11

Elementare Differenzialgleichungen

Differenzialgleichungen stellen eine Beziehung her zwischen einer oder mehreren Funktionen und ihren Ableitungen. Da Ableitungen Veränderungen beschreiben, modellieren Differenzialgleichungen ganz allgemein das Veränderungsverhalten von Systemen.

Wir beschränken uns hier auf den einfachsten Fall einer *skalaren* Größe x, die nur von *einer* unabhängigen Variablen abhängt, der Zeit:

$$t \mapsto x(t).$$

Eine Differenzialgleichung betrifft in diesem Fall die Größe x und endlich viele ihrer Ableitungen $\dot{x}, \ddot{x}, ..$ nach der Zeit t. Beschränken wir uns auch hier auf den einfachsten Fall, so haben wir es mit Differenzialgleichungen *erster Ordnung* zu tun, die nur $t, x, \dot{x}$ involvieren und allgemein die *implizite Form*

$$F(t, x, \dot{x}) = 0$$

haben. Am einfachsten sind solche Gleichungen in *expliziter* Form,

$$\dot{x} = f(t, x),$$

und nur solche wollen wir jetzt betrachten.

Die hier verwendete Notation ist die *physikalische Notation*, wo die unabhängige Variable als Zeit aufgefasst wird. In der *mathematischen Notation* übernimmt x diese Rolle, und die abhängige Größe wird meist mit y bezeichnet. Die letzte Gleichung lautet dann

$$y' = f(x, y).$$

Auf diesen Unterschied ist beim Studium der Literatur zu achten.

11.1 Grundbegriffe

Definition *Sei I ein Intervall, $D \subset \mathbb{R}$ offen, und $f : I \times D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt*

$$\dot{x} = f(t,x), \qquad (t,x) \in I \times D, \tag{1}$$

eine Differenzialgleichung erster Ordnung auf $I \times D$. Eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist eine differenzierbare Abbildung $\varphi : J \to D$ mit einem nichtleeren Intervall $J \subset I$, so dass

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)), \qquad t \in J. \quad \rtimes \tag{2}$$

Die Differenzialgleichung heißt autonom, wenn die Funktion f nicht explizit von der Zeit t abhängt, sie also von der Form

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in D,$$

ist. Andernfalls heißt die Gleichung nichtautonom.

Bemerkungen *a.* Genauer handelt es sich um eine *explizite skalare Differenzialgleichung erster Ordnung*. *Explizit*, weil die Gleichung nach $\dot{x}$ aufgelöst, *skalar*, weil x eindimensional und reell ist, und *erster Ordnung*, da nur die erste Ableitung $\dot{x}$ auftritt.

b. Es wäre zu einschränkend zu verlangen, dass eine Lösung φ auf dem ganzen Intervall I erklärt ist. Sie kann zum Beispiel vorzeitig den Definitionsbereich D verlassen. ⊸

Geometrisch betrachtet handelt es sich bei der rechten Seite der Differenzialgleichung (1) um ein *Richtungsfeld*. In jedem Punkt $(t,x) \in I \times D$ schreibt die Funktion f vor, welche *Richtung* oder *Steigung* die Tangente einer Lösung einnimmt, falls sie durch diesen Punkt verläuft. Gleichung (2) verlangt genau dies von einer Lösung φ. Eine Betrachtung des Richtungsfeldes kann oft schon Aufschluss über die Gestalt seiner Lösungskurven geben.

▷ A. Die einfachste Differenzialgleichung ist sicherlich

$$\dot{x} = 0.$$

Jede Lösung ist eine konstante Funktion $\varphi : t \mapsto c$. Dies ist nicht weiter interessant.

