## 17.2 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Für den allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz benötigen wir einige technische Hilfsmittel. Wir beginnen mit der Umformulierung des Problems in eine *Integralgleichung*. Letztere ist analytisch wesentlich leichter zu handhaben. Insbesondere können wir hierauf den Banachschen Fixpunktsatz anwenden.

### ▪ Die Integralgleichung

3 **Lemma I** *Sei $v\colon \Omega \to V$ ein stetiges Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega$. Dann ist $\varphi\colon I \to \Omega$ eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{x} = v(x), \qquad x(0) = x_0$$

*genau dann, wenn $\varphi$ stetig ist und die Integralgleichung*

$$\varphi(t) = x_0 + \int_0^t v(\varphi(s))\,\mathrm{d}s$$

*für alle $t \in I$ erfüllt.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist $\varphi$ Lösung des Awps, so folgt aus dem Hauptsatz 13.6

$$\begin{aligned}\varphi(t) - x_0 &= \varphi(t) - \varphi(0)\\ &= \int_0^t \dot{\varphi}(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t v(\varphi(s))\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Gilt umgekehrt diese Gleichung für ein stetiges $\varphi$, so ist wiederum aufgrund des Hauptsatzes $\varphi$ auch differenzierbar, und es ist

$$\dot{\varphi}(t) = v((\varphi(t)).$$

Außerdem ist offensichtlich $\varphi(0) = x_0$. ⟩⟩⟩⟩⟩

### ▪ Das Lemma von Gronwall

Dieses Lemma spielt bei der Untersuchung von gewöhnlichen Differenzialgleichungen eine zentrale Rolle.

4 **Lemma von Gronwall** *Ist $u\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ stetig und gilt*

$$u(t) \leqslant a + b\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

*mit reellen Konstanten $a$ und $b$, wobei $b \geqslant 0$, so gilt*

$$u(t) \leqslant a\mathrm{e}^{bt}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Setze

$$v(t) \coloneqq a + b\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Dann ist $v$ stetig differenzierbar und $u \leqslant v$ auf $[0,T]$ nach Voraussetzung. Wegen $b \geqslant 0$ gilt dann auch $v' = bu \leqslant bv$ und folglich

$$(v\mathrm{e}^{-bt})' = (v' - bv)\mathrm{e}^{-bt} \leqslant 0.$$

Die Funktion $v\mathrm{e}^{-bt}$ ist also monoton fallend auf $[0,T]$ und daher

$$v(t)\mathrm{e}^{-bt} \leqslant v(t)\mathrm{e}^{-bt}\Big|_{t=0} = v(0) = a, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Somit ist auch $u(t) \leqslant v(t) \leqslant a\mathrm{e}^{bt}$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Im Fall $a = 0$ erhalten wir folgendes

5 **Korollar** *Ist $u\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ stetig und gilt*

$$0 \leqslant u(t) \leqslant b\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

*mit einer reellen Zahl $b \geqslant 0$, so ist $u \equiv 0$.* ⋊

## ▪ Banachscher Fixpunktsatz

Der letzte Hilfssatz ist tatsächlich ein fundamentales und mächtiges Werkzeug der Funktionalanalysis.

6 **Banachscher Fixpunktsatz** *Sei $X \subset E$ eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraums $E$. Ist $T\colon X \to X$ eine Kontraktion – das heißt, $\theta$-Lipschitz mit $\theta < 1$ – so besitzt $T$ in $X$ genau einen Fixpunkt.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ *Eindeutigkeit:* Sind $p$ und $\tilde{p}$ zwei Fixpunkte von $T$ in $X$, so folgt

$$\|p - \tilde{p}\| = \|T(p) - T(\tilde{p})\| \leqslant \theta\,\|p - \tilde{p}\|,$$

also $(1-\theta)\,\|p - \tilde{p}\| \leqslant 0$. Wegen $1 - \theta > 0$ impliziert dies $\|p - \tilde{p}\| = 0$. Also ist der Fixpunkt in $X$ eindeutig.

