17.5 Konjugation von Vektorfeldern und Flüssen

Um eine Differenzialgleichung zu verstehen, kann man nach geeigneten Koordinaten suchen, in denen sie besonders einfach wird – das ist die sogenannte *Transformationsmethode*. Damit stellt sich die Frage, wie sich Vektorfelder und Differenzialgleichungen unter Koordinatentransformationen überhaupt transformieren.

▪ Transformation von Vektorfeldern

Gegeben seien ein Vektorfeld v auf einem Gebiet Ω in V und ein Diffeomorphismus

$$T\colon\ \Omega \to \Theta$$

von Ω auf ein weiteres Gebiet Θ in V. Das transformierte Vektorfeld w auf Θ ist natürlicherweise dadurch charakterisiert, dass T Lösungskurven φ von v in Lösungskurven ψ von w abbildet. Für die Kurve $\psi = T \circ \varphi$ soll also gelten

$$\begin{aligned}\dot\psi &= (T \circ \varphi)^{\cdot} = (DT \circ \varphi)\dot\varphi = (DT \circ \varphi)v(\varphi)\\ &\overset{!}{=} w(\psi) = w(T \circ \varphi).\end{aligned}$$

Vergleich beider Gleichungen ergibt

$$w(T \circ \varphi) = (DT \circ \varphi)v(\varphi).$$

Betrachten wir $\varphi = \varphi(t,x)$ zum Zeiptunkt $t = 0$, so erhalten wir

$$w(T(x)) = DT(x)v(x), \qquad x \in \Omega.$$

Damit erhalten wir folgendes

23 **Transformationsgesetz** *Ein Diffeomorphismus $T\colon \Omega \to \Theta$ transformiert ein Vektorfeld v auf Ω in ein Vektorfeld w auf Θ gemäß der Gleichung*

$$w \circ T = DT \cdot v. \qquad \rtimes$$

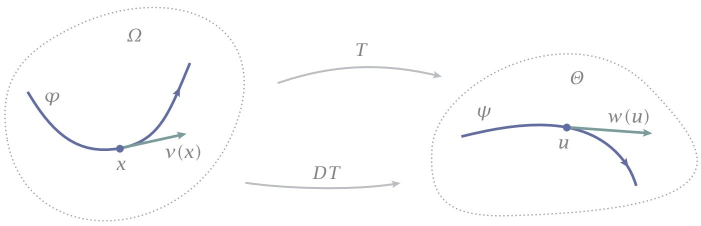
Diese Gleichung lässt sich sowohl nach v als auch nach w auflösen. Auflösen nach w ergibt

$$w = DT \cdot v \circ T^{-1} =: T_* v.$$

Man transportiert also v von Ω mit der Tangentialabbildung DT weiter nach Θ, weshalb man $T_* v$ den *push forward* von v nennt. Auflösen nach v ergibt

$$v = DT^{-1} w \circ T =: T^* w.$$

Abb 7 Zum Transformationsgesetz



Man holt also w mit der inversen Tangentialabbildung DT^{-1} von Θ zurück nach Ω, weshalb man T^*w den *pull back* von w nennt. Beide Gleichungen sind äquivalent, aber die zweite ist technisch meist einfacher, da nur die lineare Abbildung DT invertiert wird statt der im Allgemeinen nichtlinearen Abbildung T.

Definition *Zwei Vektorfelder v auf Ω und w auf Θ heißen C^1-konjugiert, falls es einen Diffeomorphismus $T\colon \Omega \to \Theta$ gibt, so dass $T_*v = w$.* ⋊

Bemerkung Das Vektorfeld T_*v ist auch erklärt, wenn T nicht surjektiv ist, sondern eine sogenannte *Einbettung*. Dagegen ist T^*w auch erklärt, wenn T nur ein lokaler, aber kein globaler Diffeomorphismus ist. Dies ist beispielsweise bei den Polarkoordinaten der Fall – siehe nächstes Beispiel. ⊸

▹ Praktisch transformiert man Vektorfelder durch direktes Differenzieren der Gleichung $\psi = T \circ \varphi$ statt die Transformationsformel zu bemühen.

A. Ist $\dot{x} = Ax$ und $y = Tx$ mit einem Isomorphismus $T\colon V \to V$. Dann ist

$$\dot{y} = (Tx)^{\cdot} = T\dot{x} = TAx \overset{!}{=} By = BTx,$$

also $TA = BT$. Somit erhalten wir

$$A = T^*B = T^{-1}BT, \qquad B = T_*A = TAT^{-1},$$

wobei T^* hier *nicht* die adjungierte Abbildung zu T bezeichnet.

