Die fundamentale Beobachtung ist nun, dass man eine Stammfunktion einer Regelfunktion f erhält, indem man das Integral über f als *Funktion der oberen Grenze* betrachtet.

14 **Stammfunktionensatz** *Sei f auf I integrierbar und $c \in I$ ein beliebiger Punkt. Dann definiert*

$$\Phi(t) := \int_c^t f, \qquad t \in I,$$

eine Stammfunktion $\Phi\colon I \to \mathbb{R}$ von f. Diese ist außerdem lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L = \|f\|_I$. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Ist f auf I integrierbar, so auch auf jedem Teilintervall von I [4]. Die Funktion Φ ist daher für jedes $t \in I$ definiert. Aus der Additivität des Integrals [5] ergibt sich

$$\Phi(v) - \Phi(u) = \int_c^v f - \int_c^u f = \int_u^v f, \qquad u, v \in I.$$

Für $u < v$ folgt hieraus mit der Dreiecksungleichung

$$|\Phi(v) - \Phi(u)| = \left| \int_u^v f \right| \leqslant \int_u^v |f| \leqslant \|f\|_I (v - u).$$

Also ist Φ L-lipschitz mit $L = \|f\|_I$. Mit $u = t$ und $v = t + h$ ist ferner

$$\frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f.$$

Aufgrund des Riemannschen Lemmas [15] – das wir gleich beweisen – besitzt der Ausdruck auf der rechten Seite die einseitigen Grenzwerte $f_+(t)$ respektive $f_-(t)$. Also besitzt Φ die entsprechenden einseitigen Ableitungen, und es gilt

$$\Phi'_\pm(t) = f_\pm(t).$$

Somit ist Φ eine Stammfunktion von f. ⟩⟩⟩⟩

15 **Riemannsches Lemma** *Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt*

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f = f_+(t), \qquad \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \int_{t-h}^t f = f_-(t)$$

für jeden Punkt $t \in [a,b)$ respektive $t \in (a,b]$. Ist f in t stetig, so folgt

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f = f(t). \qquad ⋊$$

⟪⟪ Wir betrachten den rechtsseitigen Limes in einem Punkt $t \in [a,b)$. Sei $h > 0$ so klein, dass auch $t + h \in [a,b]$. Dann ist

$$f_+(t) = f_+(t) \cdot \frac{1}{h} \int_t^{t+h} 1 = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f_+(t).$$

Also ist

$$\left| f_+(t) - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f \right| = \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (f_+(t) - f) \right| \leqslant \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |f_+(t) - f|.$$

Aufgrund der Definition des rechtsseitigen Grenzwerts existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass

$$|f_+(t) - f(s)| < \varepsilon, \qquad t < s < t + \delta.$$

Zusammen mit der vorangehenden Ungleichung erhalten wir also

$$\left| f_+(t) - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f \right| \leqslant \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varepsilon = \varepsilon, \qquad 0 < h < \delta.$$

Da zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$ existiert, folgt

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f = f_+(t).$$

Für $t \in (a,b]$ und $h > 0$ mit $t - h \in [a,b]$ argumentiert man entsprechend.

Ist f im Punkt c sogar stetig, so ist $f_-(t) = f(t) = f_+(t)$ und damit auch

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} f = \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f.$$

Die beiden Grenzwerte im Riemannschen Lemma 15 sind also gleich $f(t)$. ⟫⟫

Bemerkung Ist f auf I stetig, so gilt überall

$$\Phi'(t) = \left(\int_c^t f \right)' = f(t), \qquad t \in I.$$

In diesem Sinne sind Differenzieren und Integrieren *inverse Operationen.* ⊸

▷ A. Die Signumfunktion ist auf jedem kompakten Intervall integrierbar, und eine Stammfunktion ist

$$\Phi(t) = \int_0^t \operatorname{sgn} = \begin{Bmatrix} t, & t \geqslant 0 \\ -t, & t < 0 \end{Bmatrix} = |t|.$$

Da sgn nur in 0 *nicht* stetig ist, gilt $\Phi'(t) = |t|' = \operatorname{sgn} t$ für $t \neq 0$ sowie

$$\Phi'_\pm(0) = \operatorname{sgn}_\pm(0) = \pm 1.$$

B. Eine Stammfunktion der Betragsfunktion ist

$$\int_0^t |s| = \frac{1}{2} t\, |t| = \frac{1}{2} t^2 \operatorname{sgn}(t). \quad ◁$$

Der vorangehende Satz eröffnet nun die Möglichkeit, Integrale mithilfe von Stammfunktionen zu berechnen.

16 **Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung** *Ist f auf $[a,b]$ integrierbar und F eine beliebige Stammfunktion von f, so gilt*

$$\int_a^b f = F\Big|_a^b := F(b) - F(a). \quad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Für die Funktion Φ des Stammfunktionensatzes $_{14}$ gilt aufgrund ihrer Definition

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_c^b f - \int_c^a f = \int_a^b f.$$

Jede andere Stammfunktion F von f unterscheidet sich von Φ aber nur durch eine additive Konstante $_{13}$, die sich in der Differenz aufhebt. Also ist auch

$$F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f. \quad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

A. Mit der Stammfunktion $|\cdot|$ für die Signumfunktion gilt

$$\int_a^b \operatorname{sgn} = |t|\Big|_a^b = |b| - |a|.$$

B. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_1^4 = 2.$

Ist f stetig differenzierbar, so ist f selbst Stammfunktion seiner Ableitung f'. Es gilt also folgender Spezialfall.

