen Eigenvektoren die Exponenziallösungen und zu den komplexen die Lösungen des vorangehenden Lemmas 14, so gelangen wir wieder zu einem Fundamentalsystem für $\dot{x} = Ax$. Damit gelangen wir zu folgendem

15 **Satz** *Ist $A \in L(V)$ im Komplexen diagonalisierbar mit Eigenwerten*

$$\lambda_1, .., \lambda_r, \ \alpha_{r+1} \pm \mathrm{i}\omega_{r+1}, .., \alpha_m \pm \mathrm{i}\omega_m$$

und Eigenvektoren v_k respektive $w_k = v_k + \mathrm{i}u_k$, so bilden die Kurven

$$\mathrm{e}^{\lambda_k t} v_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant r,$$

sowie

$$\begin{aligned} v_k \,\mathrm{e}^{\alpha_k t} \cos \omega_k t - u_k \,\mathrm{e}^{\alpha_k t} \sin \omega_k t, \\ v_k \,\mathrm{e}^{\alpha_k t} \sin \omega_k t + u_k \,\mathrm{e}^{\alpha_k t} \cos \omega_k t, \end{aligned} \qquad r+1 \leqslant k \leqslant m,$$

ein Fundamentalsystem zu $\dot{x} = Ax$. Jede Linearkombination aus diesen Kurven ergibt somit eine Lösung dieser Differenzialgleichung. ⋊

Die allgemeine Lösung ist damit die ungestörte Überlagerung der Exponenziallösungen zu den reellen Eigenwerten, und der Strudel- oder Zentrumslösungen zu Paaren komplexer Eigenwerte. Damit lassen sich qualitativ die Lösungen fast aller drei- und vierdimensionalen linearen Differenzialgleichungen beschreiben.

▷ *Beispiel* Betrachte $\dot{x} = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind 1 und $2 \pm 3\mathrm{i}$, Eigenvektoren sind beispielsweise

$$\begin{aligned} w &= (-10, 3, 1), \\ v + \mathrm{i}u &= (0, -\mathrm{i}, 1) = (0, 0, 1) + \mathrm{i}(0, -1, 0). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet damit

$$\begin{aligned} \varphi(t) = a\mathrm{e}^t w \\ &+ \mathrm{e}^{2t}(b \sin 3t + c \cos 3t)\, v \\ &+ \mathrm{e}^{2t}(b \cos 3t - c \sin 3t)\, u \end{aligned}$$

mit reellen Parametern a, b, c. Schreiben wir noch $b = r\cos\tau$ und $c = r\sin\tau$ mit $r^2 = b^2 + c^2$, so wird dies zu

$$\varphi(t) = a\mathrm{e}^t w + r\mathrm{e}^{2t} \sin(3t + \tau)\, v + r\mathrm{e}^{2t} \cos(3t + \tau)\, u.$$

In der reellen Basis w, v, u erhält A durch

$$x = Ty, \qquad T = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die Blockdiagonalgestalt

$$T^{-1}AT = B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & -3 \\ & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

und es ist

$$\mathrm{e}^{tB} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & & \\ & \mathrm{e}^{2t}\cos 3t & -\mathrm{e}^{2t}\sin 3t \\ & \mathrm{e}^{2t}\sin 3t & \mathrm{e}^{2t}\cos 3t \end{pmatrix}.$$ ◁