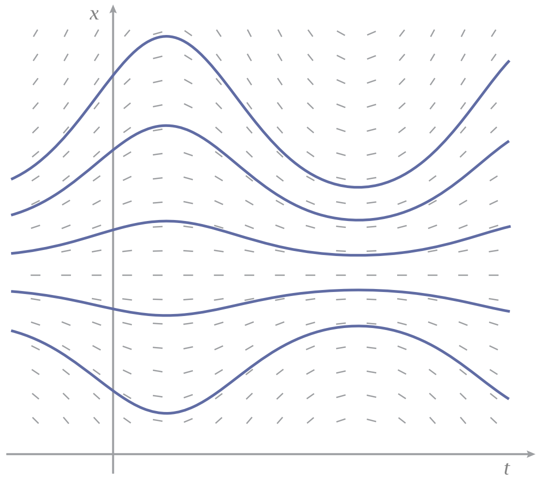
B. Die Gleichung

$$\dot{x} = f(t)$$

mit stetigem $f : I \to \mathbb{R}$ ist keine ›echte‹ Differenzialgleichung, da die rechte Seite nicht von x abhängt. Das zugehörige Richtungsfeld ist somit invariant

Abb 1

Ein Richtungsfeld mit fünf Lösungskurven



unter Translationen in der x-Richtung, also *ortsunabhängig*. Ihre Lösungen sind die *Stammfunktionen* von f. Diese unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante, gehen also durch vertikale Translation ineinander über Abb 2.

c. Das wohl einfachste Beispiel einer autonomen Differenzialgleichung ist das *Wachstumsgesetz*

$$\dot{x} = ax$$

mit konstantem Koeffizienten $a \neq 0$, mit dessen Hilfe wir bereits die Exponentialfunktion definiert hatten. Jede Lösung ist von der Form 9.1

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{at}c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Abb 2

Ortsunabhängiges Richtungsfeld

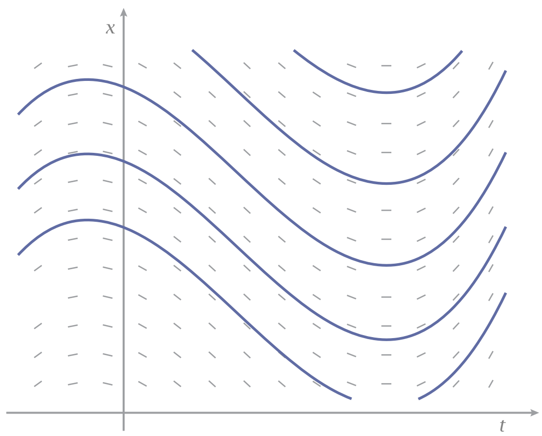
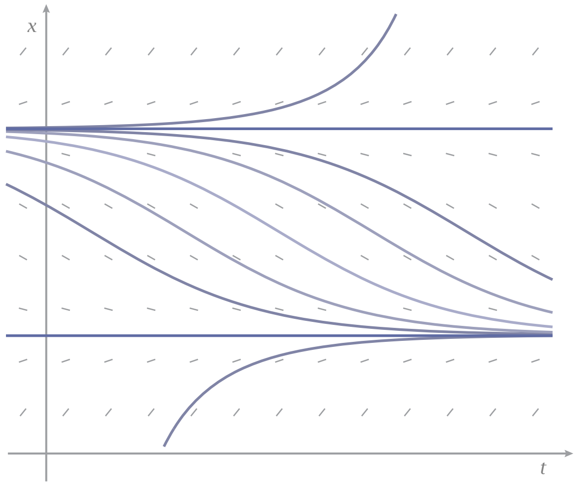


Abb 3 Zeitunabhängiges Richtungsfeld



D. Das Richtungsfeld der autonomen Differenzialgleichung

$$\dot{x} = (x - a)(x - b), \qquad a < b,$$

mit einigen Lösungen ist in Abbildung 3 skizziert.

Die Beispiele zeigen, dass eine Lösung durch eine Differenzialgleichung allein nicht eindeutig bestimmt wird. Das ist auch nicht überraschend, denn eine solche Gleichung bestimmt ja nur deren *Veränderungsverhalten*, nicht aber ihre *absolute* Position. Dazu bedarf es weiterer Daten, zum Beispiel eines Anfangswertes. Die Kombination beider Daten bezeichnet man als *Anfangswertproblem*.

Definition *Unter einem zur Differenzialgleichung* (1) *gehörenden Anfangswertproblem versteht man das System*

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0,$$

wobei $(t_0, x_0) \in I \times D$. *Eine lokale Lösung ist eine Lösung* $\varphi \colon I_0 \to D$ *dieser Differenzialgleichung mit*

$$\varphi(t_0) = x_0, \qquad t_0 \in I_0 \subset I.$$

Eine lokale Lösung ist also eine Lösung der Differenzialgleichung, die auf einem beliebig kleinen Intervall I_0 um die *Anfangszeit* t_0 definiert ist und zu diesem Zeitpunkt den *Anfangswert* x_0 annimmt.

