Die Existenz dieser Lösung haben wir gerade gezeigt. Um ihre Eindeutigkeit zu zeigen, seien φ und ψ zwei Lösungen desselben Anfangswertproblems. Dann gilt

$$(\varphi - \psi)(t) = (\varphi - \psi)\Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} (\dot\varphi - \dot\psi)(s)\,\mathrm{d}s$$
$$= \int_{t_0}^{t} g(s)\,[h(\varphi(s)) - h(\psi(s))]\,\mathrm{d}s.$$

Auf einem beliebigen kompakten Intervall $[t_0, b] \subset I$ ist g beschränkt, also $\|g\|_{[t_0,b]} \leqslant K$. Außerdem ist h auf J lipschitz mit einer gewissen L-Konstante L. Für $t_0 \leqslant t \leqslant b$ gilt also

$$|(\varphi - \psi)(t)| \leqslant \int_{t_0}^{t} |g(s)|\,|h(\varphi(s)) - h(\psi(s))|\,\mathrm{d}s$$
$$\leqslant KL \int_{t_0}^{t} |(\varphi - \psi)(s)|\,\mathrm{d}s.$$

Für die stetige Funktion $u = |\varphi - \psi|$ gilt mit $M = KL$ somit

$$0 \leqslant u(t) \leqslant M \int_{t_0}^{t} u(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant b.$$

Dann aber muss u für $t_0 \leqslant t \leqslant b$ identisch verschwinden – siehe Aufgabe 4 – und somit ist dort $\varphi = \psi$.

Für ein beliebiges kompaktes Intervall $[a, t_0] \subset I$ argumentiert man entsprechend.

2 Die Lipschitzbedingung ist *notwendig*. Das Standardbeispiel hierfür ist das Anfangswertproblem

$$\dot x = 3x^{2/3}, \qquad x(0) = 0.$$

Die Wurzelfunktion $x \mapsto x^{2/3}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ wohldefiniert, aber nicht lipschitz im Punkt 0. Und tatsächlich existiert neben der konstanten Lösung $\varphi \equiv 0$ auch noch die Lösung

$$\varphi(t) = t^3.$$

Daraus kann man sogar unendlich viele verschiedene Lösungen zusammensetzen, und zwar

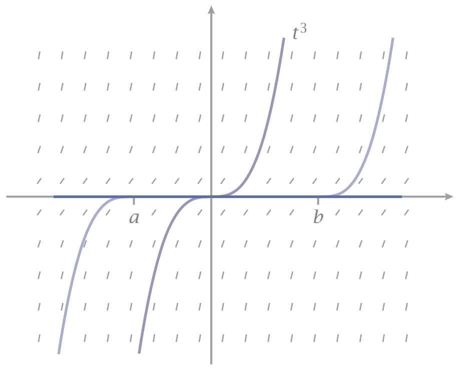
$$\varphi(t) = \begin{cases} (t-a)^3, & t < a \leqslant 0, \\ 0, & a \leqslant t \leqslant b, \\ (t-b)^3, & t > b \geqslant 0, \end{cases}$$

für jede Wahl von $a \leqslant 0 \leqslant b$. Es gibt also *überabzählbar viele* Lösungen dieses Anfangswertproblems Abb 4.

11.10

Abb 4

Nichteindeutigkeit des Anfangswertproblems von Beispiel 2



Die zu den Nullstellen von h gehörenden konstanten Lösungen zerlegen das Rechteck $I \times J$ in horizontale Streifen. Ist h lipschitz, so können aus Eindeutigkeitsgründen die übrigen Lösungen von (6) diese Streifen nicht verlassen. Indem wir J geeignet einschränken, können wir daher im Folgenden annehmen, dass h auf J nirgends verschwindet.

