23. Vorlesung 13.07.2021

Bew.: $\Rightarrow$ Sei φ Lsg von AWP.

$$\varphi(t) - x_0 = \varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^t \dot\varphi(s)\, ds = \int_0^t v(\varphi(s))\, ds$$

$\Leftarrow$ Nehme an, ... gilt für stetige φ.

Dann
$$\dot\varphi(t) = v(\varphi(s))\Big|_{s=t} = v(\varphi(t)), \quad t \in I$$

Außerdem
$$\varphi(0) = x_0. \qquad \blacksquare$$

Beweis: Setze

$$v(t) = a + b\int_0^t u(s)\,ds, \qquad 0 \le t \le T.$$

Ziel:

$$u(t) \le v(t), \qquad 0 \le t \le T.$$

Dann v stetig diff'bar, und

$$v'(t) = b\,u(t) \le b\,v(t) \quad (b \ge 0)$$

Also $v' \le bv$ $\Longrightarrow$

$$(v e^{-bt})' = v' e^{-bt} + v(-b) e^{-bt} = (v' - bv)\, e^{-bt} \le 0$$

Also $v e^{-bt}$ monoton fallend:

$$v(t) e^{-bt} \le v(t) e^{-bt}\Big|_{t=0} = v(0) = a$$

$$\Longrightarrow \quad u(t) \le v(t) \le a e^{bt}. \qquad \blacksquare$$

Beweis: Eindeutigkeit: Seien p und q Fixpunkte:

$$T(p) = p, \quad T(q) = q.$$

Dann

$$\|p-q\| = \|T(p) - T(q)\| \leq \theta \cdot \|p-q\|, \quad \theta < 1$$

also:

$$\underbrace{(1-\theta)}_{>0} \cdot \|p-q\| \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad p = q$$

Existenz: Wähle $x_0 \in X$ und setze

$$x_n = T^n(x_0), \quad n \geq 0$$

(also $x_n = T(x_{n-1})$ für $n \geq 1$).

Grundidee:

$$x_n \in X$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \theta \cdot \|x_n - x_{n-1}\|$$

$$\leq \theta^n \|x_1 - x_0\|.$$

Also: $m > n \geq 0$:

$$\|x_m - x_n\| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\|$$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} \theta^k \, \|x_1 - x_0\|$$

$$= \frac{\theta^n}{1-\theta} \, \|x_1 - x_0\| .$$

Also: $(x_n)_{n \geq 0}$ ist eine CF.

Da E Banachraum: $x_n \longrightarrow p \in E$, $n \to \infty$.

Da $X \subset E$ abgeschlossen: $p \in X$.

p ist Fixpunkt:

$$\| \underbrace{T(x_n)}_{x_{n+1}} - x_n \| \leq \theta^n \, \|x_1 - x_0\|$$

$n \to \infty$:

$$\| T(p) - p \| \leq 0$$

Also: $T(p) = p$. $\blacksquare$

Bew.: Wir nehmen an:

φ, ψ zwei Lösg auf $I \ni 0$

Dann Integralgleichung:

$$(\varphi - \psi)(t) = \int_0^t \underbrace{\{v(\varphi(s)) - v(\psi(s))\}}\,ds, \quad t \in I.$$

$t \geq 0$: Dann:

$$\|(\varphi - \psi)(t)\| \leq \int_0^t \| \qquad \| \,ds$$

$$\leq \int_0^t L \cdot \|\varphi(s) - \psi(s)\| \,ds$$

$$\leq L \cdot \int_0^t \|\varphi(s) - \psi(s)\| \,ds.$$

Setze: $u(t) = \|(\varphi - \psi)(t)\| \geq 0$:

$$0 \leq u(t) \leq L \cdot \int_0^t u(s)\,ds$$

$$\Longrightarrow \quad u \equiv 0 \iff \varphi = \psi, \quad t \geq 0.$$

$t \leq 0$ genauso: G. ∎

Beweis: Wir schreiben $\dot{x} = v(x)$, $x(0) = x_0$

als

$$\varphi(t) = x_0 + \int_0^t v(\varphi(s))\,ds \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Fixpunktgleichung für einen Operator T.

Sei L globale Lip. von v.

$$E = \{ \varphi \in C(\mathbb{R}, U) : \|\varphi\|_L < \infty \}$$

wobei:
$$\|\varphi\|_L := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varphi(t)\| e^{-2L|t|}$$

$(E, \|\cdot\|_L)$ ist ein Banachraum.

Def:

$$X = \{ \varphi \in E : \varphi(0) = x_0 \}$$

$\subset E$ abgeschlossen in E.

Def:

$$(T\varphi)(t) = x_0 + \int_0^t v(\varphi(s))\,ds .$$

2. T ist wohldefiniert, und $T : X \to X$:

Sei $\varphi \in E$, dann $\psi = T\varphi$ ist eine stetige Kurve in U mit $\psi(0) = x_0$.

