5. Vorlesung 3.5.2021

Physikalische Notation:

t, $x(t)$,

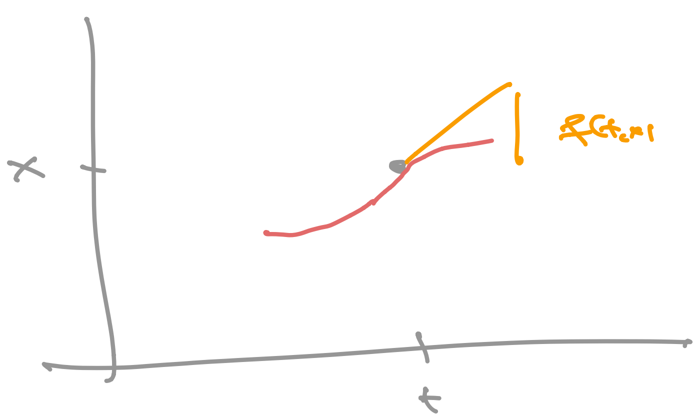
Ableitung: $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$

Mathematische:

x, $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$

$$\boxed{y' = f(x,y).}$$

$$\dot{x} = \underbrace{f(t,x)}$$



Beispiele:

1. $\dot{x} = 0$ Lösung: $\varphi : t \mapsto c$

2. $\dot{x} = f(t)$, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.

x Stammfunktion von f

Richtungsfeld unabhängig von Ort x.

3. Wachstumsgesetz: autonom:

$$\dot{x} = ax, \qquad a \neq 0.$$

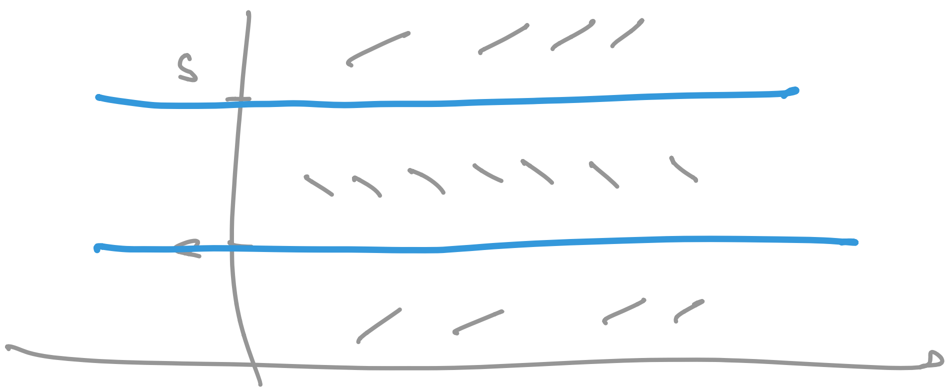
Lsg:

$$\varphi(t) = e^{at} c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

4. Beispiel autonom:

$$\dot{x} = (x-a)(x-b), \qquad a<b$$

$$\begin{cases} = 0, & x=a \lor x=b \\ < 0, & a<x<b \\ > 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$



Beispiele:

1. $\dot{x} = f(t)$, $\quad x(t_0) = c$

$$\varphi(t) = c + \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds.$$

2. $\dot{x} = 2x$, $\quad x(t_0) = x_0$

$$x(t) = e^{2t} c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$x(t_0) = x_0 \iff e^{2t_0} = x_0$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(t) = e^{2(t-t_0)} x_0.$$

Bsp.:

1. $\dot{x} = 2x$

$\dot{x} = 2x + 8$

2. $\dot{x} = 2tx + 2t^3$

3. $\dot{x} = -\frac{x}{t}$, $\quad t \neq 0$

Beweis: Fundamental Lsg!

Zu: $\dot{A}(t) = a(t)$, also:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= e^{A(t)}\,\dot{A}(t)\,c \\ &= e^{A(t)}\,a(t)\,c \\ &= a(t)\,\underbrace{e^{A(t)}\,c} \\ &= a(t)\,\varphi(t).\end{aligned}$$

✓

Bleibt zu zeigen: allgemeine Lsg:

Sei φ_2 eine Lösung von $\dot{x} = ax$.

Betrachte $\psi(t) = e^{-A(t)}\varphi_2(t)$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\psi(t) &= \dot{\psi}(t) \\ &= e^{-A(t)}\,\dot{\varphi} + e^{-A(t)}\,\varphi\cdot(-a(t)) \\ &= e^{-A(t)}\,a\varphi + (-a\varphi)\cdot e^{-A(t)} \\ &\equiv 0\end{aligned}$$

Also: $\varphi(t)$ ist Lösung:

$$\varphi(t) \equiv c$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^{-A(t)}\varphi(t) = c \qquad \Big|\cdot \underbrace{e^{A(t)}}_{\neq 0}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \varphi(t) = e^{A(t)}c. \qquad \boxtimes$$

Bem.: Egal, andere Stammf.!

$$\tilde{A}(t) = A(t) + d$$

$$\varphi(t) = e^{\tilde{A}(t)}c$$

$$= e^{A(t)} \cdot e^{d} \cdot c$$

$$= e^{A(t)} \cdot \tilde{c} \qquad \boxtimes$$

Bsp:

1. $\dot{x} = ax$, $a \in \mathbb{R}$

Lösung:
$$\varphi(t) = e^{at} c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

at Stammfunktion von a.

