24. Vorlesung 15.7.2021

Beweis: $\Phi(t,x)$ ist Lsg von

$$\dot{x} = v(x), \quad \Phi(0,x) = x.$$

Also:

$$\Phi(0,x) = x, \quad x \in U. \checkmark$$

Zeige: $\Phi(t+s,x) = \Phi(t, \Phi(s,x))$

Fasse beide auf als Fkt. t:

$t = 0$: $\Phi(s,x) = \Phi(0, \Phi(s,x)) = \Phi(s,x)$ $\checkmark$

Ableit. nach t:

$$\dot{\Phi}(t+s,x) = v(\Phi(t+s,x))$$

und

$$\dot{\Phi}(t,\Phi(s,x)) = v(\Phi(t,\Phi(s,x))).$$

Also wg. EE müssen beide gleich sein. $\square$

Beweis:

$$\Phi^t \circ \Phi^{-t} = \Phi^{t-t} = \Phi^0 = id = \Phi^{-t+t} = \Phi^{-t} \circ \Phi^t$$

Also: Φ^t invertierbar, und

$(\Phi^t)^{-1} = \Phi^{-t}$. Folg.

Bsp: Homomorphismus:

$$\Phi : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n), \circ)$$

$$t \longmapsto \Phi^t$$

Dynamisches System mit kontinuierlicher Zeit.

Bsp: DGL: $\Phi^t = e^{At}$

Claim:

$$\dot{\Phi}^t(x) = v(\Phi^t(x))$$

Hypothesis: Φ is C^1:

$$D(\dot{\Phi}^t(x)) = \underbrace{(D\Phi^t(x))^{\cdot}}$$

$$= D(v(\Phi^t(x)))$$

$$= \underbrace{Dv(\Phi^t(x))} \cdot D\Phi^t(x)$$

x fixed: $=: \underbrace{A(t) \cdot D\Phi^t(x)}$

Then: Let $\Lambda(t) = D\Phi^t(x)$:

$$\dot{\Lambda} = A(t)\,\Lambda.$$

At 0: $\Phi^0 = id$, so

$$D\Phi^0 = \Lambda(0) = I.$$

Beweis:

$$A(t) = Dv\,(\Phi^t(x))\,, \quad x \text{ fest}$$

Also:

$$A : \mathbb{R} \longrightarrow L(U) \quad \text{stetig}$$

Dv ist L-Lipschitz:

$$\|A(t)\| \leq L \quad \text{für alle } t:$$

Also $A(t)$ global Lipschitz in $L(U)$

2. z.z.:

$$\Lambda(t) = D\Phi^t(x)$$

Basis: $r = 1$. ✓

Sei also $v \in C^{r+1}$.

Betrachte

$$\dot{x} = v(x)$$

$$\dot{u} = Dv(x)\, u$$

Vektorfeld ist C^r

$$w : U \times U \longrightarrow U \times U$$

$$(x,u) \longmapsto \begin{pmatrix} v(x) \\ Dv(x)\, u \end{pmatrix}$$

(IA: Fluss von w ist C^r:

$$\varphi^t(x,u) = \begin{pmatrix} \Phi^t(x) \\ D\Phi^t(x)\, u \end{pmatrix} \text{ ist } C^r$$

Also: $D\Phi^t(x)$ ist C^r

Also: Φ^t ist C^{r+1}. ∎

Bsp. 1. $\dot{x} = x^2$ auf $\mathbb{R}$

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}, \quad x_0 \neq 0$$

existiert nicht für alle t.

2. $\dot{x} = \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$

$$x(t) = \sqrt[3]{3t+1}$$

erreicht den Rand des Def. in endlicher Zeit.

Bsp: 1. x^2 ist lokal Lip. auf $\mathbb{R}$.

2. Jede C^1-Fkt auf einem Gebiet ist lokal Lipschitz: $\| Dv(x) \|$ stetig

3. $v(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ist nicht lokal Lip. bei 0.

Bew: Sei $K \subset \Omega$ kompakt.

Angenommen, v nicht Lipschitz auf K.

