Die ›einfache‹ Anwendung der Substitutionsregel besteht darin zu erkennen, dass der Integrand aus der Anwendung der Kettenregel hervorgegangen ist und das Integral daher die Form der linken Seite in Gleichung (3) hat.

A. Im unbestimmten Integral

$$\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$$

ist der Zähler bis auf einen Faktor die Ableitung der Funktion unter der Wurzel. Wir können daher die Substitutionsregel mit $\varphi(t) = 1 + t^2$ anwenden:

$$\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\,\mathrm{d}t.$$

Eine Stammfunktion von $1/2\sqrt{\cdot}$ ist $\sqrt{\cdot}$ 8.2. Somit erhalten wir

$$\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{1+t^2} + c.$$

Für das bestimmte Integral gilt dann

$$\int_a^b \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{1+t^2}\,\Big|_a^b.$$

B. Mit $\varphi = \log t$ wird

$$\int \frac{\log t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\log^2 t + c.$$

C.

$$\int \tan t\,\mathrm{d}t = \int \frac{\sin t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = -\log(\cos t) + c = \log\frac{1}{\cos t} + c$$

Die ›nicht so einfache‹ Anwendung der Substitutionsregel besteht darin, in einem Integral

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$$

die gegebene Integrationsvariable t so durch eine neue zu ersetzen, dass sich der Integrand vereinfacht. Die richtige Substitution kann schnell zum Ziel führen, die falsche jedoch vollends ins Dickicht. Hier wird das Integrieren teilweise zu einer Kunst, die Erfahrung und Übung erfordert.

Man setzt also $t = \varphi(x)$ mit einer – hoffentlich geeigneten – stetig differenzierbaren Funktion φ. Gemäß der Substitutionsregel ist dann $\mathrm{d}t$ durch $\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ zu ersetzen. *Formal* ergibt sich dies mit der Leibnizschen Notation, indem man

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} = \varphi'(x)$$

10.20

schreibt und zu $\mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ ›auflöst‹ [1]. Schließlich ist noch ein Intervall $[a,b]$ zu finden, dass von φ auf $[\alpha,\beta]$ abgebildet wird. Das heißt, es ist

$$\varphi(a) = \alpha, \qquad \varphi(b) = \beta$$

zu lösen. Dann gilt wieder

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(s))\varphi'(s)\,\mathrm{d}s.$$

Mit etwas Übung wird dies zur Routine … .

A. Im Integral

$$\int t\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$$

schreiben wir $1+t = x^2$, also $t = x^2-1$. Es ist dann $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$, und wir erhalten

$$\int t\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \int (x^2-1)x\cdot 2x\,\mathrm{d}x = 2\int (x^4-x^2)\,\mathrm{d}x.$$

Dies ist nun elementar lösbar. Im bestimmten Integral sind die Integrationsgrenzen noch entsprechend zu transformieren, die Grenze $t=t_0$ geht dabei über in $x_0 = \sqrt{1+t_0}$. Man erhält

$$\int_a^b t\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\int_{\sqrt{1+a}}^{\sqrt{1+b}} (x^4-x^2)\,\mathrm{d}s = \frac{2}{15}\,(3x^5-5x^3)\Big|_{\sqrt{1+a}}^{\sqrt{1+b}}.$$

B. Betrachte

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Mit der Substitution $t = \sin x$ und damit $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$ wird

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 x}\,\cos x\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

die Fläche des halben Einheitskreises. Analog erhält man

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}u = \pi.$$

Oder direkt

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t\,\Big|_{-1}^1 = \pi.$$

[1] Eine rigorose Begründung dieser Schreibweise liefert der Formalismus der Differenzialformen, siehe ›Noch mehr Analysis‹.

c. Typische Anwendungen der Substitutionsregel sind die Translation und die Streckung der Integrationsvariablen:

$$\int_a^b f(t+c)\,\mathrm{d}t = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad x = t+c,$$

$$\int_a^b f(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \lambda^{-1}\int_{\lambda a}^{\lambda b} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad x = \lambda t,$$

$$\int_a^b f(t^n)t^{n-1}\,\mathrm{d}t = n^{-1}\int_{a^n}^{b^n} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad x = t^n.$$

wobei $\lambda \neq 0$ und $n \geqslant 1$. ◅

10.6 Uneigentliche Integrale

Das Integral haben wir bisher für Funktionen definiert, die auf einem *kompakten* Intervall definiert und dort integrierbar und damit auch *beschränkt* sind. Dies reicht auf die Dauer jedoch nicht aus. Wir wollen, wenn möglich, auch Funktionen auf *unbeschränkten* Intervallen sowie *unbeschränkte* Funktionen integrieren.

