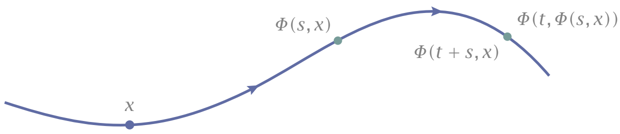
Abb 3 Flusseigenschaft



17.3 Flüsse

Ist das Vektorfeld v lipschitz auf V, so definieren alle seine – eindeutigen – Lösungskurven zu allen Anfangswerten zusammen eine Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R} \times V \to V, \qquad \Phi(t,x) = \varphi^t(x) = \varphi_x(t),$$

genannt der *Fluss* oder die *Flussabbildung* des Vektorfeldes. Aufgrund des Stetigkeitssatzes 12 ist sie stetig in x, und aufgrund der Konstruktion sogar differenzierbar in t.

13 **Flusssatz** *Ist das Vektorfeld v lipschitz auf V, so gilt für seine Flussabbildung*

$$\Phi(0,x) = x,$$
$$\Phi(t+s,x) = \Phi(t,(\Phi(s,x))$$

für alle $x \in V$ und alle $s,t \in \mathbb{R}$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Da $\Phi(t,x)$ die Lösungskurve zum Anfangswert x bezeichnet, ist natürlich $\Phi(0,x) = x$ für alle x. Betrachten wir beide Seiten der zweiten Gleichung als Funktion von t bei festem s, so sind *beide* Lösungskurven desselben Vektorfeldes v mit demselben Anfangswert $\Phi(s,x)$ bei $t = 0$. Denn es gilt ja

$$\Phi(t+s,x)^{\cdot} = v(\Phi(t+s,x))$$

und

$$\Phi(t,\Phi(s,x))^{\cdot} = v(\Phi(t,\Phi(s,x))).$$

Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes 8 stimmen beide Seiten somit überein. ⟩⟩⟩⟩⟩

Die Gleichung

$$\Phi(t+s,x) = \Phi(t,(\Phi(s,x))$$

bedeutet, dass es keinen Unterschied macht, ob ich vom Punkt x der Lösungskurve bis zum Zeitpunkt s folge und $\Phi(s,x)$ als Anfangswert einer weiteren Lösungskurve bis zum Zeitpunkt t wähle, oder ob ich gleich von x ›ohne Zwischenstop‹ bis zum Zeitpunkt $t+s$ fortschreite Abb 3.

Zeit-t-Abbildungen

Wir wechseln jetzt die Perspektive und betrachten die Flussabbildung nicht als Bündel von Lösungskurven, sondern als Familie von *Zeit-t-Abbildungen*

$$\Phi^t : V \to V, \quad x \mapsto \Phi^t(x) = \Phi(t, x).$$

Diese bildet also jeden Punkt $x \in V$ auf den Punkt $\varphi^t(x)$ der Lösungskurve mit Anfangswert x ab.

14 **Satz** *Die Familie der Zeit-t-Abbildungen $(\Phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ eines lipschitzstetigen Vektorfeldes auf V bildet eine 1-Parametergruppe von Homöomorphismen von V. Das heißt, jedes Φ^t ist ein Homöomorphismus von V, und es gilt*

$$\Phi^0 = id, \qquad \Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s$$

für alle $t, s \in \mathbb{R}$. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Die Identitäten sind gleichbedeutend mit denen des Flusssatzes 13 und müssen nicht mehr bewiesen werden. Aus ihnen folgt insbesondere

$$\Phi^t \circ \Phi^{-t} = \Phi^{t-t} = \Phi^0 = \Phi^{-t+t} = \Phi^{-t} \circ \Phi^t.$$

Wegen $\Phi^0 = id$ ist also Φ^t umkehrbar, und die Umkehrabbildung ist

$$(\Phi^t)^{-1} = \Phi^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Da diese stetig sind, ist jede Zeit-t-Abbildung ein Homöomorphismus von V. ⟩⟩⟩⟩

Bemerkungen *a.* Die Flussabbildung eines Vektorfeldes definiert somit einen *Homomorphismus* der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ in die Gruppe $\mathrm{Hom}(V)$ der Homöomorphismen auf V:

$$\Phi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathrm{Hom}, \circ), \quad t \mapsto \Phi^t.$$