Dann gibt es zu jedem $n \geq 1$ Punkte $x_n, y_n \in K$:

$$\frac{\|v(x_n) - v(y_n)\|}{\|x_n - y_n\|} \geq n$$

Also:

$$\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n} \|v(x_n) - v(y_n)\|$$

$$(*) \qquad \leq \frac{1}{n} \cdot 2 \cdot \underbrace{\sup_{x \in K} \|v(x)\|}_{}$$

$$\leq \frac{2M}{n}.$$

Da K kompakt: konvergente Teilfolge

$$\tilde{x}_n \longrightarrow x_*$$

Wegen $(*)$:

$$\tilde{y}_n \longrightarrow x_*$$

Da v bei x_* lokal Lipschitz:

$$\|v(\tilde{x}_n) - v(\tilde{y}_n)\| \leq L \cdot \|\tilde{x}_n - \tilde{y}_n\|$$

Widerspruch ! $\boxtimes$

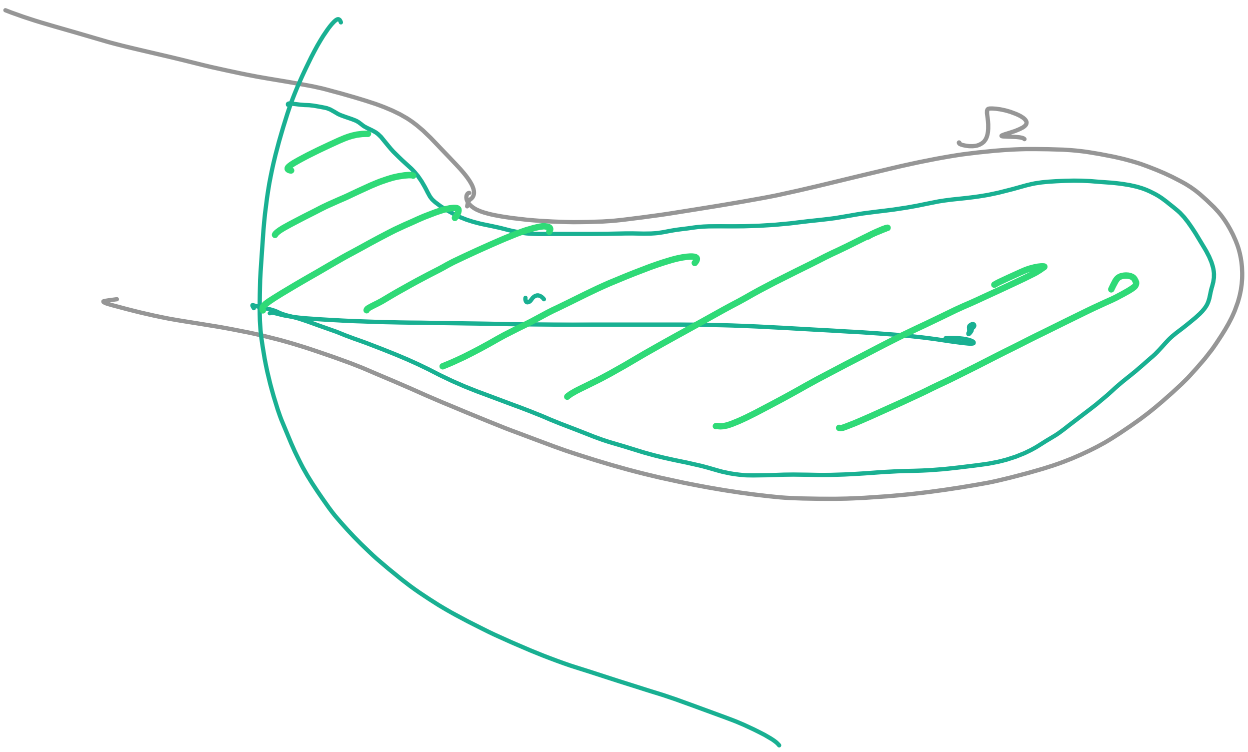
Bew.: Zu jedem Gebiet Ω ex. eine Ausschöpfung

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset \Omega$$

$$\bigcup_{j\geq 1} K_j = \Omega$$

wobei K_j kompakt.

z.B.: $K_n = \{ x \in \Omega : |x| \leq n \ \wedge \ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n} \}$



