16.6 Allgemeine Gleichungen

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall eines nicht diagonalisierbaren Operators A. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass A im Komplexen in eine Blockdiagonalgestalt $\operatorname{diag}(J_1, .., J_m)$ gebracht werden kann, die auf der Diagonalen aus elementaren Jordanblöcken besteht. Die Gestalt dieser *jordanschen Normalform* ist dabei bis auf die Anordnung der einzelnen Jordanblöcke eindeutig. Für unsere Zwecke ist diese Normalform allerdings zu detailliert. Es reicht die Existenz einer Zerlegung eines beliebigen Operators in einen halbeinfachen und einen nilpotenten Anteil.

Satz über die SN-Zerlegung *Jeder Operator $A \in L(V)$ besitzt im Komplexen eine eindeutige Zerlegung in zwei Operatoren $A = S + N$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *S ist im Komplexen diagonalisierbar,*

(ii) *N ist nilpotent, und*

(iii) *S und N kommutieren: $SN = NS$.* ⋊

Wir geben hier nur eine Skizze des Beweises. Ausgangspunkt ist der folgende Spektralzerlegungssatz. Dabei heißt eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ *invariant unter komplexer Konjugation*, wenn sie mit jedem Element auch dessen komplex Konjugiertes enthält.

16 **Reeller Spektralzerlegungssatz** *Sei $\sigma = \sigma_1 \cup .. \cup \sigma_m$ eine Zerlegung des Spektrums σ von $A \in L(V)$ in disjunkte, unter komplexer Konjugation invariante Teilmengen. Dann existiert eine unter A invariante Zerlegung $V = V_1 \oplus .. \oplus V_m$ des Vektorraumes V derart, dass*

$$\sigma(A \,|\, V_k) = \sigma_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Dabei ist die Dimension von V_k gleich der Summe der Vielfachheiten der in σ_k enthaltenen Eigenwerte. Bezüglich dieser Zerlegung besitzt A die Blockdiagonalgestalt

$$A = \operatorname{diag}(A_1, .., A_m) \tag{5}$$

mit $A_k := A \,|\, V_k$ für $1 \leqslant k \leqslant m$. ⋊

⟨⟨⟨⟨ *Beweisskizze zur SN-Zerlegung* Der Einfachheit halber seien alle Eigenwerte von A reell. Andernfalls betrachtet man zuerst A auf der Komplexifizierung von V und leitet aus der entsprechenden komplexen SN-Zerlegung die behauptete reelle Zerlegung ab. Die Details findet man zum Beispiel in Hirsch-Smale, Kapitel 6.

16.29

Seien $\lambda_1, .., \lambda_r$ die *verschiedenen* reellen Eigenwerte von A. Dann [16] existiert eine Zerlegung $V = V_1 \oplus .. \oplus V_r$ derart, dass

$$\sigma(A_k) = \{\lambda_k\}, \qquad A_k := A \,|\, V_k, \qquad k = 1, .., r.$$

Wir setzen dann

$$S_k := \lambda_k I, \qquad N_k := A_k - S_k.$$

Dann ist S_k halbeinfach und $A_k = S_k + N_k$. Ferner ist N_k nilpotent, da

$$\sigma(N_k) = \sigma(A_k - \lambda_k I) = \{0\}.$$

Mit $S = S_1 \oplus .. \oplus S_m$ und $N = N_1 \oplus .. \oplus N_m$ erhalten wir dann eine SN-Zerlegung von A mit den gewünschten Eigenschaften.

Bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Da S und N mit $A = S + N$ kommutieren, sind die Unterräume V_k auch unter S und N invariant. Also gilt

$$S_k := S \,|\, V_k : \; V_k \to V_k, \qquad N_k := N \,|\, V_k : \; V_k \to V_k,$$

sowie $A_k = S_k + N_k$. Wir behaupten, dass S_k auf V_k identisch ist mit $S'_k := \lambda_k I$. Setzen wir dazu $N'_k = A_k - S'_k$, so ist $S'_k + N'_k = A_k = S_k + N_k$ und damit

$$S_k - S'_k = N'_k - N_k.$$

Hierbei ist $S_k - S'_k$ halbeinfach, da jede Ähnlichkeitstransformation $S'_k = \lambda_k I$ unverändert lässt. Ferner ist N'_k nilpotent, da das Spektrum von N'_k nur die 0 enthält. Schließlich kommutieren N_k und N'_k, da N_k mit A_k und der Identität kommutiert. Aus der binomischen Formel für $(N'_k - N_k)^m$ mit m hinreichend groß folgt, dass dann auch $N'_k - N_k$ nilpotent ist.

Also ist $S_k - S'_k$ halbeinfach und nilpotent. Diese Eigenschaft hat aber nur der Nulloperator. Es ist also $S_k = S'_k$, und weiter $N'_k = N_k$. Da dies für jedes k gilt, ist die Eindeutigkeit der SN-Zerlegung gezeigt. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Die jordansche Normalform geht über die SN-Zerlegung hinaus, indem sie noch eine Aussage über die Normalform nilpotenter Operatoren macht. ⊸

Lemma *Ist $A = S + N$ eine SN-Zerlegung von A mit $N^{m+1} = 0$, so gilt*

$$\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^S \left(1 + N + .. + \frac{1}{m!} N^m\right). \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Da S und N kommutieren, gilt $\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{S+N} = \mathrm{e}^S \mathrm{e}^N$. Wegen $N^{m+1} = 0$ bricht die Exponenzialreihe von e^N spätestens nach dem m-ten Term ab. ⟩⟩⟩⟩⟩

Um die Gestalt der allgemeinen Lösung von $\dot{x} = Ax$ zu bestimmen, genügt es nun, jede Komponente $A_k = S_k + N_k$ der Zerlegung (5) einzeln zu betrachten.

Bezeichnet ν_k die Vielfachheit des k-ten Eigenwerts, so ist $N_k^{\nu_k} = 0$. Im reellen Fall folgt dies aus $\dim V_k = \nu_k$, im komplexen Fall aus der Tatsache, dass V_k aus der Reellifizierung zweier komplexer Unterräume der Dimension ν_k entsteht. Aufgrund des letzten Lemmas treten daher in $\mathrm{e}^{A_k t}$ nur Polynome vom Grad kleiner ν_k auf.

Wir formulieren den reellen und komplexen Fall wieder getrennt. Ein *Quasipolynom* ist ein Produkt aus einer Exponenzialfunktion und einem Polynom.

Reeller Fall *Der Operator $A \in L(V)$ habe nur reelle Eigenwerte $\lambda_1, .., \lambda_m$ mit Vielfachheiten $\nu_1, .., \nu_m$. Dann ist in einer beliebigen Basis jede Komponente einer Lösung von $\dot{x} = Ax$ eine Linearkombination aus Quasipolynomen*

$$p_k(t)\mathrm{e}^{\lambda_k t}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

wobei $\operatorname{grad} p_k < \nu_k$ *für alle* k. ⋊

Bemerkungen *a.* Sind alle Eigenwerte einfach, so ist $\nu_k = 1$ für alle k. Somit ist $k = n$, alle Polynome p_k sind konstant, und wir erhalten wieder den Satz für einfache reelle Eigenwerte 13.

b. Der maximale Grad von p_k kann kleiner als $\nu_k - 1$ sein. Dies hängt von der Jordanschen Normalform von A ab. Beispielsweise sind alle p_k konstant genau dann, wenn A halbeinfach ist. ⊸