Eine solche Familie von Abbildungen wird auch als *dynamisches System mit kontinuierlicher Zeit* bezeichnet.

b. Der Satz verallgemeinert das entsprechende Resultat für lineare Vektorfelder A. Dort war ja

$$\Phi^t = \mathrm{e}^{At} : V \to V$$

eine 1-Parametergruppe von *linearen* Isomorphismen von V. Die Gruppenstruktur war dort eine algebraische Identität, die wir ohne den EE-Satz zeigten. ⊸

▪ Differenzierbarkeit

Ein lipschitzstetiges Vektorfeld generiert also eine 1-Parametergruppe von *Homöomorphismen* des Vektorraumes V. Ist das Vektorfeld darüber hinaus stetig differenzierbar, so gilt dasselbe auch für seine Flussabbildung.

15 **Satz** *Ist das lipschitzstetige Vektorfeld v auf V stetig differenzierbar, so ist jede Zeit-t-Abbildung Φ^t seines Flusses ein Diffeomorphismus von V.* ⋊

Da wir bereits wissen, dass es sich bei den Zeit-t-Abbildungen um Homöomorphismen handelt, ist nur noch deren stetige Differenzierbarkeit zu zeigen. Es genügt daher, Folgendes zu beweisen.

16 **Proposition** *Ist das lipschitzstetige Vektorfeld v stetig differenzierbar, so ist jede Zeit-t-Abbildung Φ^t seines Flusses ebenfalls stetig differenzierbar. Seine Ableitung $\Lambda^t \coloneqq D\Phi^t(x)$ ist die eindeutige Lösung des nichtautonomen linearen Anfangswertproblems*

$$\dot{\Lambda} = A(t)\Lambda, \qquad \Lambda(0) = \mathrm{Id}, \tag{4}$$

mit $A(t) \coloneqq Dv(\Phi^t(x))$. ⋊

Dieses Awp ergibt sich wie folgt. *Falls* wir die Differenzialgleichung

$$\dot{\Phi}^t(x) = v(\Phi^t(x))$$

nach x differenzieren und Differenziation nach x und t vertauschen dürfen, so erhalten wir die Differenzialgleichung

$$(D\Phi^t(x))^{\cdot} = Dv(\Phi^t(x))D\Phi^t(x).$$

Ihr Anfangswert ist $D\Phi^0(x) = \mathrm{Id}$, da ja $\Phi^0 = id$. Fixieren wir also x, so erhalten wir genau das behauptete Awp für $\Lambda(t) \coloneqq D\Phi^t(x)$.

Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung ist jedenfalls kein Problem:

17 **Lemma** *Ist das Vektorfeld v auf V lipschitz und C^1, so besitzt das Anfangswertproblem* (4) *eine für alle t definierte eindeutige Lösung.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Ist v stetig differenzierbar, so liefert die Definition von $A(t)$ eine stetige Abbildung $A\colon \mathbb{R} \to L(V)$. Diese ist gleichmäßig beschränkt in der Operatornorm von $L(V)$ durch die globale Lipschitzkonstante von v. Somit können wir $\dot{\Lambda} = A(t)\Lambda$ auffassen als eine stetig von t abhängende lipschitzstetige Differenzialgleichung auf dem Vektorraum $L(V)$. Der Zusatz zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz 11 liefert dazu die gewünschte eindeutige Lösung. ⟩⟩⟩⟩

⟨⟨⟨⟨ *Beweis der Proposition* Wir zeigen, dass

$$W^t(h) \coloneqq \Phi^t(x+h) - \Phi^t(x) - \Lambda^t h = o(\|h\|).$$

Dann ist Λ^t von (4) die Ableitung der Flussabbildung. — Aufgrund des Hauptsatzes gilt

$$\begin{aligned}\Lambda^t h &= h + \int_0^t A(s)\Lambda^s h \,\mathrm{d}s,\\ \Phi^t(x) &= x + \int_0^t v(\Phi^s(x))\,\mathrm{d}s,\\ \Phi^t(x+h) &= x + h + \int_0^t v(\Phi^s(x+h))\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Also ist

$$W^t(h) = \int_0^t \big(v(\Phi^s(x+h)) - v(\Phi^s(x)) - A(s)\Lambda^s h\big)\,\mathrm{d}s.$$