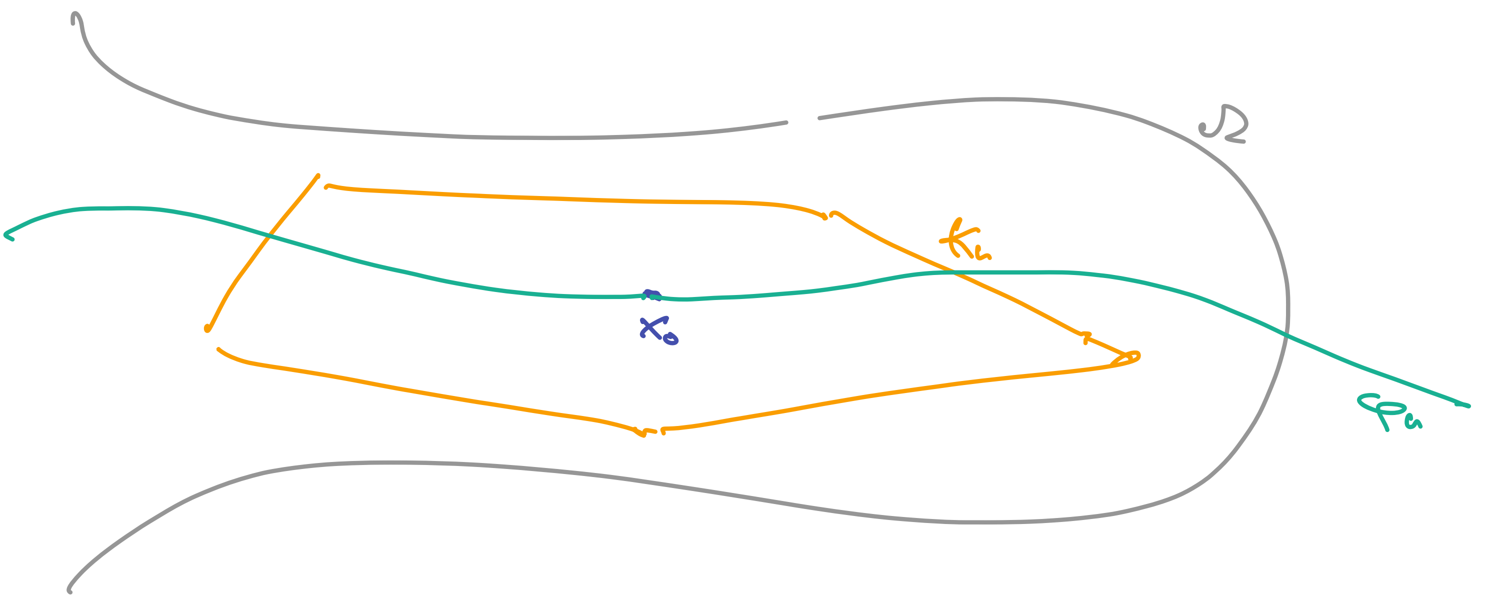
Sei also (K_n) eine solche Ausschöpfung.

$v_n := v|_{K_n}$ ist glm. Lipschitz

und besitzt eine globale Erweiterung auf Ω

mit derselben globalen Lipschitzk.

Sei $x_0 \in K_n$



Für jedes $n \geq 1$ ex.

gefunden Weg φ_n zu v_n

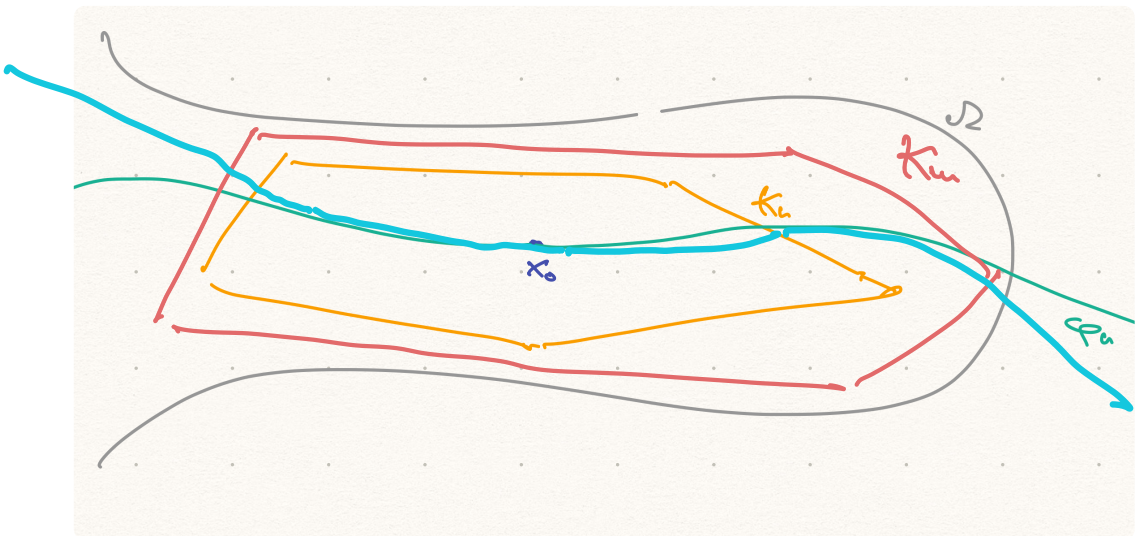
also $I_n \to 0$: $\varphi(I_n) \subset K_n$

Da $K_n \subset K_{n+1} \subset \dots \subset K_m \subset \dots$

für $m > n$:

$$\varphi_m|_{I_n} = \varphi_n \quad \text{wg. Eindeutigkeit}$$

sowie $v_m|_{K_n} = v_n$.