Angenommen, es existiert eine Lösung φ in einem solchen Streifen. Da dort $h(\varphi(t)) \neq 0$, ist

$$g(t) = \frac{\dot{\varphi}(t)}{h(\varphi(t))}. \tag{7}$$

Also gilt dann auch

$$\int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{\varphi}(s)}{h(\varphi(s))}\,\mathrm{d}s = \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} \frac{\mathrm{d}u}{h(u)}. \tag{8}$$

Drehen wir diese Argumentation um, indem wir von der letzten Gleichung ausgehen, so erhalten wir folgenden Satz.

3 **Satz** *Die Funktionen g und h seien stetig auf den Intervallen I respektive J, und h habe keine Nullstelle in J. Dann existiert genau eine lokale Lösung $\varphi\colon I_0 \to J$ des Anfangswertproblems*

$$\dot{x} = g(t)h(x), \qquad x(t_0) = x_0,$$

mit $t_0 \in I$ und $x_0 \in J$, und diese erfüllt die Gleichung

$$G(t) = H(\varphi(t)), \qquad t \in I_0, \tag{9}$$

wobei

$$G(t) \coloneqq \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s, \qquad H(x) \coloneqq \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}u}{h(u)}. \qquad \rtimes$$

⟪⟪ *Notwendigkeit:* Das haben wir gerade gezeigt: Ist φ eine lokale Lösung, so gilt (7), da h nirgends verschwindet. Integration von t_0 nach t ergibt gemäß (8)

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \frac{\dot\varphi(s)}{h(\varphi(s))}\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{\mathrm{d}u}{h(u)} = H(\varphi(t)).$$

Eindeutigkeit: Da $H' = 1/h$ nirgends verschwindet, ist H streng monoton und damit umkehrbar. Gleichung (9) ist somit nach φ auflösbar, und es ist

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t)), \qquad t \in I_0. \tag{10}$$

Somit ist φ, wenn es existiert, auch eindeutig bestimmt.

Existenz: Wir nehmen (10) als *Definition* von φ in einer Umgebung von t_0. Dann ist

$$\varphi(t_0) = H^{-1}(G(t_0)) = H^{-1}(0) = x_0.$$

Ferner ist φ stetig differenzierbar, und Differenzieren von $G(t) = H(\varphi(t))$ ergibt

$$g(t) = H'(\varphi(t))\dot\varphi(t) = \frac{\dot\varphi(t)}{h(\varphi(t))}.$$

Somit erfüllt φ die Differenzialgleichung $\dot\varphi(t)) = g(t)h(\varphi(t))$. ⟫⟫

Bemerkungen *a.* Der Satz beschreibt die Lösung des Anfangswertproblems nur implizit. Weder die Stammfunktionen G oder H müssen explizit bestimmbar sein, noch ist Gleichung (9) immer nach φ auflösbar.

b. Sind G und H *beliebige* Stammfunktionen von g und $1/h$, so ist

$$\Phi : I \times J \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(t,x) = G(t) - H(x)$$

konstant entlang *allen* Lösungskurven der Differenzialgleichung (6). Denn die entsprechenden Funktionen des Satzes unterscheiden sich von diesen nur durch additive Konstanten. Es gilt also

$$\Phi(t, \varphi(t)) = c$$

für *jede* Lösung φ, wobei c durch die Anfangswerte bestimmt wird. Man sagt, Φ ist eine *Erhaltungsgröße* oder ein *Integral* der Differenzialgleichung. ⊸

In der Praxis löst man separierbare Differenzialgleichungen in etwas salopper, aber einprägsamer Weise wie folgt. Man schreibt

$$\dot x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g(t)h(x)$$

und *separiert* die Variablen zu

$$\frac{\mathrm{d}x}{h(x)} = g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Unbestimmte Integration ergibt

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{h(x)} = \int g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Gelingt es, diese Integrale zu bestimmen und nach x aufzulösen, erhält man eine allgemeine Lösung φ, die noch von einer Integrationskonstante c abhängt.