Mit $\Lambda^s h = \Phi^s(x+h) - \Phi^s(x) - W^s(h)$ wird dies zu

$$\begin{aligned}W^t(h) &= \int_0^t \big(v(\Phi^s(x+h)) - v(\Phi^s(x)) - A(s)(\Phi^s(x+h) - \Phi^s(x))\big)\,\mathrm{d}s\\ &\qquad + \int_0^t A(s)W^s(h)\,\mathrm{d}s\\ &= \int_0^t \Delta(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t A(s)W^s(h)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

mit

$$\Delta(s) = v(\Phi^s(x+h)) - v(\Phi^s(x)) - A(s)(\Phi^s(x+h) - \Phi^s(x)).$$

Aufgrund der gleichmäßigen Lipschitzstetigkeit von v ist $\|A(s)\| \leqslant L$ für alle s und x. Also folgt

$$\|W^t(h)\| \leqslant \int_0^t \|\Delta(s)\|\,\mathrm{d}s + L\int_0^t \|W^s(h)\|\,\mathrm{d}s.$$

Mit einer Variante des Lemmas von Gronwall A-12 gilt dann

$$\|W^t(h)\| \leqslant \int_0^t \|\Delta(s)\|\,\mathrm{e}^{L(t-s)}\,\mathrm{d}s.$$

Mit $A(s) = Dv(\Phi^s(x))$ und dem Mittelwertsatz ist nun

$$\|\Delta(s)\| \leqslant \sup_{\xi\in I(s)} \|Dv(\xi) - Dv(\Phi^s(x))\|\,\|\Phi^s(x+h) - \Phi^s(x)\|$$

mit $I(s) = [(\Phi^s(x+h), \Phi^s(x))]$. Aufgrund des Stetigkeitssatzes 12 ist

$$\|\Phi^s(x+h) - \Phi^s(x)\| = O(\|h\|).$$

Andererseits gilt $\xi \to \Phi^s(x)$ für $h \to 0$, und deshalb

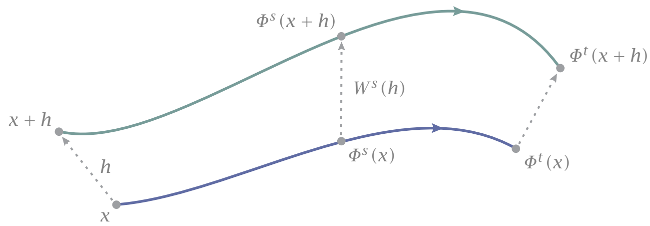
$$\|Dv(\xi) - Dv(\Phi^s(x))\| \to 0, \qquad h \to 0.$$

Also ist $\|\Delta^t(h)\| = o(\|h\|)$ und damit $\|W^t(h)\| = o(\|h\|)$, wie zu zeigen war. »»»

17.18

Abb 4

Zum Beweis der Proposition



Variationsgleichung

Für die Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten ergibt sich daraus Folgendes. Setzen wir

$$\xi(t) = D\Phi^t(x)h = \Lambda(t)h,$$

so gilt

$$\Phi^t(x+h) = \Phi^t(x) + \xi(t) + o(h),$$

wobei die Kurve ξ der *Variationsgleichung*

$$\dot{\xi} = A(t)\xi, \qquad \xi(0) = h,$$

entlang der Kurve $\Phi^t(x)$ genügt. Sie beschreibt in erster Näherung die Änderung einer Lösungskurve bei kleinen Änderungen des Anfangswertes.

Höhere Regularität

Besitzt das Vektorfeld höhere Regularitätseigenschaften, so vererben sich diese auf den Fluss.

18 **Satz** *Ist das Vektorfeld v auf V von der Klasse C^r, wobei $1 \leqslant r \leqslant \infty$, so ist seine Flussabbildung Φ ebenfalls C^r.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Für $r = 1$ ist die Behauptung bereits bewiesen 15. Wir gehen daher induktiv davon aus, dass die Behauptung für irgendein $r \geqslant 1$ gilt, und beweisen deren Gültigkeit für $r+1$.