Setze jetzt

$$J = \bigcup_{n \geq 1} I_n$$

Definiere:

$$\varphi : J \to \Omega$$

$$\varphi|_{I_n} = \varphi_n$$

Dann ist [illegible] eine Lösung [illegible] [illegible]

$$\dot{x} = v(x), \quad x(0) = x_0 .$$

Zu zeigen: J ist unendlich:

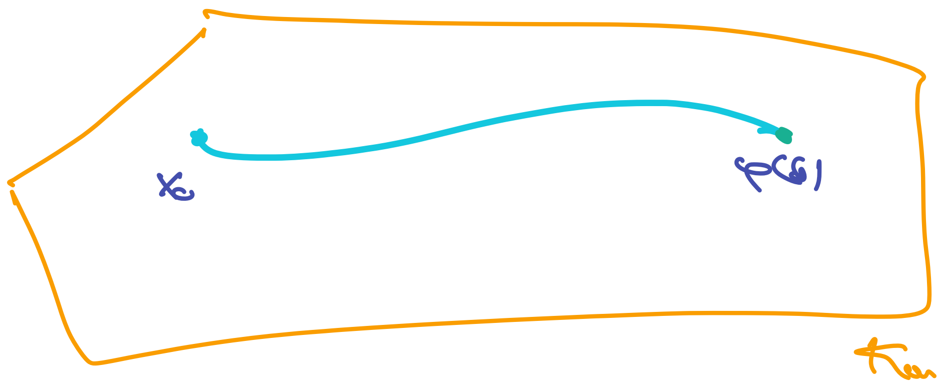
Betrachte:

$$J_+ = J \cap [0,\infty)$$
$$= [0, \delta), \quad 0 < \delta \le \infty.$$

Ist $\delta = \infty$: ✓

Sei $\delta < \infty$. Führe zu einer Lsg über δ hinaus. Dann ex.

$$\lim_{t \nearrow \delta} \varphi(t)$$



und $\varphi([0,\delta)) \subset K_m$ für ein $m \ge 1$.

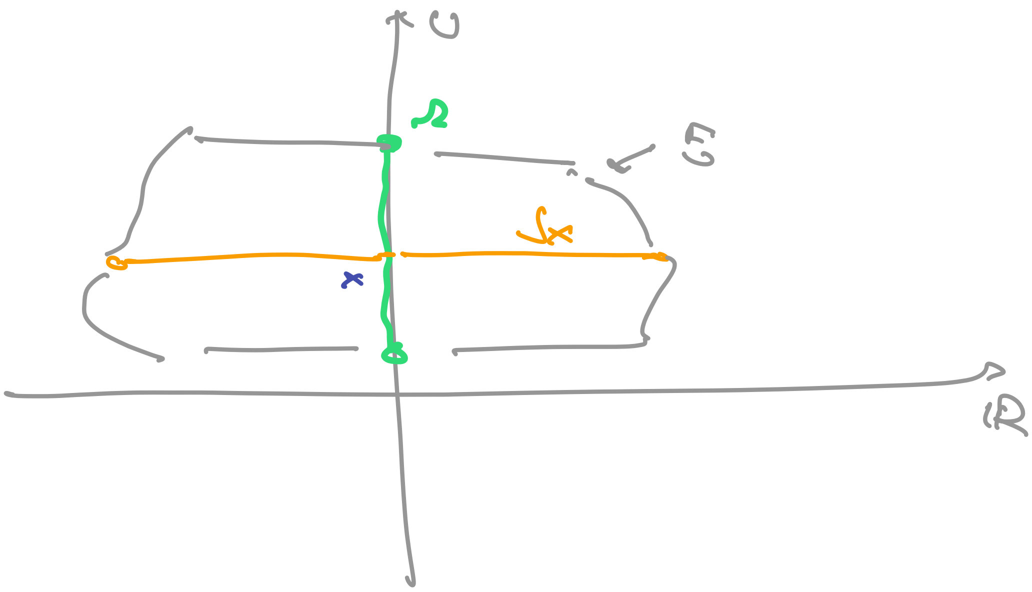
Also Lsg widerspricht der Definition von J.

$\circledcirc$

Define

$$\mathcal{E} := \bigcup_{x \in \Omega} J_x \times \{x\}$$

$$= \{ (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega : t \in J_x \}$$



Flow:

$$\varphi^0(x) = x$$

$$\varphi^{t+s}(x) = \varphi^t(\varphi^s(x))$$