Betrachte dazu eine Funktion

$$f\colon\ [a,b) \to \mathbb{R}$$

mit $a < b \leqslant \infty$. Das Intervall ist also entweder rechts unbeschränkt, oder die Funktion ist möglicherweise an der rechten Intervallgrenze unbeschränkt.

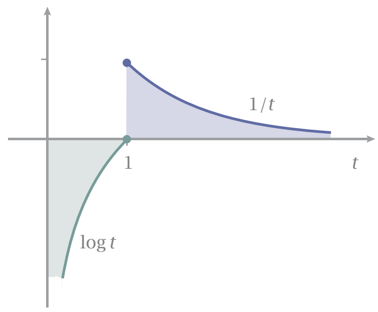
Definition *Es sei $a < b \leqslant \infty$, und die Funktion $f\colon\ [a,b) \to \mathbb{R}$ sei über jedem kompakten Teilintervall $[a,c] \subset [a,b)$ integrierbar. Existiert der Limes*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{c \nearrow b}\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t,$$

so heißt er das uneigentliche Integral von f über $[a,b]$, und man sagt, das uneigentliche Integral konvergiert. Andernfalls divergiert es. — Entsprechendes erklärt man für Funktionen $f\colon\ (a,b] \to \mathbb{R}$ mit $-\infty \leqslant a < b$. ⋊

Abb 8

Zwei uneigentliche Integrale



▷ A. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{r\to\infty}\int_0^r \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\lim_{r\to\infty}\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^r = \lim_{r\to\infty}(1-\mathrm{e}^{-r}) = 1.$

B. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\lim_{\varepsilon\searrow 0}\sqrt{t}\,\Big|_\varepsilon^1 = 2\lim_{\varepsilon\searrow 0}(1-\sqrt{\varepsilon}) = 2.$

C. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\lim_{r\to\infty}\sqrt{t}\,\Big|_1^r = 2\lim_{r\to\infty}(\sqrt{r}-1) = \infty.$ ◁

Ein an beiden Integrationsgrenzen uneigentliches Integral wird auf zwei einseitig unbestimmte Integrale zurückgeführt:

Definition *Es sei $\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ und die Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ sei über jedem kompakten Teilintervall von (a,b) integrierbar. Existieren für ein $c \in (a,b)$ dessen uneigentliche Integrale über $(a,c]$ und $[c,b)$, so heißt*

$$\int_a^b f(t)dt \coloneqq \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

das uneigentliche Integral von f über (a,b). ⋊

Die Existenz und der Wert dieses Integrals hängen nicht von der Wahl des Teilungspunktes c ab, wie man sich leicht überlegt.

▷ A. Es existieren

$$\int_0^\infty 2t\mathrm{e}^{-t^2} = -\mathrm{e}^{-t^2}\Big|_0^\infty = 1, \qquad \int_{-\infty}^0 -2t\mathrm{e}^{-t^2} = \mathrm{e}^{-t^2}\Big|_{-\infty}^0 = 1.$$

Daraus folgt $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty |t|\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 2.$

B. Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ *existiert nicht*, obwohl aus Symmetriegründen

$$\int_{-r}^r \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0, \qquad r > 0,$$

und dasselbe daher auch dessen Limes für $r \to \infty$ gilt. ◁

Im Folgenden betrachten wir der Einfachheit halber den Fall, dass die uneigentliche Integrationsgrenze rechts liegt. Der andere Fall wird analog behandelt.

Integrale über kompakte Teilintervalle spielen für uneigentliche Integrale quasi die Rolle von *Partialsummen*, wie der folgende Satz zeigt.

19 **Satz** *Es sei $a < b \leqslant \infty$, und die Funktion $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ sei über jedem kompakten Teilintervall integrierbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ konvergiert.*
(ii) *Es gibt eine Stammfunktion F von f, so dass $\lim_{c \nearrow b} F(c)$ existiert.*
(iii) *Für jede Stammfunktion F von f existiert $\lim_{c \nearrow b} F(c)$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Das uneigentliche Integral existiert *per definitionem* genau dann, wenn der Grenzwert

$$\lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{c \nearrow b} \left(F \Big|_a^c \right) = \lim_{c \nearrow b} F(c) - F(a)$$

für eine beliebige Stammfunktion F von f existiert. Stammfunktionen von f unterscheiden sich aber nur durch eine additive Konstante, und diese hat keinen Einfluss auf die Existenz dieses Grenzwerts. ⟩⟩⟩⟩⟩

Uneigentliche Integrale verhalten sich in vielerlei Hinsicht wie Reihen, wie die folgenden Definitionen und Sätzen zeigen.