17 **Allgemeiner Fall** *Der Operator $A \in L(V)$ habe die Eigenwerte*

$$\lambda_1, .., \lambda_r, \; \alpha_{r+1} \pm \mathrm{i}\omega_{r+1}, .., \alpha_m \pm \mathrm{i}\omega_m$$

mit Vielfachheiten $\nu_1, .., \nu_m$. Dann ist in einer beliebigen Basis jede Komponente einer Lösung von $\dot{x} = Ax$ eine Linearkombination aus den Quasipolynomen

$$p_k(t)\mathrm{e}^{\lambda_k t}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant r,$$

und den Funktionen

$$p_k(t)\mathrm{e}^{\alpha_k t}\cos\omega_k t, \quad q_k(t)\mathrm{e}^{\alpha_k t}\sin\omega_k t, \qquad r < k \leqslant m,$$

wobei $\operatorname{grad} p_k, \operatorname{grad} q_k < \nu_k$ *für alle* k. ⋊

Man beachte, dass im Unterschied zu den Ergebnissen für halbeinfache Operatoren *nicht jede* Linearkombination aus den genannten Funktionen eine Lösung darstellt.

Schlussfolgerungen

18 **Satz** *Das Spektrum von A liegt in der linken komplexen Halbebene genau dann, wenn*

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$$

für jede Lösung φ von $\dot{x} = Ax$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ $\Rightarrow$ Für ein Produkt r aus einem Polynom und einer trigonometrischen Funktion und $\alpha < 0$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\alpha t} r(t) = 0.$$

Da jede Komponente einer Lösung φ von $\dot{x} = Ax$ aufgrund des letzten Satzes aus einer Linearkombination solcher Funktionen besteht, gilt daher auch $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$.

$\Leftarrow$ Dies zeigen wir indirekt. Existiert wenigstens ein reeller oder komplexer Eigenwert $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\omega$ mit $\alpha \geqslant 0$, so existiert dazu auch wenigstens ein reeller oder komplexer Eigenvektor v und damit eine reelle oder komplexe Lösung $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v$ dieser Differenzialgleichung. Ihr Real- oder Imaginärteil liefert eine reelle Lösung φ, die für $t \to \infty$ *nicht* gegen Null konvergiert. ⟩⟩⟩⟩⟩

Satz *Das Spektrum von A liegt in der rechten komplexen Halbebene genau dann, wenn*

$$\lim_{t\to\infty} |\varphi(t)| = \infty$$

für jede Lösung φ von $\dot{x} = Ax$ außer der Gleichgewichtslösung. Es liegt auf der imaginären Achse genau dann, wenn

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \log|\varphi(t)| = 0$$

für jede Lösung φ von $\dot{x} = Ax$ außer der Gleichgewichtslösung. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Dies sei als Übung überlassen. ⟩⟩⟩⟩⟩

17

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

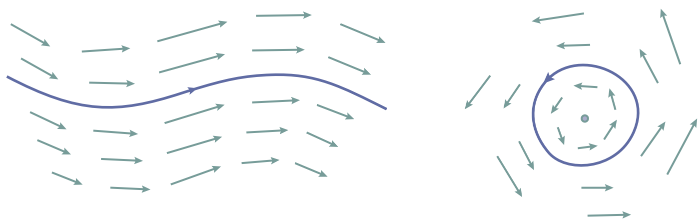
Wir betrachten nun allgemeine gewöhnliche Differenzialgleichungen erster Ordnung in endlich-dimensionalen Räumen von der Form

$$\dot{x} = v(x).$$

Anders als im Fall linearer Differenzialgleichungen gibt es hier in den meisten Fällen keine Darstellung von Lösungen mittels eines Exponenzials oder Ähnlichem, und sogar ihre Existenz oder Eindeutigkeit sind meist nicht evident.

Man benötigt daher allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitssätze. Für die Existenz reicht schon die Stetigkeit der rechten Seite, und für die Eindeutigkeit deren lokale Lipschitzstetigkeit. Diese zieht dann auch die stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten nach sich.

Abb 1 Zwei Vektorfelder und zwei Lösungskurven



17.1 Vektorfelder und Differenzialgleichungen

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum.

Definition *Ein Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega \subset V$ ist eine Abbildung*

$$v: \Omega \to V, \quad x \mapsto v(x). \quad ⋊$$

Ein Vektorfeld weist also jeden Punkt x im Definitionsbereich $\Omega \subset V$ einen Vektor $v(x)$ in *demselben* Vektorraum V zu. Daher definiert ein solches Feld eine *gewöhnliche Differenzialgleichung* auf Ω.