Zu zeigen: $\|\psi\|_L < \infty$, Dann $\psi \in E$ und $\psi \in X$.

$$\|\psi(t) - x_0\| \leq \int_0^{|t|} \|v(\varphi(s))\| \, ds$$

$$\leq \int_0^{|t|} \left\{ \|v(\varphi(s)) - v(x_0)\| + \|v(x_0)\| \right\} ds$$

$$\leq \int_0^{|t|} \left\{ L \|\varphi(s) - x_0\| + \|v(x_0)\| \right\} ds$$

$\varphi \in X$: $\leq \|\varphi - x_0\|_L \, e^{2L|s|}$

$$\leq \int_0^{|t|} \|\varphi - x_0\|_L \, L e^{2Ls} \, ds + |t| \, \|v(x_0)\|$$

$$\leq \|\varphi - x_0\|_L \, e^{2L|t|} + |t| \cdot \|v(x_0)\| .$$

$$\|\varphi(t) - x_0\| \leq \|\varphi - x_0\|_C \, e^{2L|t|} + |t| \cdot \|f(x_0)\| .$$

Proof:

$$\|\varphi - x_0\|_C = \sup_t \|\varphi(t) - x_0\| \, e^{-2L|t|}$$

$$\leq \|\varphi - x_0\|_C + C$$

$$< \infty .$$

Deduce: $\varphi \in X$.

Also: $T : X \to X$.

2. T ist kontraktiv auf X:

Seien $\varphi, \psi \in X$:

$$\|(T\varphi - T\psi)(t)\|$$

$$\leq \int_0^t \|v(\varphi(s)) - v(\psi(s))\| \, ds$$

$$\leq L \cdot \int_0^t \|\varphi(s) - \psi(s)\| \, ds$$

$$\leq \|\varphi - \psi\|_L \cdot L \cdot \underbrace{\int_0^t e^{2Ls} \, ds}_{\frac{1}{2L}\left(e^{2Lt} - \cancel{1}\right)}$$

$$\leq \frac{1}{2} \|\varphi - \psi\|_L \, e^{2Lt}$$

Also:

$$\|T\varphi - T\psi\|_L \leq \frac{1}{2} \|\varphi - \psi\|_L .$$

3. Also ist T kontraktiv auf X, hat also einen (eindeutigen) Fixpunkt in X.

Dies ist Lösung des AWPs

Bsp: Für jede Startfunktion: $\varphi_0 \in X$:

$$T^n \varphi_0 \longrightarrow \varphi \,, \quad n \to \infty$$

z.B.:

$$\varphi_0 \equiv x_0$$

Bsp: $\dot{x} = Ax$ auf U

$v(x) = Ax$:

$v: U \to U$

Lipschitz mit $L = \|A\|$.

Sei nun $\varphi_0 = x_0$.

$$\varphi_1(t) = (T\varphi_0)(t)$$

$$= x_0 + \int_0^t A\underbrace{\varphi_0(s)}_{x_0}\,ds$$

$$= x_0 + At\cdot x_0.$$

$$\varphi_2(t) = x_0 + \int_0^t A\varphi_1(s)\,ds$$

$$= x_0 + Atx_0 + \frac{1}{2}A^2t^2x_0.$$

Generalisation:

$$\varphi_n(t) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k t^k}{k!}\right) x_0$$

$$\varphi(t) = \left(\sum_{k\geq 0} \frac{A^k t^k}{k!}\right) x_0 = e^{At}x_0.$$

$\square$

$$\varphi(t, x_0) = \varphi^t(x_0) = \varphi_{x_0}(t).$$

Alternatively:

$$\varphi^t(x_0) = x_0 + \int_0^t v(\varphi^s(x_0))\, ds.$$

Proof: $t \geq 0$

$$\underbrace{\|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)\|}_{u(t)} \leq \|x-y\| + \int_0^t \|v(\varphi^s(x)) - v(\varphi^s(y))\|\, ds$$

$$\leq \|x-y\| + L \int_0^t \underbrace{\|\varphi^s(x) - \varphi^s(y)\|}_{u(s)\ \geq 0}\, ds$$

Then:

$$u(t) \leq \|x-y\| + L \int_0^t u(s)\, ds$$

Gronwall:

$$u(t) \leq \|x-y\|\, e^{Lt}, \quad t \geq 0.$$

Bem.:

1. i. A. nicht verbesserbar:

$$\dot{x} = ax \quad : \quad e^{at} x_0$$

$$|\varphi^t(x_0) - \underbrace{\varphi^t(0)}_{=0}| = e^{at} |x_0| .$$

2. Fehler AW:

auf endlichen Zeitintervallen

(aber für $t \to \infty$)

beliebig kleine Änderung der AW

kann bzw. große Änderung für t

führen: „empfindliche Abh. von den Anfangswerten"

Stichwort: Chaos.

3. Betrachte kompakte Zeitintervall $[0,T]$:

Dann:

$$\|\varphi_x - \varphi_y\|_{C[0,T]} = \sup_{t\in[0,T]} \|\varphi_x(t) - \varphi_y(t)\|$$

$$\le M \cdot \|x-y\|,$$

$$M = e^{L(T-0)}.$$

4. Mit Norm $\|\cdot\|_L$:

(L1) $\|\varphi_x - \varphi_y\|_L \le \|x-y\|$

auf ganz $\mathbb{R}$.

Also:

$$I : U \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto \varphi_x$$

ist Lipschitz bzgl. $\|\cdot\|_L$ mit Konst. 1.

Kein Widerspruch zu 2., da in $\|\cdot\|_L$ exponentielle Gewichte. ☺