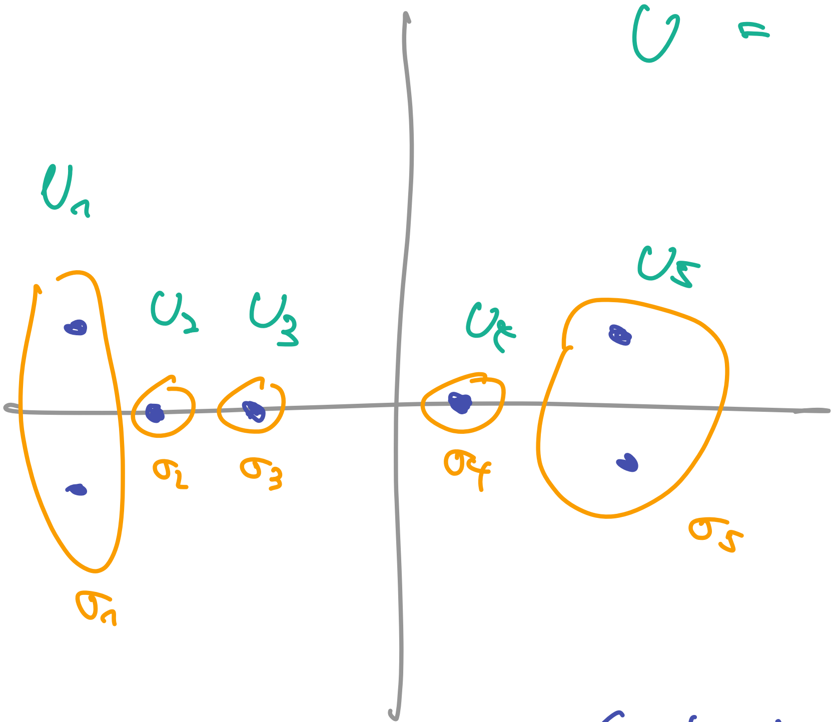
22. Vorlesung 12.06.2024

$$U = \bigoplus U_i$$



$$\sigma(A|U_k) = \sigma_k$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{pmatrix}$$

$$A_k = A|U_k$$

Bew: Da $SN = NS$:

$$e^A = e^{S+N} = e^S e^N$$

$$= e^S \left(1 + N + \ldots + \frac{1}{m!} N^m\right).$$

$\square$

Bem: Für $A_h = S_h + N_h$ mit EW λ_h von $\lambda_h, \bar{F}_h$:

Dh ist $m = \nu_h$ die Differenz.

$$N : \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Bem: $N^{m} = 0$, $(m \geq \nu_k)$

Dann

$$e^{At} = e^{St} e^{Nt}$$

$$= e^{St}\left(1 + \dots + \frac{1}{(m-1)!} N^{m-1} t^{m-1}\right)$$

$$= \underbrace{e^{\lambda t} \cdot \text{Matrix mit Polynom}}_{\text{Quasipolynome}}$$

Bem: Alle EW einfach:

$\nu_k = 1$

Dann $m_k = 1$, und alle

Polynome mit Konstant:

$$\underbrace{c_k e^{\lambda_k t}}_{\text{Exponentialfunktion.}}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Beweis: $\Rightarrow$ $\sigma(A)$ in linker Halbebene.

Jede Lösung $\varphi(t)$ Komponenten aus

Exponentialen mit Faktor

$$e^{\lambda_k t} = \underbrace{e^{\alpha_k t}}_{\alpha_k < 0} \; \underbrace{e^{i\beta_k t}}$$

$$\xrightarrow[t \to \infty]{} 0 \quad \text{für alle } k$$

$$\Rightarrow \quad e^{\lambda_k t} p_k(t) \longrightarrow 0 \quad - " -.$$

$\Leftarrow$ Annahme.