B. Betrachte das Vektorfeld $v(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mit

$$T\colon \ \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, \qquad x = -\frac{1}{y}$$

erhält man

$$\dot{x} = x^2 = \frac{1}{y^2} \overset{!}{=} \left(-\frac{1}{y}\right)^{\cdot} = \frac{\dot{y}}{y^2}.$$

Man erhält $\dot{y} = 1$. Also ist

$$T^*v = 1, \qquad T_*1 = v,$$

wenn $\mathbf{1}$ das konstante Vektorfeld mit Wert 1 bezeichnet.

c. Die Abbildung

$$(r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

definiert Polarkoordinaten in der Ebene außerhalb des Nullpunkts. Sie ist ein lokaler, jedoch kein globaler Diffeomorphismus. Daher ist lediglich der pull back definiert. Eine direkte Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta. \end{aligned}$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit $x = r \cos \theta$, der zweiten mit $y - r \sin \theta$ und Addition ergibt

$$x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r} \cos^2 \theta + r\dot{r} \sin^2 \theta = r\dot{r},$$

also

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}.$$

Analog erhält man

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}.$$

Diese Gleichungen sind für $r > 0$ wohldefiniert.

Konjugation von Flüssen

Können zwei Vektorfelder durch einen Diffeomorphismus ineinander transformiert werden, so betrachtet man diese als *äquivalent*. Ihre Lösungskurven werden dann ebenfalls durch diesen Diffeomorphismus aufeinander abgebildet – das war ja auch der Ausgangspunkt des Transformationsgesetzes.

Zunächst die Definition. Flüsse bezeichnen wir von nun an wieder mit kleinen griechischen Buchstaben, da sie ohnehin aus Lösungskurven bestehen.

Definition *Zwei Flüsse φ auf Ω und ψ auf Θ heißen lokal C^1-konjugiert, falls es einen Diffeomorphismus $T : \Omega \to \Theta$ gibt, so dass*

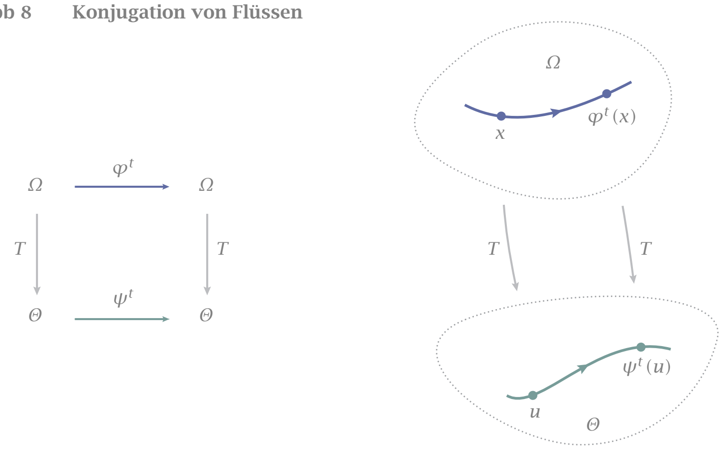
$$T \circ \varphi^t = \psi^t \circ T$$

in einem offenen t-Intervall um 0 für jeden Anfangswert in Ω. Mit anderen Worten, es kommutiert das in Abbildung 8 links stehende Diagramm.

24 **Satz** *Zwei Vektorfelder sind C^1-konjugiert genau dann, wenn ihre Flüsse lokal C^1-konjugiert sind*

17.28

Abb 8 Konjugation von Flüssen



$\Leftarrow$ Sind die Flüsse lokal konjugiert, so gilt für jedes $x \in \Omega$

$$T \circ \varphi^t = \psi^t \circ T$$

lokal um jeden Punkt auf einem kleinen t-Intervall um 0. Ableiten nach t bei $t = 0$ ergibt dann $DT(\varphi^0)\dot{\varphi}^0 = \dot{\psi}^0 \circ T$. Mit $\dot{\varphi}^0 = v$ und $\dot{\psi}^0 = w$ folgt

$$DT \cdot v = w \circ T.$$

Also sind auch die Vektorfelder konjugiert.

$\Rightarrow$ Es gelte umgekehrt die letzte Gleichung. Dann gilt lokal um $t = 0$

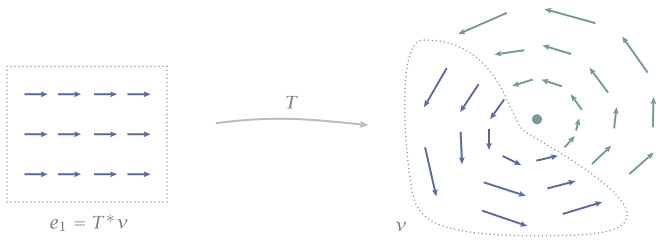
$$\begin{aligned}(T \circ \varphi^t)^{\cdot} = DT(\varphi^t)\dot{\varphi}^t &= DT(\varphi^t)v(\varphi^t) \\ &= (DT \cdot v) \circ \varphi^t \\ &= (w \circ T) \circ \varphi^t = w(T \circ \varphi^t).\end{aligned}$$

Somit ist $T \circ \varphi^t(x)$ eine lokale Lösungskurve des Vektorfeldes w zum Anfangswert $T(x)$. Dasselbe gilt aber auch für die Kurve $\psi^t(T(x))$. Aufgrund des Ee-Satzes ist also $T(\varphi^t(x)) = \psi^t(T(x))$ für kleine t, sprich

$$T \circ \varphi^t = \psi^t \circ T.$$

Bemerkung Offensichtlich kann man Flüsse auch *topologisch* konjugieren – also per Homöomorphismus –, Vektorfelder aber nicht, da die Jacobische eines Homöomorphismus ja nicht definiert ist. Man nennt daher Vektorfeld *topologisch konjugiert*, wenn ihre Flüsse topologisch konjugiert sind. Dieser wesentlich flexiblere Konjugationsbegriff ist für das Studium dynamischer Systeme wichtig.