⊳ *Erstes Beispiel* Die homogene lineare Differenzialgleichung

$$\dot{x} = a(t)x$$

ist separierbar mit $g(t) = a(t)$ und $h(x) = x$. Die Funktion h hat eine Nullstelle bei 0, und da h lipschitz ist, ist die Nulllösung auch die einzige, die den Wert 0 annehmen kann. Nun sei $x \neq 0$. Dann ist

$$G(t) = \int g(s)\,\mathrm{d}s = \int a(s)\,\mathrm{d}s = A(t)$$

eine Stammfunktion von a, und

$$H(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{h(x)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log|x| + c.$$

Auflösen der Gleichung $H(x) = G(t)$ ergibt zunächst [2]

$$|x(t)| = \mathrm{e}^{A(t)-c} = \mathrm{e}^{A(t)}\mathrm{e}^{c}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Den Fall positiver, negativer und verschwindender Lösungen kann man dann zusammenfassen zu

$$x(t) = \mathrm{e}^{A(t)}c, \qquad c \in \mathbb{R}. \quad ⊲$$

⊳ *Zweites Beispiel* Betrachte

$$\dot{x} = \frac{t}{x}, \qquad 0 < t, x < \infty.$$

Rechnen wir informell, so ist also $x\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$,

$$\int_{t_0}^{t} s\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) = \int_{x_0}^{x} u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2).$$

Damit wird $x^2 = t^2 - t_0^2 + x_0^2$, oder

$$x(t) = \sqrt{t^2 + x_0^2 - t_0^2}.$$

Der Definitionsbereich dieser Lösung hängt von den Anfangswerten ab. Für $x_0 \geqslant t_0$ ist er $(0, \infty)$. Für $t_0 > x_0$ verlangen wir dagegen

$$t > \sqrt{t_0^2 - x_0^2} > 0. \quad ⊲$$

[2] Wir schreiben jetzt eine Lösung der Einfachheit halber als $x(t)$ statt $\varphi(t)$.

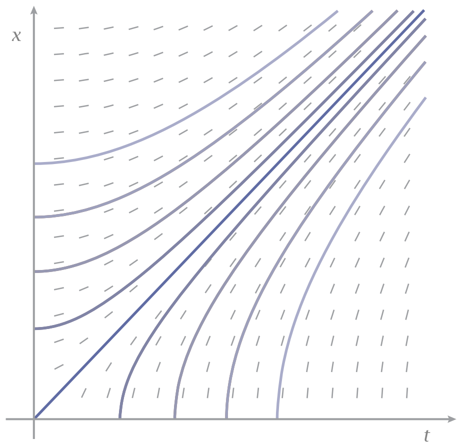


Abb 5

Lösungen zu $\dot{x} = t/x$

▹▸ *Drittes Beispiel* Betrachte

$$\dot{x} = e^x \sin t.$$

Das Richtungsfeld ist periodisch in t mit Periode 2π und symmetrisch zur x-Achse, denn für die rechte Seite gilt $f(t, x + 2\pi) = f(t, x) = -f(-t, x)$. Ist also $\varphi(t)$ eine Lösung, so sind es auch

$$\varphi(t + 2\pi), \qquad \varphi(-t),$$

wie man leicht nachrechnet. — Da e^x keine Nullstellen besitzt, können wir direkt zur Separation der Variablen übergehen und erhalten

$$\int \frac{dx}{e^x} = \int \sin t \, dt.$$

Also ist $e^{-x} = \cos t + c$, oder

$$x(t) = -\log(\cos t + c)$$

mit der Nebenbedingung, dass $\cos t + c > 0$.