11.4

▹ Wir greifen die vorangehenden Beispiele auf. Das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t), \qquad x(t_0) = c$$

hat die eindeutige Lösung

$$\varphi(t) = c + \int_{t_0}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Für das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = ax, \qquad x(t_0) = x_0$$

finden wir

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{a(t-t_0)}x_0,$$

indem wir die Gleichung $\mathrm{e}^{at_0}c = x_0$ nach c auflösen. ◃

Ein Anfangswertproblem besitzt unter sehr allgemeinen Bedingungen an die rechte Seite immer eine eindeutige lokale Lösung – dies ist der lokale Existenz- und Eindeutigkeitssatz, den wir später im Kapitel über gewöhnliche Differenzialgleichungen behandeln. In den speziellen Fällen, die wir im Folgenden betrachten, können wir die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen allerdings direkt zeigen und daher auf die große Maschine vorläufig verzichten.

11.2 Lineare Differenzialgleichungen

Definition *Eine lineare Differenzialgleichung erster Ordnung ist von der Form*

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)$$

mit auf einem Intervall I stetigen Funktionen a und b. Sie heißt homogen, falls $b = 0$, andernfalls inhomogen. ⋊

▪ Der homogene Fall

Wir lösen zuerst die homogene Gleichung $\dot{x} = a(t)x$. Dies ist nichts anderes als ein zeitabhängiges Wachstumsgesetz, dessen Lösungen ebenfalls durch Exponenzialfunktionen beschrieben werden.

Eine parameterabhängige Familie von Lösungen heißt *allgemeine Lösung* einer Differenzialgleichung, wenn sie *sämtliche Lösungen* dieser Gleichung umfasst.

11.5

Satz *Sei a stetig auf dem Intervall I. Dann ist die allgemeine Lösung von*

$$\dot{x} = a(t)x \tag{3}$$

gegeben durch

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{A(t)}c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

mit einer beliebigen Stammfunktion A von a. Sie existiert auf ganz I. ⋊

Die Gesamtheit aller Lösungen von $\dot{x} = a(t)x$ bildet somit einen eindimensionalen reellen Vektorraum

$$L_0 = \{\mathrm{e}^{A(t)}c : c \in \mathbb{R}\}.$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Offensichtlich ist dies für jedes c eine Lösung, denn

$$\dot{\varphi} = \mathrm{e}^{A}\dot{A}c = \mathrm{e}^{A}ac = a\varphi.$$

Bleibt zu zeigen, dass *jede* Lösung von dieser Form ist. Nun, ist φ eine *beliebige* Lösung, dann gilt

$$(\mathrm{e}^{-A}\varphi)^{\cdot} = \mathrm{e}^{-A}\dot{\varphi} - \mathrm{e}^{-A}\dot{A}\varphi = \mathrm{e}^{-A}a\varphi - \mathrm{e}^{-A}a\varphi = 0.$$

Also ist $\mathrm{e}^{-A}\varphi = c$ eine reelle Konstante, und die Behauptung folgt. ⟩⟩⟩⟩⟩

▷ A. Für konstantes a ist die allgemeine Lösung von $\dot{x} = ax$ gegeben durch

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{at}c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

B. Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$\dot{x} = -\frac{x}{t}, \qquad t > 0,$$

ist

$$\varphi(t) = c\exp\left(-\int_1^t \frac{\mathrm{d}s}{s}\right) = c\exp(-\log t) = \frac{c}{t}.$$ ◁

Zusatz *Das zugehörige Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = a(t)x, \qquad x(t_0) = x_0$$

besitzt auf I die eindeutige Lösung

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s\right)x_0.$$ ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Nach dem eben bewiesenen Satz ist jede Lösung von der Form

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s\right)c.$$

Die Bedingung $\varphi(t_0) = x_0$ ergibt dann $c = x_0$. ⟩⟩⟩⟩⟩

11.6

Bemerkung *A posteriori* – im Nachhinein – ist es leicht, die Korrektheit einer Lösung zu verifizieren – man muss ja nur Differenzieren und Einsetzen. Das Problem ist, überhaupt eine zu finden. Im Falle der Gleichung $\dot{x} = a(t)x$ hilft der *Ansatz*