*Existenz:* Wähle irgendeinen Punkt $x_0 \in X$ und setze

$$x_n = T^n(x_0), \qquad n \geqslant 1,$$

wobei $T^n$ die $n$-fache Anwendung des Operators $T$ bezeichnet. Mit Induktion folgt $x_n \in X$ für alle $n \geqslant 0$ sowie

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \theta\,\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \theta^n\,\|x_1 - x_0\|, \qquad n \geqslant 0. \tag{2}$$

Für $m > n \geqslant 0$ folgt hieraus

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &\leqslant \sum_{i=n}^{m-1} \|x_{i+1} - x_i\| \\ &\leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \theta^i \|x_1 - x_0\| = \frac{\theta^n}{1-\theta} \|x_1 - x_0\| . \end{aligned} \tag{3}$$

Somit bildet $(x_n)$ eine Cauchyfolge in $X$. Aufgrund der Vollständigkeit von $E$ besitzt diese Cauchyfolge einen Grenzwert $p \in E$, und aufgrund der Abgeschlossenheit von $X$ gehört dieser ebenfalls zu $X$. Dieser Grenzwert ist ein Fixpunkt von $T$, denn (2) ist äquivalent mit

$$\|T(x_n) - x_n\| \leqslant \theta^n \|x_1 - x_0\| , \qquad n \geqslant 0,$$

und mit $x_n \to p$ und der Stetigkeit von $T$ erhalten wir $\|T(p) - p\| = 0$. Damit ist alles gezeigt. ⟫⟫⟫

Der Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes liefert nicht nur die Existenz des Fixpunktes, sondern gleichzeitig auch ein schnell konvergierendes Konstruktionsverfahren einschließlich Fehlerabschätzung.

7 **Zusatz zum Banachschen Fixpunktsatz** *Jede Folge $x_n = T^n(x_0)$ mit beliebigem Startwert $x_0 \in X$ konvergiert gegen den eindeutigen Fixpunkt $p$ von $T$, und es gilt*

$$\|x_n - p\| \leqslant \frac{\theta^n}{1-\theta} \|x_1 - x_0\| . \qquad \rtimes$$

⟪⟪⟪ Dies folgt aus (3) mit $m \to \infty$ und $x_m \to p$. ⟫⟫⟫

## ▪ Eindeutigkeit

Wir wollen die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Awps

$$\dot{x} = v(x), \qquad x(0) = x_0$$

für lipschitzstetige Vektorfelder $v$ zeigen. Wie so oft, ist die Eindeutigkeit der leichtere Teil. Daher erledigen wir dies zuerst.

8 **Satz** *Ist $v : V \hookrightarrow V$ lipschitzstetig, so ist jede Lösung des obigen Anfangswertproblems auf ihrem Existenzintervall eindeutig.* $\rtimes$

⟪⟪⟪ Seien $\varphi, \psi$ zwei auf demselben Intervall $I$ um $0$ definierte Lösungen desselben Awps. Dann erfüllen beide die zugehörige Integralgleichung von Lemma I 3, so dass

$$(\varphi - \psi)(t) = \int_0^t [v(\varphi(s)) - v(\psi(s))]\,\mathrm{d}s, \qquad t \in I.$$

Für $t > 0$ folgt mit einer Lipschitzkonstanten $L$ für $v$ die Abschätzung

$$\|(\varphi - \psi)(t)\| \leqslant \int_0^t \|v(\varphi(s)) - v(\psi(s))\| \,\mathrm{d}s \leqslant L \int_0^t \|(\varphi - \psi)(s)\| \,\mathrm{d}s.$$

Für die stetige Funktion $u(t) = \|(\varphi - \psi)(t)\|$ gilt somit

$$0 \leqslant u(t) \leqslant L \int_0^t u(s) \,\mathrm{d}s.$$

Mit dem Korollar zum Lemma von Gronwall 5 folgt

$$\|(\varphi - \psi)(t)\| = 0, \qquad t \in I \cap [0, \infty).$$

Für $t \in I \cap (-\infty, 0]$ gilt Entsprechendes. Also ist $\varphi = \psi$ auf $I$. »»»

## ▪ Existenz

Für den Existenzbeweis gehen wir nun davon aus, dass das Vektorfeld $v$ *auf ganz $V$ erklärt und gleichmäßig lipschitzstetig* ist. Dies vermeidet technische Komplikationen, da Lösungen in endlicher Zeit nicht unbeschränkt werden können. Den allgemeinen Fall führen wir später auf diesen zurück.