Sei also v ein C^{r+1}-Vektorfeld. Betrachte das Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v(x), \\ \dot{u} &= Dv(x)u, \end{aligned} \tag{5}$$

und das zugehörige Vektorfeld

$$w : V \times V \to V \times V, \quad w(x,u) = \begin{pmatrix} v(x) \\ Dv(x)u \end{pmatrix}.$$

Dieses ist C^r auf $V \times V$. Also ist nach Induktionsannahme auch seine Flussabbildung Ψ von der Klasse C^r. Diese Flussabbildung ist aber gerade

$$\Psi^t(x,u) = \begin{pmatrix} \Phi^t(x) \\ D\Phi^t(x)u \end{pmatrix},$$

denn die zweite Gleichung in (5) ist gerade die Variationsgleichung der ersten Gleichung ₁₆ . Also ist nach Induktionsannahme $D\Phi^t$ eine C^r-Abbildung. Dasselbe gilt für $\dot{\Phi}^t$ aufgrund der Differenzialgleichung. Also ist Φ selbst eine C^{r+1}-Abbildung, und die Induktion ist abgeschlossen. ⟩⟩⟩⟩⟩

17.4 Der lokale Ee-Satz

Bis jetzt gingen wir davon aus, dass ein Vektorfeld auf ganz V definiert und dort lipschitz ist. Das ist natürlich nicht immer der Fall.

▷ a. Die Differenzialgleichung $\dot{x} = x^2$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ erklärt, aber nicht gleichmäßig lipschitzstetig. Tatsächlich hat jede nichttriviale Lösung

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}, \qquad x_0 \neq 0,$$

eine Singularität.

b. Die Differenzialgleichung $\dot{x} = x^{-2}$ hat eine Singularität im Punkt 0, und die Lösung

$$x(t) = \sqrt[3]{3t+1}$$

erreicht diesen Punkt in endlicher Zeit, verlässt also den Definitionsbereich der Differenzialgleichung. ◁

Lösungen existieren im Allgemeinen also nicht für alle Zeiten. Aber jedes Anfangswertproblem eines *lokal lipschitzstetigen* Vektorfeldes besitzt immer eine eindeutige lokale und sogar *maximale Lösung*. Dazu benötigen wir einige Fakten über lipschitzstetige Abbildungen.

▪ Lipschitzstetige Vektorfelder

Definition *Ein Vektorfeld v auf einem Gebiet $\Omega \subset V$ heißt lokal lipschitzstetig, wenn zu jedem Punkt in Ω eine Umgebung $U \subset \Omega$ und ein $L \geqslant 0$ existiert, so dass v auf U L-lipschitzstetig ist.* ⋊

⊳ A. Lineare Vektorfelder $x \mapsto Ax$ sind *global lipschitzstetig*, denn

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\| \leqslant \|A\| \, \|x-y\|, \qquad x, y \in V.$$

B. Jedes C^1-Vektorfeld auf einem Gebiet ist lokal lipschitz aufgrund des Schrankensatzes $_{14.16}$.

C. Das Vektorfeld $x \mapsto x^{2/3}$ ist im Punkt $0 \in \mathbb{R}$ *nicht* lokal lipschitz. ⊲

19 **Lemma** *Ist v auf dem Gebiet Ω lokal lipschitz, so ist v auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset \Omega$ gleichmäßig lipschitz.* ⋊

⟪⟪⟪ Sei $K \subset \Omega$ kompakt. Wäre v *nicht* gleichmäßig lipschitz auf K, so existierten zu jedem $n \geqslant 1$ Punkte $x_n \neq y_n$ in K derart, dass

$$\|v(x_n) - v(y_n)\| \geqslant n \, \|x_n - y_n\|.$$

Also ist

$$\|x_n - y_n\| \leqslant \frac{2}{n} \sup_{x \in K} \|v(x)\| \leqslant \frac{2M}{n}, \qquad n \geqslant 1,$$

denn $\|v\|$ ist auf K stetig und daher beschränkt.

Da K kompakt ist, besitzt die Folge (x_n) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $p \in K$. Die entsprechende Teilfolge von (y_n) konvergiert dann wegen der vorangehenden Abschätzung ebenfalls gegen p. Da aber v in einer Umgebung von p lipschitz ist, ergibt sich für hinreichend große n ein Widerspruch zur Wahl von x_n und y_n. ⟫⟫⟫

Lipschitzstetige Funktionen auf kompakten Teilmengen eines normierten Raumes lassen sich nun zu lipschitzstetigen auf dem gesamten Raum fortsetzen, ohne die Lipschitzkonstante zu verschlechtern.