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{\Phi(t)},$$

denn die Lösung sollte wohl etwas mit der Exponentialfunktion zu tun haben. Dann ist aber notwendigerweise

$$\dot{\varphi} = \mathrm{e}^{\Phi}\dot{\Phi} \stackrel{!}{=} a\varphi = a\mathrm{e}^{\Phi},$$

und damit $\dot{\Phi} = a$. Also muss Φ eine Stammfunktion von a sein. ⊸

▪ Der inhomogene Fall

Wir betrachten nun die inhomogene lineare Differenzialgleichung

$$\dot{x} = a(t)x + b(t). \tag{4}$$

Wie bei linearen Gleichungssystemen auch, kann man diesen Fall auf die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung plus einer partikulären – also irgendeiner einzelnen – Lösung der inhomogenen Gleichung zurückführen.

Satz *Sei φ_0 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung* (4). *Dann ist jede andere Lösung von der Form $\varphi_0 + \varphi$ mit einer Lösung φ der homogenen Gleichung* (3). ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist φ_0 eine partikuläre und φ eine homogene Lösung, so ist

$$(\varphi_0 + \varphi)^{\cdot} = \dot{\varphi}_0 + \dot{\varphi} = a\varphi_0 + b + a\varphi = a(\varphi_0 + \varphi) + b,$$

also $\varphi_0 + \varphi$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Ist umgekehrt ψ irgendeine Lösung der inhomogenen Gleichung, so ist mit derselben Rechnung $\psi - \varphi_0 = \varphi$ eine Lösung der homogenen Gleichung. ⟩⟩⟩⟩⟩

Die Gesamtheit aller Lösungen der inhomogenen Gleichung (4) bildet somit einen eindimensionalen *affinen* Raum

$$L = \varphi_0 + L_0 = \{\varphi_0 + \mathrm{e}^{A(t)}c : c \in \mathbb{R}\} \tag{5}$$

mit einer partikulären Lösung φ_0 und einer Stammfunktion A von a. Man überzeuge sich, dass dieser Raum nicht von der Wahl von φ_0 und A abhängt $_{\text{A-2}}$.

Es bleibt die Frage, wie man eine partikuläre Lösung findet. Hier hilft die Idee der *Variation der Konstanten*[1], die auf Lagrange zurückgeht: wenn $\mathrm{e}^{A(t)}c$ die

[1] Dieser Begriff ist ein Widerspruch in sich, trifft die Sache aber genau.

homogene Gleichung löst, so löst sie vielleicht auch die inhomogene Gleichung, wenn die Konstante c sich in geeigneter Weise mit t ändert, also eine Funktion von t wird. Dann ist auf der einen Seite

$$(\mathrm{e}^A c)^{\cdot} = \mathrm{e}^A \dot{A} c + \mathrm{e}^A \dot{c} = \mathrm{e}^A a c + \mathrm{e}^A \dot{c}.$$

Auf der anderen Seite soll diese Funktion die Differenzialgleichung erfüllen, also

$$(\mathrm{e}^A c)^{\cdot} = a\mathrm{e}^A c + b$$

gelten. Vergleich dieser beiden Gleichungen ergibt $\mathrm{e}^A \dot{c} = b$, also

$$\dot{c} = \mathrm{e}^{-A} b.$$

Diese Gleichung ist durch Integration lösbar, denn die rechte Seite ist bekannt. Ist also c_0 eine Stammfunktion von $\mathrm{e}^{-A} b$, so ist $\mathrm{e}^A c_0$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung. Insgesamt erhalten wir damit folgendes Ergebnis.

Satz *Die Funktionen a und b seien stetig auf dem Intervall I. Dann ist die allgemeine Lösung von $\dot{x} = a(t)x + b(t)$ gegeben durch*

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{A(t)}(c + c_0(t)), \qquad c \in \mathbb{R},$$

mit einer Stammfunktion A von a und einer Stammfunktion c_0 von $\mathrm{e}^{-A} b$. ⋊

Schreiben wir dies im Detail aus, so ergibt sich für die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems folgendes Ergebnis.