20 **Definition und Satz** *Das Integral $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ heißt absolut konvergent, falls das Absolutintegral $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn letzteres beschränkt ist. In diesem Fall ist das Integral $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ auch konvergent.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Die durch

$$F(t) = \int_a^t |f(s)|\,\mathrm{d}s$$

definierte Stammfunktion F des Absolutintegrals ist auf $[a,b)$ monoton steigend. Sie konvergiert somit für $t \nearrow b$ genau dann, wenn sie beschränkt ist, also $\int_a^b |f(s)|\,\mathrm{d}s$ existiert. Aufgrund der Dreiecksungleichung

$$\left| \int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_u^v |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

impliziert absolute Konvergenz die einfache Konvergenz. ⟩⟩⟩⟩⟩

Majorantenkriterium *Gilt* $|f| \leqslant g$ *auf* $[a, b)$ *und existiert das uneigentliche Integral* $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$*, so ist* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *absolut konvergent.* ⋊

Nützliche Majoranten sind zum Beispiel die Funktionen $t^{-\alpha}$ auf $(0, \infty)$, für die Folgendes gilt.

21 **Satz** *Es gilt*

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1 \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1.$$

Insbesondere divergieren beide Integrale für $\alpha = 1$*.* ⋊

Bemerkung In diesem Satz kann man die Integrationsgrenze 1 natürlich durch jede andere positive reelle Zahl ersetzen. ⊸

⟨⟨⟨⟨⟨ Für $\alpha \neq 1$ ist

$$(1-\alpha)\int_1^r \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = t^{1-\alpha}\Big|_1^r = r^{1-\alpha} - 1.$$

Die rechte Seite konvergiert für $r \to \infty$ genau für $1 - \alpha < 0$ und für $r \to 0$ genau für $1 - \alpha > 0$. Das ergibt die erste Behauptung. Für $\alpha = 1$ ist

$$\int_1^r \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log t\Big|_1^r = \log r,$$

und dies divergiert für $r \to \infty$ *und* für $r \to 0$. ⟩⟩⟩⟩⟩

▷ A. Das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

ist absolut konvergent für $\alpha > 1$, denn $t^{-\alpha}$ ist eine konvergente Majorante.

B. Das Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

ist ebenfalls konvergent, aber nicht absolut konvergent A-26. ◁

▪ Reihen

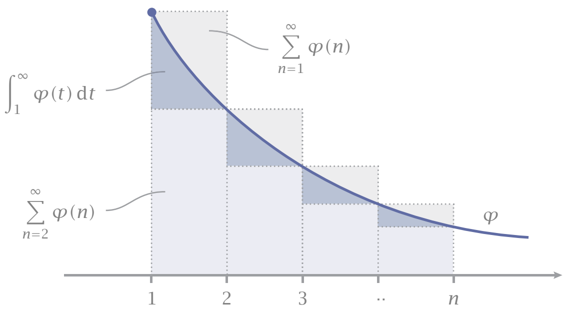
Jede Reihe lässt sich als ein uneigentliches Integral schreiben, indem man eine passende, stückweise konstante Funktion definiert. So ist

$$\sum_{k=1}^\infty a_k = \int_1^\infty a(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{mit} \qquad a \coloneqq \sum_{n=1}^\infty a_n \chi_{[n,n+1)}.$$

Entsprechend kann man viele Reihen durch Integrale majorisieren, was viele Konvergenzbetrachtungen vereinfacht.

Abb 9

Zum Integralkriterium



22 **Integralkriterium** *Ist die Funktion $\varphi\colon [1,\infty) \to (0,\infty)$ monoton fallend und auf jedem kompakten Teilintervall integrierbar, so gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \asymp \int_1^\infty \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Das heißt, beide Seiten haben dasselbe Konvergenzverhalten. Genauer gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty} \varphi(n) \leqslant \int_1^\infty \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n).$$ ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Da φ positiv ist, sind

$$s(n) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \varphi(k), \qquad S(t) \coloneqq \int_1^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s$$

beide monoton steigend. Konvergenz ist also in beiden Fällen gleichbedeutend mit Beschränktheit. Da φ monoton fällt, gilt

$$\varphi(k-1) \geqslant \varphi(t) \geqslant \varphi(k), \qquad t \in [k-1,k],$$

und deshalb

$$\varphi(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi(k-1), \qquad k \geqslant 2.$$

Summieren über $k = 2,..,n$ ergibt

$$s(n) - \varphi(1) \leqslant S(n) \leqslant s(n-1).$$

Daraus folgen alle Behauptungen. ⟩⟩⟩⟩⟩

▹▸ Es gilt $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\log n} = \infty$, denn

$$\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t\log t} = \log(\log t)\Big|_2^\infty = \infty.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt andererseits

$$\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t\log^{1+\varepsilon} t} = -\frac{1}{\varepsilon\log^\varepsilon t}\Big|_2^\infty = \frac{1}{\varepsilon\log^\varepsilon 2} < \infty,$$

und damit auch

$$\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\log^{1+\varepsilon} n} < \infty.$$

Zum selben Ergebnis gelangt man mit dem Verdichtungskriterium $_{6.13}$. ◂◃