20 **Lemma** *Sei $f : M \to \mathbb{R}$ L-lipschitz auf einer nichtleeren abgeschlossenen Teilmenge M von V. Dann existiert eine Fortsetzung $\phi : V \to \mathbb{R}$ von f mit derselben Lipschitzkonstante L.* ⋊

⟪⟪⟪ Nach Voraussetzung gilt

$$|f(u) - f(v)| \leqslant L \, \|u - v\|, \qquad u, v \in M. \tag{6}$$

Fixieren wir irgendein u_0 in M, so gilt für jedes $x \in V$ und $u \in M$ aufgrund der Dreiecksungleichung die obere Abschätzung

$$\begin{aligned} f(u) - L\,\|x-u\| &\leqslant f(u_0) + |f(u) - f(u_0)| - L\,\|x-u\| \\ &\leqslant f(u_0) + L\,\|u-u_0\| - L\,\|x-u\| \\ &\leqslant f(u_0) + L\,\|x-u_0\|\,. \end{aligned}$$

Die linke Seite ist somit für alle $u \in M$ gleichmäßig beschränkt und damit

$$\phi : V \to \mathbb{R}, \quad \phi(x) \coloneqq \sup_{u\in M} (f(u) - L\,\|x-u\|)$$

wohldefiniert.

Aus (6) folgt andererseits $f(v) \geqslant f(u) - L\,\|v-u\|$ und deshalb

$$\sup_{u\in M} (f(u) - L\,\|v-u\|) = f(v), \qquad v \in M.$$

Also ist $\phi = f$ auf M und damit ϕ eine Fortsetzung von f auf ganz V.

Nun gilt für jedes $y \in V$

$$\phi(x) \geqslant f(u) - L\,\|y-u\| - L\,\|x-y\|\,, \qquad u \in M.$$

Also gilt dies auch für das Supremum über $u \in M$ und deshalb

$$\phi(x) \geqslant \phi(y) - L\,\|x-y\|\,.$$

Dasselbe gilt mit den Rollen von x und y vertauscht, so dass wir insgesamt

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leqslant L\,\|x-y\|$$

erhalten. Somit ist ϕ L-lipschitz auf V. ⟫⟫⟫

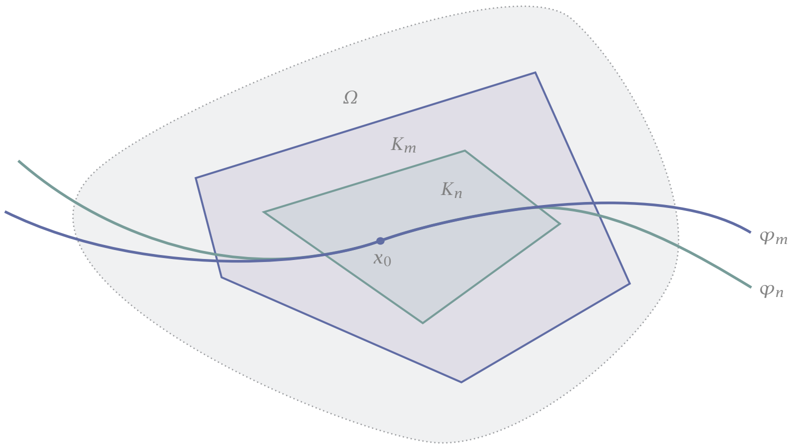
Korollar *Jedes lipschitzstetige Vektorfeld auf einer kompakten Menge in V besitzt eine lipschitzstetige Fortsetzung auf ganz V.* ⋊

⟪⟪⟪ Wähle eine beliebige Basis in V, und setze jede einzelne Komponentenfunktion mit dem vorangehenden Lemma auf ganz V fort. Die Behauptung für die daraus resultierende Fortsetzung des gesamten Vektorfeldes folgt, weil alle Normen in V äquivalent sind. ⟫⟫⟫

▪ Lokale Lösungen

21 **Lokaler Ee-Satz** *Das Vektorfeld v sei auf einem Gebiet Ω lokal lipschitzstetig. Dann besitzt jedes zugehörige Anfangswertproblem eine eindeutige maximale Lösung.* ⋊

Abb 5 Konstruktion einer maximalen Lösungskurve



⟪⟪⟪ Zu jedem Gebiet Ω existiert eine *Ausschöpfung*

$$K_1 \subset K_2 \subset .. \subset \Omega, \qquad \bigcup_{n \geqslant 1} K_n = \Omega,$$

durch kompakte Teilmengen – zum Beispiel

$$K_n = \{ x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \Omega^c) \geqslant 1/n \wedge \|x\| \leqslant n \} .$$

Aufgrund von Lemma K 19 ist die Einschränkung $v|_{K_n}$ gleichmäßig lipschitz-stetig, und aufgrund von Lemma L 20 kann es von dort zu einem gleichmäßig lipschitzstetigen Vektorfeld v_n auf ganz V fortgesetzt werden.