1 **Satz** *Seien a und b stetig auf I. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

auf I die eindeutige Lösung

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\,\mathrm{d}s \right), \qquad A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s. \qquad ⋊$$

Bemerkung Diese Formel ist allerdings eher für theoretische Untersuchungen von Bedeutung. In der Praxis löst man zuerst die homogene Gleichung und konstruiert anschließend per Variation der Konstanten direkt eine partikuläre Lösung. Das ist einfacher und weniger fehleranfällig. ⊸

▹ Betrachte die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = 2tx + 2t^3.$$

Eine Stammfunktion von $2t$ ist t^2, die allgemeine Lösung lautet deshalb

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{t^2} \left(c + 2\int_0^t \mathrm{e}^{-s^2} s^3\,\mathrm{d}s \right),$$

wobei wir von der Freiheit Gebrauch machen, eine uns bequeme Stammfunktion zu wählen. Mittels Substitution $s^2 = u$ und partieller Integration erhält man

$$2\int_0^t \mathrm{e}^{-s^2} s^3 \,\mathrm{d}s = \int_0^{t^2} u\mathrm{e}^{-u} \,\mathrm{d}u = 1 - (t^2+1)\mathrm{e}^{-t^2}.$$

Also ist

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{t^2} c - t^2 - 1, \qquad c \in \mathbb{R},$$

wobei wir noch von der Freiheit Gebrauch machen, $c+1$ durch c zu ersetzen. ◅

11.3 Separierbare Differenzialgleichungen

Eine *separierbare Differenzialgleichung*, auch *Differenzialgleichung mit getrennten Variablen* genannt, ist von der Form

$$\dot{x} = g(t)h(x) \tag{6}$$

mit stetigen Funktionen g und h auf Intervallen I respektive J. Ihr Definitionsbereich ist das Rechteck $I \times J$ in der (t,x)-Ebene.

Besonders einfach findet man Lösungen, wenn der Faktor h Nullstellen besitzt. Ist

$$h(x_0) = 0$$

für ein $x_0 \in J$, so ist die konstante Funktion $\varphi \equiv x_0$ eine Lösung, denn

$$\dot{\varphi}(t) = 0 = g(t)h(x_0) = g(t)h(\varphi(t)), \qquad t \in I.$$

Ist noch eine Lipschitzbedingung erfüllt, so ist dies auch die einzige solche Lösung:

Satz *Die Funktionen g und h seien stetig. Ist x_0 eine Nullstelle von h, so ist die konstante Funktion $\varphi \equiv x_0$ Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{x} = g(t)h(x), \qquad x(t_0) = x_0.$$

Ist h sogar lipschitzstetig, so ist es auch die einzige Lösung. ⋊

11.9

⟨⟨⟨⟨⟨ Die Existenz dieser Lösung haben wir gerade gezeigt. Um ihre Eindeutigkeit zu zeigen, seien φ und ψ zwei Lösungen desselben Anfangswertproblems. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\varphi-\psi)(t) = (\varphi-\psi)\Big|_{t_0}^{t} &= \int_{t_0}^{t} (\dot\varphi-\dot\psi)(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{t_0}^{t} g(s)\,[h(\varphi(s))-h(\psi(s))]\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Auf einem beliebigen kompakten Intervall $[t_0,b] \subset I$ ist g beschränkt, also $\|g\|_{[t_0,b]} \leqslant K$. Außerdem ist h auf J lipschitz mit einer gewissen L-Konstante L. Für $t_0 \leqslant t \leqslant b$ gilt also

$$\begin{aligned}|(\varphi-\psi)(t)| &\leqslant \int_{t_0}^{t} |g(s)|\,|h(\varphi(s))-h(\psi(s))|\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant KL\int_{t_0}^{t} |(\varphi-\psi)(s)|\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Für die stetige Funktion $u = |\varphi-\psi|$ gilt mit $M = KL$ somit

$$0 \leqslant u(t) \leqslant M\int_{t_0}^{t} u(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant b.$$

Dann aber muss u für $t_0 \leqslant t \leqslant b$ identisch verschwinden – siehe Aufgabe 4 – und somit ist dort $\varphi = \psi$.

Für ein beliebiges kompaktes Intervall $[a,t_0] \subset I$ argumentiert man entsprechend. ⟩⟩⟩⟩⟩