Es existiert Eigenwert $\lambda = \alpha \pm i\omega$, $\alpha \geq 0$

Dann existiert eine zu einer reellen

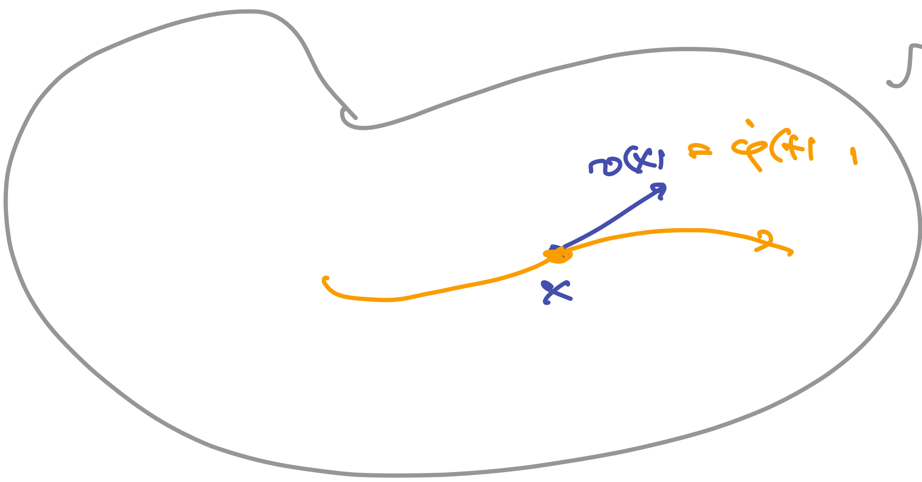
oder komplexen Exponent,

für die Lösung eine ... einige

$\varphi(t)$ mit $|\varphi(t)| \geq 1$ für alle $t \geq 0$.

Also: $\varphi(t) \underset{t\to\infty}{\not\to} 0$. $\lightning$

17. Gewöhnliche Dgl



$\Omega \subset U$

$v(x) = \dot\varphi(t)$, falls $x = \varphi(t)$

Frage:

1. Jede diff. Lsg ist stetig diffbar, denn

$$\dot\varphi(t) = \underbrace{v(\varphi(t))}_{\text{stetig in } t}$$

2.

$$\dot x = \underbrace{v(x)}_{\text{unabhängig von } t.}$$

3. Standardfall $\mathbb{R}^n$:

$$\dot x_1 = v_1(x_1,\dots,x_n)$$
$$\dot x_2 = v_2(\dots)$$
$$\vdots$$
$$\dot x_n = v_n(x_1,\dots,x_n)$$

<u>Bsp:</u> 1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

definiere
$$\dot x = f(x)$$

Konkret: $f(x) = x^2$

Allg. Lsg: $\varphi(t) = \dfrac{a}{1-at}$, $a \in \mathbb{R}$

$$= \frac{1}{1/a - t}, \quad at \neq 1.$$

2. $\dot{x} = Ax$:

Vektorfeld :

$$U \longrightarrow U, \quad x \mapsto v(x) = Ax$$

Lösung :

$$\varphi(t) = e^{At} x_0, \quad x_0 \in U$$

1. $\dot{x} = f(t, x)$

Setze :

$$x_0 = t$$
$$x_1 = x$$

Dann :

$$\dot{x}_0 = 1$$
$$\dot{x}_1 = f(x_0, x_1)$$

$$v(x_0, x_1) = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ f(x_0, x_1) \end{matrix} \right.$$

2. $\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} = f(x) \quad , x \in \mathbb{R}$

Dann

$$x_1 = x$$
$$x_2 = \dot{x}$$
$$x_3 = \ddot{x}$$

Also:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -a\ddot{x} - b\dot{x} + f(x) \\ \quad\; = f(x_1) - b x_2 - a x_3 \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ f(x_1) - b x_2 - a x_3 \end{pmatrix}$$

3. Vektorfeld mit Parameter:

$$\dot{x} = f(x, \lambda)$$

Dann

$$x_1 = x$$
$$x_2 = \lambda$$

Also:

$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_2)$$
$$\dot{x}_2 = 0$$

Bsp.: 1. $\dot{x} = ax$,

$x(0) = x_0$

Lsg: $\varphi(t) = e^{at} x_0, \quad t \in \mathbb{R}$

2. $\dot{x} = x^2 \qquad x(0) = x_0$

$$\varphi(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$

$x_0 \neq 0$: $t \to \frac{1}{x_0}$ wird Lsg unbeschr.

3. Gilt

$v(x_0) = 0$:

x_0 Gleichgewichtspunkt von v,

$\varphi(t) \equiv x_0$ konstante Lsg

Gleichgewichtslsg.

4. $\dot{x} = Ax \qquad x(0) = x_0$

$x = 0$ ist ein Gleichgewichtspunkt.

$\varphi(t) = e^{At} x_0$,

Beweis: Sei φ Lösung von

$$\dot{x} = v(x)$$

$$x(t_0) = x_0$$

dann ist

$$\psi = \varphi(\cdot + t_0) \text{ ebenfalls}$$

Lösung:

$$\dot{\psi}(t) = \dot{\varphi}(t + t_0)$$

$$= v(\varphi(t + t_0))$$

$$= v(\psi(t))$$

$$\psi(0) = \varphi(t_0) = x_0 .$$