9 **Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz** *Ist das Vektorfeld $v$ gleichmäßig lipschitz auf ganz $V$, so besitzt jedes Anfangswertproblem eine für alle Zeiten definierte eindeutige Lösung.* ⋊

««« Wir schreiben das zu lösende Awp als Integralgleichung 3

$$\varphi(t) = x_0 + \int_0^t v(\varphi(s)) \,\mathrm{d}s, \qquad t \in \mathbb{R},$$

für die Kurve $\varphi$. Diese fassen wir als Fixpunktgleichung eines Operators $T$ auf einem Raum $E$ stetiger Kurven auf.

Sei dazu $L$ eine globale Lipschitzkonstante von $v$ und

$$E = \{\varphi \in C(\mathbb{R}, V) : \|\varphi\|_L < \infty\}$$

der Raum aller stetigen Kurven $\varphi : \mathbb{R} \to V$ mit endlicher *gewichteter Norm*

$$\|\varphi\|_L \coloneqq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varphi(t)\| \,\mathrm{e}^{-2L|t|}.$$

Eine Cauchyfolge in dieser Norm konvergiert gleichmäßig auf jedem beschränkten $t$-Intervall $I$. Daher bildet $E$ mit dieser Norm einen Banachraum A-1. Die Teilmenge aller solcher Kurven mit Anfangswert $x_0$,

$$X = \{\varphi \in E : \varphi(0) = x_0\},$$

ist abgeschlossen in $E$. Definieren wir den Operator $T$ auf $X$ durch

$$(T\varphi)(t) = x_0 + \int_0^t v(\varphi(s))\,\mathrm{d}s, \qquad t \in \mathbb{R},$$

so ist $\varphi$ eine Lösung des Awps genau dann, wenn $\varphi \in X$ und $T\varphi = \varphi$.

Wir zeigen die Existenz eines solchen Fixpunkts mithilfe des Banachschen Fixpunktsatzes $_6$. Zwei Dinge sind hierfür zu zeigen.

*a. $T$ ist wohldefiniert und bildet $X$ in sich ab* Offensichtlich ist $\psi = T\varphi$ eine stetige Kurve in $V$ mit $\psi(0) = x_0$. Damit $\psi$ auch wieder zu $X$ gehört, müssen wir $\|\psi\|_L < \infty$ zeigen. — Nun ist

$$\begin{aligned}
\|\psi(t) - x_0\| &\leqslant \int_0^{|t|} \|v(\varphi(s))\|\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_0^{|t|} (\|v(\varphi(s)) - v(x_0)\| + \|v(x_0)\|)\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_0^{|t|} (L\,\|\varphi(s) - x_0\| + \|v(x_0)\|)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Ferner ist $\|\varphi(s) - x_0\| \leqslant \|\varphi - x_0\|_L\,\mathrm{e}^{2L|s|}$ aufgrund der Definition von $\|\cdot\|_L$. Zusammen mit der groben Abschäzung

$$\int_0^{|t|} L\mathrm{e}^{2Ls}\,\mathrm{d}s \leqslant \mathrm{e}^{2L|t|}$$

erhalten wir

$$\|\psi(t) - x_0\| \leqslant \|\varphi - x_0\|_L\,\mathrm{e}^{2L|t|} + |t|\,\|v(x_0)\|\,.$$

Also ist

$$\|\psi - x_0\|_L = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\psi(t) - x_0\|\,\mathrm{e}^{-2L|t|} < \infty,$$

und damit $\psi \in X$.

*b. $T$ ist eine Kontraktion auf $X$* Seien $\varphi, \psi \in X$. Aufgrund der Integralgleichung gilt dann

$$\begin{aligned}
\|(T\varphi - T\psi)(t)\| &\leqslant \int_0^{|t|} \|v(\varphi(s)) - v(\psi(s))\|\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_0^{|t|} L\,\|\varphi(s) - \psi(s)\|\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \|\varphi - \psi\|_L \int_0^{|t|} L\mathrm{e}^{2Ls}\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{1}{2}\,\|\varphi - \psi\|_L\,\mathrm{e}^{2L|t|}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\|T\varphi - T\psi\|_L = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|(T\varphi - T\psi)(t)\|\,\mathrm{e}^{-2L|t|} \leqslant \frac{1}{2}\,\|\varphi - \psi\|_L\,.$$

17.11

Somit ist $T\colon X \to X$ eine Kontraktion mit dem Faktor $1/2$.