$(at)' = a$.

2. $\dot{x} = -\frac{x}{t}$, $t > 0$

$$a(t) = -\frac{1}{t}$$
$$A(t) = \int_1^t \left(-\frac{1}{s}\right) ds = -\log t$$

Also:
$$\varphi(t) = e^{A(t)} c = e^{-\log t} \cdot c = \frac{c}{t},$$
$c \in \mathbb{R}$.

Bem.: allgemeine Lösung:
$$\varphi(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)\,ds\right) c.$$

$\varphi(t_0) = x_0$:

$$\exp(0) \cdot c = x_0,$$

$$c = x_0.$$ $\square$

Wie findet man eine Lösung zu

$$\dot{x} = a(t)\, x \qquad ?$$

Zu $\dot{x} = a x$ kennen wir $e^{at} x$

Ansatz: $\varphi(t) = e^{A(t)}$?

Dann

$$\dot{\varphi}(t) = e^{A(t)} \cdot \dot{A}(t)$$

$$\dot{\varphi}(t) = a(t)\, \varphi(t) = a(t)\, e^{A(t)}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{A}(t) = a(t)$$

Beweis: Ist φ_0 eine partikuläre Lösung und φ eine Lösung der homogenen Gl., dann gilt:

$$(\varphi + \varphi_0)' = \dot{\varphi} + \dot{\varphi}_0$$
$$= a\varphi + a\varphi_0 + b$$
$$= a(\varphi + \varphi_0) + b$$

Umgekehrt: Ist ψ eine spezielle Lösung der inhomogenen Glg., so ist

$$\psi - \varphi_0 = \varphi$$

eine Lösung der homogenen Glg.

Also: $\psi = \varphi_0 + \varphi$

Wie finden wir eine partikuläre Lsg?

Variation der Konstanten:

Ansatz: $e^{A(t)} c(t)$ Lsg von $\dot{x} = a(t)x + b(t)$

Dann

$$(e^{A} c)^{\cdot} = e^{A} \dot{A} c + e^{A} \dot{c}$$
$$= e^{A} a c + e^{A} \dot{c}$$

und

$$(e^{A} c)^{\cdot} = a\, e^{A} c + b$$

Also muss gelten:

$$e^{A} \dot{c} = b.$$

$$\iff \quad \dot{c} = \underbrace{e^{-A(t)} b(t)}_{\text{bekannte Fkt. von } t}$$

Stammfunktionsbildung

$$c(t) = \int e^{-A(t)} b(t)\, dt.$$

$$\varphi(t) = e^{A(t)} c(t)$$

$$\varphi(t) = e^{A(t)} \left(c + c_0(t) \right)$$

$$= \underbrace{e^{A(t)} c}_{\text{allg. L. homog.}} + \underbrace{e^{A(t)} c_0(t)}_{\text{part. L. inhomog.}}$$

$$\varphi(t_0) = e^{\overbrace{\cancel{A(t_0)}}^{=0}} \left(x_0 + \overbrace{\cancel{\int_{t_0}^{t_0} \dots}}^{=0} \right)$$

$$= x_0 .$$

Bsp.:

$$\dot x = 2t\,x + 2t^3 .$$

$$a(t) = 2t \quad \rightsquigarrow \quad A(t) = t^2 .$$

Allg. Lösung:

$$\varphi(t) = e^{t^2}\Big(c + 2\underbrace{\int_0^t e^{-s^2} s^3\,ds}\Big), \quad c \in \mathbb{R}$$

Substitution: $s^2 = u$

$2s\,ds = du$

$$= \int_0^{t^2} u\,e^{-u}\,du = 1 + (t^2-1)\,e^{-t^2} .$$

Also:

$$\varphi(t) = c\,e^{t^2} - t^2 - 1 .$$

Kontrolle: $\dot\varphi(t) = \dots$

$h(x_0) = 0$

Konstante Lösung: $\varphi(t) = x_0$:

$$0 = \dot\varphi(t) = g(t)\,h(\varphi(t))$$

$$= g(t)\,h(x_0) = 0 \quad ✓$$

Beweis: Seien φ und ψ zwei Lösungen derselben AWP. Dann:

$$(\varphi(t) - \psi(t)) = (\varphi(t) - \psi(t))\Big|_{t_0}^{t}$$

$$= (\varphi - \psi)\Big|_{t_0}^{t}$$

$$= \int_{t_0}^{t} (\dot\varphi - \dot\psi)\, ds$$

$$= \int_{t_0}^{t} \underline{g(s)\big(h(\varphi(s)) - h(\psi(s))\big)}\, ds$$

Betrachte $[t_0, b] \subset I$.

$$\|g\|_{[t_0,b]} = K < \infty.$$

$$|h(u) - h(v)| \leq L \cdot |u - v|.$$

Damit:

$$\boxed{|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \int_{t_0}^{t} K L\, |\varphi(s) - \psi(s)|\, ds}$$

Für $u(t) = |\varphi(t) - \psi(t)| \geq 0$:

$$\boxed{0 \leq u(t) \leq L_\varphi \cdot \int_{t_0}^{t} u(s)\,ds}$$

Dann [illegible] gilt: $u \equiv 0$.

$\iff \varphi \equiv \psi$. $\boxtimes$