Definition *Ist $v: \Omega \to V$ ein Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega \subset V$, so heißt*

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

eine gewöhnliche, autonome Differenzialgleichung erster Ordnung auf Ω. Eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist eine stetig differenzierbare Kurve $\varphi: I \to \Omega$ derart, dass

$$\dot{\varphi}(t) = v(\varphi(t)), \qquad t \in I. \quad ⋊$$

Geometrisch bedeutet dies, dass der Geschwindigkeitsvektor der Kurve φ in jedem Punkt mit dem dortigen Vektor des Vektorfeldes v übereinstimmt. Die Menge Ω selbst bezeichnet man in diesem Zusammenhang auch als *Phasen-* oder *Konfigurationsraum* der Differenzialgleichung.

Bemerkungen *a.* Jede differenzierbare Lösung ist auch *stetig* differenzierbar, da die Ableitung ja die Differenzialgleichung erfüllt.

b. Die Differenzialgleichung (1) heißt *gewöhnlich*, da ihre Lösungen φ Funktionen *einer* Variable t sind, die üblicherweise als Zeit interpretiert wird. Auf der anderen Seite stehen die *partiellen* Differenzialgleichungen, die Funktionen

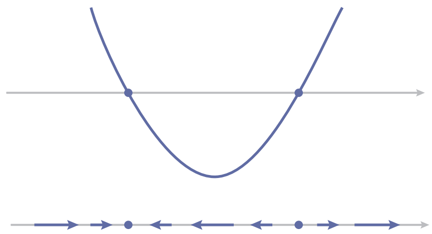


Abb 2

Eine skalare Funktion interpretiert als Vektorfeld

mehrerer Variablen und deren partielle Ableitungen betreffen. Sie heißt von *erster Ordnung*, da nur die erste Ableitung nach t involviert ist. Und sie heißt *autonom*, da das Vektorfeld v nicht explizit von t abhängt.

c. Im Standardfall des $\mathbb{R}^n$ ist (1) äquivalent zu einem System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1(x_1, .., x_n), \\ \dot{x}_2 &= v_2(x_1, .., x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= v_n(x_1, .., x_n), \end{aligned}$$

von n im Allgemeinen gekoppelten, nichtlinearen Differenzialgleichungen. ⊸

▹ A. Jede reelle Funktion $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$ definiert eine skalare Differenzialgleichung $\dot{x} = f(x)$ auf ihrem Definitionsbereich Abb 2. Das Polynom $f(x) = x^2$ zum Beispiel definiert die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = x^2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ihre allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$\varphi(t) = \frac{a}{1 - at}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und $at \neq 1$ – siehe Kapitel 11.

B. Ein linearer Operator $A \in L(V)$ definiert ein lineares Vektorfeld auf V, nämlich $A : x \mapsto Ax$. Die zugehörige Differenzialgleichung ist

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in V.$$

Ihre allgemeine Lösung ist, wie wir gesehen haben, gegeben durch

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{At} x_0, \qquad x_0 \in V. \quad ◃$$

Weitere Differenzialgleichungen

Wir beschränken uns hier auf *autonome* Differenzialgleichungen *erster* Ordnung. Für die Frage der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen beispielsweise ist dies jedoch keine wesentliche Einschränkung, da sich andere Typen von Differenzialgleichungen in diese Form bringen lassen. Wir geben drei Beispiele, das allgemeine Vorgehen ergibt sich daraus.