Korollar *Ist f auf $[a,b]$ stetig differenzierbar, so gilt*

$$\int_a^b f' = f\Big|_a^b. \quad \rtimes$$

Wegen des Hauptsatzes wird eine Stammfunktion auch als *unbestimmtes Integral* bezeichnet, während das Integral *mit* Intervallgrenzen *bestimmtes Integral* genannt wird. Genauer gilt folgende Sprachregelung.

Definition *Das unbestimmte Integral einer stetigen Funktion f auf einem Intervall ist die Familie*

$$\int f := \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

aller Stammfunktionen von f auf diesem Intervall. $\rtimes$

Gewöhnlich schreibt man dafür einfach $F + c$. In Formelsammlungen wird auch die Konstante c oft weggelassen.

▹▸ Unbestimmte Integral erhält man beispielsweise, indem man Ableitungsformeln ›rückwärts‹ liest.

A. $\int \mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t + c, \qquad \int \frac{1}{t} = \ln t + c.$

B. $\int \cos t = \sin t + c, \qquad \int \sin t = -\cos t + c.$

C. $\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + c, \qquad \int \frac{1}{1+t^2} = \arctan t.$ ◂◃

10.5 Integrationsregeln

Die Bestimmung von Integralen beruht auf der Bestimmung von Stammfunktionen, also einer Lösung der Gleichung $F' = f$ zu gegebenem f. Jede Differenziationsregel liefert damit eine Integrationsregel, indem man sie ›rückwärts‹ liest. Insbesondere folgen aus der Produkt- und Kettenregel die Regeln der partiellen Integration und der Substitution, die wir nun formulieren. Der Einfachheit halber gehen wir von stetig differenzierbaren respektive stetigen Funktionen aus.

Von nun an verwenden wir die klassische *Leibnizsche Integralnotation*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

die vor allem bei der Substitutionsregel zweckmäßig ist. Dabei ist die Integrationsvariable, ähnlich wie ein Summationsindex, frei wählbar. Es ist also

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Partielle Integration *Sind f und g auf $[a,b]$ stetig differenzierbar, so gilt*

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Entsprechend gilt für unbestimmte Integrale

$$\int f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(t)g(t) - \int f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$ ⋊

Eine äquivalente Formulierung ist

$$\int f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = F(t)g(t) - \int F(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

mit einer Stammfunktion F von f.

⟨⟨⟨⟨⟨ Die Integrale existieren, da die Integranden stetig sind. Also gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \\ = \int_a^b (f'g + fg')(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (fg)'(t)\,\mathrm{d}t = (fg)\Big|_a^b.\end{aligned}$$

Daraus folgen alle Behauptungen. ⟩⟩⟩⟩⟩

▷ A.

$$\int t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = t\mathrm{e}^t - \int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + c = (t-1)\mathrm{e}^t + c,$$

also beispielsweise

$$\int_0^1 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (t-1)\mathrm{e}^t\Big|_0^1 = 1.$$

B.

$$\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \cos t \cos t\,\mathrm{d}t = \sin t \cos t + \int \sin^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Mit $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ folgt hieraus

$$\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \sin t \cos t + t - \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Also ist

$$2\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = t + \sin t \cos t + c.$$

So erhält man zum Beispiel

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{t + \sin t \cos t}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

C. Gelegentlich hilft es, einen neutralen Faktor 1 ›aufzuleiten‹. Für den Logarithmus erhält man auf diese Weise

$$\begin{aligned}\int \log t\,\mathrm{d}t &= \int 1 \cdot \log t\,\mathrm{d}t \\ &= t\log t - \int t\log' t\,\mathrm{d}t = t\log t - \int 1\,\mathrm{d}t = t\log t - t + c.\end{aligned}$$

Zum Beispiel ist

$$\int_1^{\mathrm{e}} \log t\,\mathrm{d}t = (t\log t - t)\Big|_1^{\mathrm{e}} = 1.$$ ◁

Mit wiederholter partieller Integration erhält man auch die Taylorsche Formel mit Restglied in Integralform. Wegen der Wichtigkeit dieses Beispiels formulieren wir das Ergebnis als Satz.

10.18

17 **Satz von Taylor mit Integralrest** *Für $f \in C^{n+1}(I)$ und $a, a+h \in I$ gilt*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + R_a^n f(h)$$

mit dem Integralrest

$$R_a^n f(h) = \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(a+th)\,\mathrm{d}t. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Für $n = 0$ ist dies der Hauptsatz. Gilt die Formel aber für ein $n \geqslant 0$, so ergibt partielle Integration

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(a+th)\,\mathrm{d}t \\
&\quad = -\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+th)\Big|_0^1 + h\int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(a+th)\,\mathrm{d}t \\
&\quad = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} + R_a^{n+1} f(h).
\end{aligned}$$

Multipliziert mit h^{n+1} ergibt dies die Gleichung für $n+1$. ⟩⟩⟩⟩⟩

18 **Substitutionsregel** *Ist φ stetig differenzierbar auf $I = [a,b]$ und f stetig auf dem Bildintervall $\varphi(I)$, so gilt*

$$\int_a^b f(\varphi(s))\varphi'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

für das bestimmte Integral, und

$$\int f(\varphi(s))\varphi'(s)\,\mathrm{d}s = F \circ \varphi + c$$

für das unbestimmte Integral mit einer beliebigen Stammfunktion F von f. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Für eine beliebige Stammfunktion F von f gilt

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi'.$$

Daraus folgt die Gleichung für das unbestimmte Integral. Für das bestimmte Integral erhält man

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\varphi(s))\varphi'(s)\,\mathrm{d}s &= \int_a^b (F \circ \varphi)'(s)\,\mathrm{d}s \\
&= F \circ \varphi\Big|_a^b = F\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

mit zweimaliger Anwendung des Hauptsatzes. ⟩⟩⟩⟩⟩