Sei nun $x_0 \in \Omega$ ein beliebiger Anfangswert, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_0 \in K_1$. Für jedes $n \geqslant 1$ existiert dann eine eindeutige globale Lösung φ_n zum Vektorfeld v_n und Anfangswert x_0, und zu dieser ein größtes *offenes* Intervall $I_n \ni 0$ mit der Eigenschaft

$$\varphi_n(I_n) \subset K_n.$$

Eventuell gilt auch $\varphi_n(I_n^-) \subset K_n$, aber das ist unerheblich. Wegen $K_1 \subset K_2 \subset ..$ gilt dann auch $I_1 \subset I_2 \subset ..$ sowie

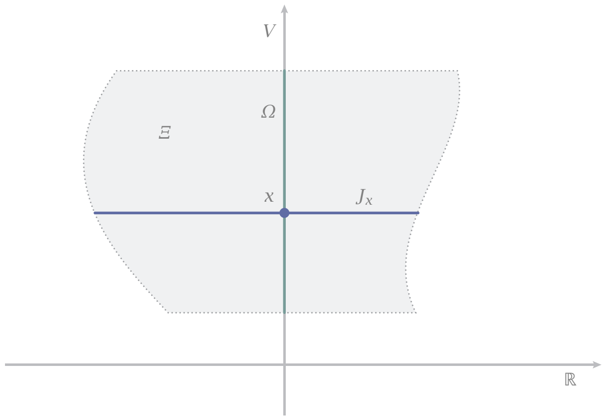
$$\varphi_m \Big|_{I_n} = \varphi_n, \qquad m \geqslant n.$$

Setze jetzt

$$J \coloneqq \bigcup_{n \geqslant 1} I_n$$

Abb 6

Die Menge Ξ



und definiere $\varphi\colon J \to \Omega$ durch $\varphi|_{I_n} = \varphi_n$. Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes 8 ist φ eine wohldefinierte Lösung zum Anfangswert x_0 innerhalb von Ω.

Um ihre Maximalität zu zeigen, betrachte beispielsweise

$$J_+ = J \cap [0,\infty) = [0,b), \qquad 0 < b \leqslant \infty.$$

Ist $b = \infty$, so ist J_+ sicher maximal. Sei also $b < \infty$. Gäbe es eine Lösung zum selben Anfangswert über den Zeitpunkt b hinaus, so existierte $\lim_{t \nearrow b} \varphi(t)$, und der kompakte Kurvenabschnitt $\varphi([0,b])$ wäre im Innern einer der kompakten Mengen K_n enthalten. Dies aber widerspricht der Definition der Intervalle I_n und J. ⟫⟫⟫

Der *maximale Fluss* eines Vektorfeldes v ist die Bündelung aller seiner maximalen Lösungskurven. Wir setzen

$$\Xi = \bigcup_{x \in \Omega} J_x \times \{x\} = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega : t \in J_x\},$$

wobei J_x das maximale Existenzintervall der Lösungskurve zum Anfangswert x bezeichnet, und definieren

$$\Phi : \ \Xi \to \Omega, \qquad (t,x) \mapsto \varphi(t,x)$$

genau wie im Fall des globalen Flusses. Dann gilt folgender

22 **Satz** *Die Menge Ξ ist eine offene Umgebung von $\{0\} \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \Omega$, und Φ ist ein maximaler Fluss auf Ω bestehend aus maximalen Lösungskurven des Vektorfeldes v.* ⋊

⟪⟪⟪ Dies ist als Übung überlassen 6. ⟫⟫⟫

17.24

Lokal gilt für den maximalen Fluss dasselbe wie für den globalen Fluss im Flusssatz [13], also

$$\Phi^0(x) = x, \qquad \Phi^{t+s} = \Phi^t(\Phi^s(x)),$$

wann immer alle Ausdrücke definiert sind.

17.25