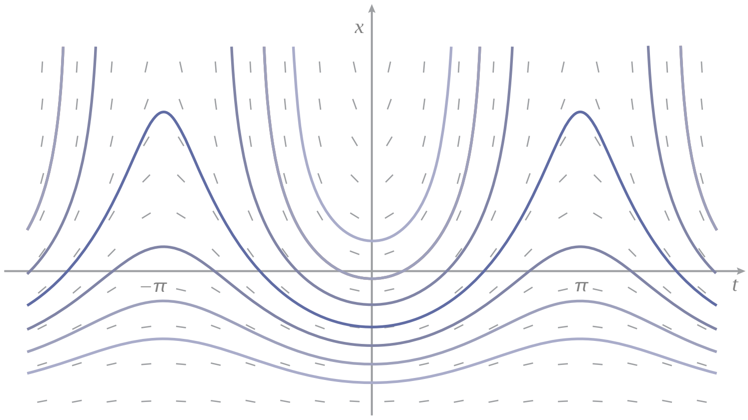
Aufgrund von Satzes 3 sind dies alle Lösungen der Gleichung. Es ist auch jedes Anfangswertproblem $x(0) = x_0$ lösbar mit

$$x(t) = -\log(\cos t + e^{-x_0} - 1).$$

Diese Lösung existiert für $x_0 < -\log 2$ für alle t, und für $x_0 = -\log 2$ auf $(-\pi, \pi)$ mit $x(t) \to \infty$ für $t \to \pm\pi$. Für größer werdendes x_0 wird dieses Intervall immer kleiner und konvergiert für $x_0 \to \infty$ gegen 0. ◂◃

11.14

Abb 6 Lösungen zu $\dot{x} = e^x \sin t$



11.4 Homogene Differenzialgleichungen

Eine Differenzialgleichung der Form

$$\dot{x} = h(x/t)$$

heißt *homogene Differenzialgleichung* [3] – *homogen*, weil die rechte Seite invariant ist unter Skalierung beider Koordinaten mit demselben Faktor. Für die Funktion f mit $f(t,x) = h(x/t)$ gilt also

$$f(\lambda t, \lambda x) = f(t,x), \qquad \lambda > 0.$$

Umgekehrt definiert jede Funktion f mit dieser Eigenschaft eine Funktion von x/t, denn dann gilt

$$f(t,x) = f(1, x/t) =: h(x/t), \qquad t > 0.$$

Bemerkung Allgemeiner heißt eine auf einem Vektorraum definierte Funktion f *homogen vom Grad α*, falls

$$f(\lambda u) = \lambda^\alpha f(u), \qquad \lambda > 0. \quad ⊸$$

So ist $x^k y^{n-k}$ für jedes $0 \leqslant k \leqslant n$ homogen vom Grad n. Die rechte Seite einer homogenen Differenzialgleichung ist also homogen vom Grad 0.

Eine homogene Differenzialgleichung kann auf eine Differenzialgleichung mit getrennten Variablen zurückgeführt werden.

[3] Nicht zu verwechseln mit der homogenen *linearen* Differenzialgleichung.

Satz *Sei h stetig auf einem Intervall I und $x_0/t_0 \in I$. Dann ist $\varphi\colon I_0 \to \mathbb{R}$ eine lokale Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{x} = h(x/t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{11}$$

genau dann, wenn

$$\psi\colon\ I_0 \to \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$$

eine lokale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{z} = \frac{h(z) - z}{t}, \quad z(t_0) = \frac{x_0}{t_0} \tag{12}$$

darstellt. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Dann sind zwei einfache Rechnungen. Ist φ Lösung von (11), so gilt

$$\dot{\psi} = \left(\frac{\varphi}{t}\right)^{\cdot} = \frac{\dot{\varphi}}{t} - \frac{\varphi}{t^2} = h\left(\frac{\varphi}{t}\right)\frac{1}{t} - \frac{\varphi}{t^2} = \frac{h(\psi) - \psi}{t}$$

sowie $\psi(t_0) = \varphi(t_0)/t_0 = x_0/t_0$. Also ist ψ Lösung von (12). Ist umgekehrt ψ eine solche Lösung und definieren wir φ durch $\varphi(t) = t\psi(t)$, so gilt