Abb 9 Der Rektifizierungssatz



▪ Der Rektifizierungssatz

Wir können nun den einfachsten Satz in der Klassifikation von Vektorfeldern beweisen. Er betrifft ihre Gestalt lokal um *reguläre Punkte*.

Definition *Ein Punkt p heißt singulärer Punkt eines Vektorfeldes v, falls*

$$v(p) = 0.$$

Andernfalls heißt er regulärer Punkt. ⋊

25 **Rektifizierungssatz** *Lokal um einen regulären Punkt p ist ein C^1-Vektorfeld C^1-konjugiert zu einem konstanten Vektorfeld.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir betrachten den Standardfall eines Vektorfeldes $v = (v_1, .., v_n)$ auf dem $\mathbb{R}^n$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass

$$p = 0, \qquad v_1(0) \neq 0.$$

Es existiert dann eine Umgebung $I \times U$ von $(0,0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, auf der der Fluss von v erklärt ist und eine C^1-Abbildung $\varphi\colon I \times U \to \mathbb{R}^n$ definiert.

Auf einer noch festzulegenden kleinen Umgebung W von $0 \in \mathbb{R}^n$ definieren wir damit eine Abbildung

$$T\colon\ W \to \mathbb{R}^n, \quad u \mapsto T(u) = \varphi^{u_1}(0, \hat{u}),$$

wobei $u = (u_1, .., u_n)$ und $\hat{u} = (u_2, .., u_n)$. Für diese Abbildung gilt dann

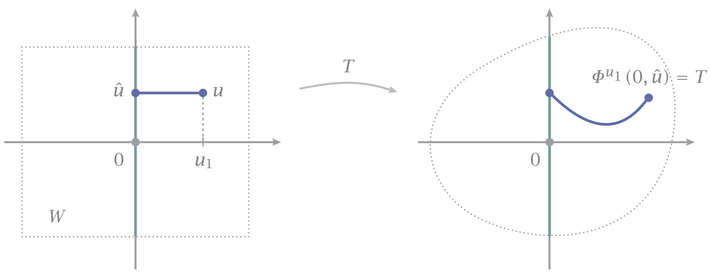
$$\frac{\partial T}{\partial u_1}(0) = \dot{\varphi}^t(0, \hat{u})\Big|_0 = \dot{\varphi}^0(0) = v(0)$$

und – indem wir erst $t = 0$ setzen und dann nach u_i differenzieren –

$$\frac{\partial T}{\partial u_i}(0) = \frac{\partial \varphi^0}{\partial u_i}(0) = e_i, \qquad 2 \leqslant i \leqslant n.$$

Also ist

Abb 10 Definition der Abbildung T



$$DT(0) = \left(\frac{\partial T_i}{\partial u_j}\right) = \begin{pmatrix} v_1(0) & 0 & \dots & 0 \\ v_2(0) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n(0) & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

und somit

$$\det DT(0) = v_1(0) \neq 0.$$

Also ist T ein *lokaler Diffeomorphismus*. Wählen wir also W hinreichend klein, so ist T ein Diffeomorphismus von W auf eine Umgebung von $T(0) = 0$.

Diese Abbildung T konjugiert die Flüsse von e_1 und v. Der Fluss von e_1 ist

$$\psi^t(u) = u + t\mathrm{e}_1 = (u_1 + t, u_2, \dots, u_n).$$

Mit der Definition von T folgt

$$\begin{aligned}(\varphi^t \circ T)(u) &= \varphi^t \circ \varphi^{u_1}(0, \hat{u}) \\ &= \varphi^{t+u_1}(0, \hat{u}) \\ &= T(t + u_1, \hat{u}) = T \circ \psi^t(u).\end{aligned}$$

Also gilt

$$\varphi^t \circ T = T \circ \psi^t.$$

Da T die Flüsse von v und e_1 konjugiert, konjugiert T auch die Vektorfelder selbst $_{24}$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Damit ist klar, dass reguläre Punkte eines Vektorfeldes *lokal völlig uninteressant* sind. Interessant sind nur die singulären Punkte – wie im richtigen Leben. Dies ist allerdings nur ein *lokales* Bild. Es erlaubt keinerlei Aussage über das globale Verhalten der Lösungskurven – ob es sich beispielsweise um periodische, quasiperiodische oder chaotische Bahnen handelt.