*Schluss* Somit ist der Banachsche Fixpunktsatz 6 anwendbar, und $T$ besitzt einen eindeutigen Fixpunkt $\varphi \in X$. Dieser ist die gesuchte Lösung des Awps. Deren Eindeutigkeit hatten wir bereits gezeigt 8. ⟫⟫

Der Banachsche Fixpunktsatz liefert mit seinem Zusatz 7 zugleich ein Verfahren zur *Konstruktion* eines Fixpunktes von $T$. Dieser ist Grenzwert der Folge $T^n\varphi_0$ zu einem beliebigen Startwert $\varphi_0 \in X$. Im Zusammenhang mit gewöhnlichen Differenzialgleichungen ist dies bekannt als das *Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf*.

10 **Satz von Picard-Lindelöf** *Sei $v$ ein lipschitzstetiges Vektorfeld auf $V$. Dann ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{x} = v(x), \qquad x(0) = x_0,$$

*der Limes der Folge von Kurven*

$$\varphi_n = T^n\varphi_0, \qquad n \geqslant 1,$$

*mit $\varphi_0 \equiv x_0$ und*

$$(T\varphi)(t) = x_0 + \int_0^t v(\varphi(s))\,\mathrm{d}s, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

*Diese Folge konvergiert gleichmäßig auf jedem kompakten Zeitintervall.* ⋊

⟪⟪ Der Zusatz zum Banachschen Fixpunktsatz 7 sagt aus, dass für jeden beliebigen Startwert $\varphi_0 \in X$ die Folge $(T^n\varphi_0)_{n\geqslant 0}$ in der Norm des Banachraumes $E$ gegen den Fixpunkt $\varphi \in X$ von $T$ konvergiert. Ein solcher Startwert ist zum Beispiel die konstante Kurve $\varphi_0 \equiv x_0$, und Konvergenz in der Norm $\|\cdot\|_L$ impliziert gleichmäßige Konvergenz auf jedem kompakten $t$-Intervall. ⟫⟫

▷ Jedes lineare Vektorfeld $A\colon x \mapsto Ax$ ist global lipschitzstetig, die vorangehenden Sätze sind also anwendbar. Wenden wir das Picard-Lindelöfsche Iterationsverfahren auf das zugehörige Awp an, so erhalten wir $\varphi_0(t) \equiv x_0$,

$$\varphi_1(t) = x_0 + \int_0^t A\varphi_0(s)\,\mathrm{d}s = x_0 + tAx_0,$$
$$\varphi_2(t) = x_0 + \int_0^t A\varphi_1(s)\,\mathrm{d}s = x_0 + tAx_0 + \frac{1}{2}t^2A^2x_0,$$

und allgemein mit Induktion

$$\varphi_n(t) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}A^k\right)x_0.$$

Im Limes erhält man die Lösung $\varphi(t) = \mathrm{e}^{At}x_0$, wobei wir aufgrund des letzten Satzes bereits wissen, dass diese Reihe auf jedem kompakten $t$-Intervall gleichmäßig konvergiert. ◅

## Der nichtautonome Fall

Die Beweise der letzten drei Sätze bleiben *unverändert* gültig, wenn das Vektorfeld zusätzlich stetig von der Zeit $t$ abhängt. Lipschitzstetigkeit in $t$ ist *nicht* erforderlich, wir müssen lediglich verlangen, dass die Lipschitzstetigkeit in der Ortsvariablen $x$ gleichmäßig für alle $t$ gilt.