A. In Kapitel 11 haben wir nichtautonome Differenzialgleichungen

$$\dot{x} = f(t, x)$$

in einer Variablen betrachtet. Führen wir die Zeit als zusätzliche Koordinate x_0 ein und setzen $x_1 = x$, so ist dies äquivalent zu dem autonomen System

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= 1, \\ \dot{x}_1 &= f(x_0, x_1). \end{aligned}$$

B. Eine skalare Differenzialgleichung höherer Ordnung wird zu einem System von Differenzialgleichungen erster Ordnung, indem man die höheren Ableitungen als zusätzliche Koordinaten einführt. So ist

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} = f(x)$$

mit $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ und $x_3 = \ddot{x}$ äquivalent zu dem System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= f(x_1) - bx_2 - ax_3. \end{aligned}$$

C. Hängt ein Vektorfeld von Parametern ab, so kann man auch diese als zusätzliche Koordinaten einführen. So ist

$$\dot{x} = f(x, \lambda)$$

mit $x_1 = x$, $x_2 = \lambda$ äquivalent zu dem System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Damit werden Sätze über die Abhängigkeit von Lösungen von Parametern auf solche über die Abhängigkeit von Lösungen von Anfangswerten zurückgeführt.

17.4

Anfangswertprobleme

Bereits die Lösungen von elementaren Differenzialgleichungen sind nicht eindeutig, solange keine weiteren Daten vorgegeben werden. Dasselbe gilt natürlich auch hier. Eindeutigkeit kann man nur für *Anfangswertprobleme* erwarten.

Definition *Unter einem zu einem Vektorfeld v auf Ω gehörenden Anfangswertproblem – kurz Awp – versteht man das System*

$$\dot{x} = v(x), \qquad x(t_0) = x_0$$

mit einem $x_0 \in \Omega$. Eine lokale Lösung des Awps ist eine Lösung $\varphi\colon I_0 \to \Omega$ dieser Differenzialgleichung mit $t_0 \in I_0$ und $\varphi(t_0) = x_0$. ⋊

1 ⊳ A. Die Lösung von $\dot{x} = ax$, $x(0) = x_0$ auf der reellen Geraden ist

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{at}x_0.$$

Sie existiert für alle $t \in \mathbb{R}$.

B. Die Lösung von $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0$ ist

$$\varphi(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}.$$

Ist $x_0 \neq 0$, so ist diese für $t \to 1/x_0$ unbeschränkt und daher nicht für alle t definiert. Es gibt also keine *globale* Lösung.

C. Ist x_0 ein *kritischer Punkt* des Vektorfeldes v, das heißt,

$$v(x_0) = 0,$$

so besitzt das zugehörige Awp immer die für alle t erklärte triviale Lösung

$$\varphi(t) \equiv x_0.$$

Diese wird auch als *Gleichgewichtslösung* bezeichnet, der Punkt x_0 selbst als *Gleichgewichtspunkt*.

D. Das lineare Awp $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ besitzt die Lösung

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{At}x_0.$$

Der Nullpunkt ist hier immer ein Gleichgewichtspunkt. ⊲

Die Wahl des Anfangszeitpunktes t_0 ist bei *autonomen* Differenzialgleichungen unerheblich. Denn ist φ eine Lösung von $\dot{x} = v(x)$, so ist auch

$$\dot{\varphi}(t - t_0) = v(\varphi(t - t_0)).$$

Die zeitliche verschobene Kurve ist also ebenfalls eine Lösung, und wir können erreichen, dass $t_0 = 0$.

Für nichtlineare Anfangswertprobleme lässt sich nur in wenigen Fällen eine Lösung explizit angeben. Man kann sogar beweisen, dass Lösungen in den meisten Fällen nicht durch ›geschlossene Ausdrücke‹ dargestellt werden können. Man benötigt daher allgemeine *Existenzsätze*. Sehr allgemein ist der

2 **Existenzsatz von Peano** *Ist das Vektorfeld v stetig, so besitzt jedes zugehörige Anfangswertproblem wenigstens eine lokale Lösung.* ⋊

Diese Lösungskurve muss allerdings nicht eindeutig sein. So besitzt

$$\dot{x} = x^{2/3}, \qquad x(0) = 0$$

unendlich viele Lösungen 11.2.

Wir benötigen diesen Satz im Folgenden nicht. Daher skizzieren wir einen Beweis in einer Übungsaufgabe A-7. Im übernächsten Abschnitt beweisen wir einen Existenz- *und* Eindeutigkeitssatz, der wesentlich wichtiger ist.