11 **Zusatz** *Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz* $_9$ *und der Satz von Picard-Lindelöf* $_{10}$ *gelten ebenfalls für nichtautonome Vektorfelder*

$$v : \mathbb{R} \times V \to V, \quad (t, x) \mapsto v(t, x),$$

*die stetig in der Zeitvariable und gleichmäßig lipschitzstetig in der Ortsvariable in dem Sinne sind, dass es ein* $L \geqslant 0$ *gibt, so dass*

$$\|v(t, x) - v(t, y)\| \leqslant L \|x - y\|$$

*für alle* $x, y \in V$ *und* $t \in \mathbb{R}$. ⋊

## Stetige Abhängigkeit

Bis jetzt haben wir die Lösungen eines Anfangswertproblems als individuelle Kurven betrachtet, also als Funktionen nur von $t$. Nun betrachten wir sie auch als Funktion des Anfangswerts $x_0$. Dies machen wir sichtbar, indem wir $\varphi^t(x_0)$ oder $\varphi_{x_0}(t)$ für die Lösung zum Anfangswert $x_0$ schreiben. Die Integralgleichung $_3$ lautet damit

$$\varphi^t(x_0) = x_0 + \int_0^t v(\varphi^s(x_0))\,\mathrm{d}s$$

für $t$ im Existenzintervall der Kurve.

12 **Stetigkeitssatz** *Sei* $v$ *ein* $L$*-lipschitzstetiges Vektorfeld auf ganz* $V$. *Für seine Lösungskurven gilt dann*

$$\|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)\| \leqslant \mathrm{e}^{L|t|} \|x - y\|$$

*für alle* $t \in \mathbb{R}$ *und alle* $x, y \in V$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Aus den Integralgleichungen für $\varphi^t(x)$ und $\varphi^t(y)$ folgt für $t \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
&\|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)\| \\
&\qquad \leqslant \|x - y\| + \int_0^t \|v(\varphi^s(x)) - v(\varphi^s(y))\| \, \mathrm{d}s \\
&\qquad \leqslant \|x - y\| + L \int_0^t \|\varphi^s(x) - \varphi^s(y)\| \, \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Wenden wir das Lemma von Gronwall $_4$ auf $u(t) = \|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)\|$ an, so erhalten wir die Behauptung für $t \geqslant 0$. Den Fall $t \leqslant 0$ führt man hierauf zurück. ⟩⟩⟩⟩⟩

*Bemerkungen* *a.* Das exponenzielle Anwachsen der oberen Schranke ist im Allgemeinen nicht zu verbessern. Für die Lösungen von $\dot{x} = ax$ auf $\mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gilt ja bereits

$$\left|\varphi^t(x_0) - \varphi^t(0)\right| = |\mathrm{e}^{at}x_0 - \mathrm{e}^{at}0| = \mathrm{e}^{at}\,|x_0 - 0| \,.$$

Entsprechendes gilt, wenn man lineare Differenzialgleichungen $\dot{x} = Ax$ mit Diagonalmatrizen $A$ betrachtet.

*b.* Fixieren wir die Anfangswerte von Lösungen und betrachten *beliebige* Zeitintervalle, so können noch so kleine Abstände exponenzial anwachsen. Dies ist der sogenannte *Effekt der empfindlichen Abhängigkeit von den Anfangswerten*, der in vielen Systemen beobachtet werden kann.

*c.* Fixieren wir dagegen ein *kompakten* Zeitintervall $[a, b]$ um $0$, so hängen die Lösungen *gleichmäßig* vom Anfangswert ab. Denn es gilt ja

$$\|\varphi_x - \varphi_y\|_{[a,b]} = \sup_{t \in [a,b]} \|\varphi_x(t) - \varphi_y(t)\| \leqslant M \, \|x - y\|$$

mit $M = \mathrm{e}^{L(b-a)}$. Auf einem beschränkten Zeitintervall ist der Abstand verschiedener Lösungskurven also gleichmäßig klein, wenn nur ihre Anfangswerte hinreichend kleinen Abstand haben.

*d.* Mit der im Beweis des Existenzsatzes $_9$ eingeführten Norm $\|\varphi\|_L$ folgt aus dem Stetigkeitssatz auch

$$\|\varphi_x - \varphi_y\|_L \leqslant \|x - y\| \,,$$

Der Operator

$$I : \ V \to E, \quad x \mapsto \varphi_x,$$

der jedem Anfangswert in $x \in V$ seine entsprechende Lösungskurve $\varphi_x \in E$ zuordnet, ist also *lipschitzstetig* bezüglich $\|\cdot\|_L$. ⊸

17.14