$$\dot{\varphi} = (t\psi)^{\cdot} = \psi + t\dot{\psi} = \psi + (h(\psi) - \psi) = h(\psi) = h(\varphi/t)$$

sowie $\varphi(t_0) = t_0\psi(t_0) = x_0$. Also ist φ Lösung von (11). ⟩⟩⟩⟩

In der praktischen Rechnung substituiert man in der Differenzialgleichung

$$z = x/t,$$

was ja auch nahe liegt, denn schließlich ist die rechte Seite eine Funktion dieser Variablen. Aus $x = tz$ folgt dann $\dot{x} = z + t\dot{z}$ und damit

$$z + t\dot{z} = \dot{x} = h(z),$$

und das ist die Differenzialgleichung (12). Der Satz sagt also aus, dass diese Rechnung korrekt ist.

▹ *Erstes Beispiel* Die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = 1 + \frac{x}{t} + \frac{x^2}{t^2}, \qquad t \neq 0,$$

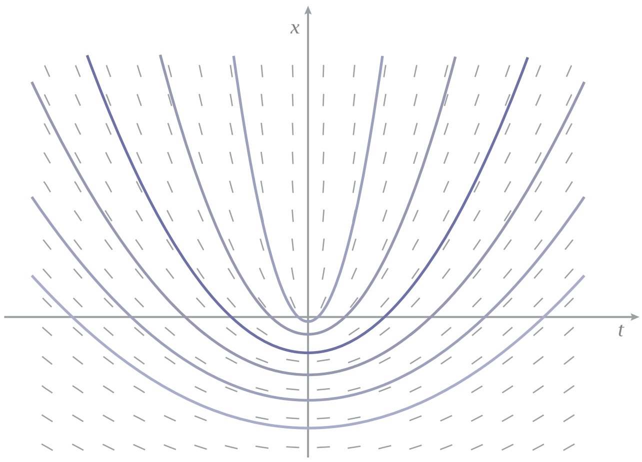
geht durch die Substitution $z = x/t$ über in

$$\dot{z} = \frac{1 + z^2}{t}, \qquad t \neq 0.$$

Separation der Variablen ergibt

$$\arctan z = \int \frac{\mathrm{d}z}{1 + z^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log|t| + c.$$

Abb 7 Konfokale Parabeln



Dies ergibt $z = \tan(\log|t| + c)$, und durch Rücksubstitution die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differenzialgleichung,

$$\varphi(t) = t\tan(\log|t| + c).$$

Homogene Differenzialgleichungen sind gelegentlich nicht sofort als solche zu erkennen. Hier hilft der Test, ob die rechte Seite invariant ist unter gleichzeitiger Skalierung von x und t.

Zweites Beispiel Die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \frac{x + \sqrt{t^2 + x^2}}{t}, \qquad t > 0,$$

ist ebenfalls homogen, denn für die rechte Seite gilt $f(\lambda x, \lambda t) = f(x,t)$ für $\lambda > 0$. Für $z = x/t$ erhalten wir

$$z + t\dot{z} = \dot{x} = \frac{tz + \sqrt{t^2 + t^2z^2}}{t} = z + \sqrt{1 + z^2},$$

oder

$$t\dot{z} = \sqrt{1 + z^2}, \qquad t > 0.$$

Dies löst man nun wieder mit Separation der Variablen. Aus

$$\log\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) = \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1 + z^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log t + c$$

folgt

$$z + \sqrt{1 + z^2} = pt, \qquad p = \mathrm{e}^c > 0.$$

Quadrieren von $z - pt = \sqrt{1 + z^2}$ führt schließlich zu $2ptz = p^2t^2 - 1$ und damit zur Lösung

$$\varphi(t) = \frac{p^2t^2 - 1}{2p}, \qquad p > 0.$$

Diese lösen die Differenzialgleichung für $t > 0$, aber man verifiziert leicht, dass sie tatsächlich die Gleichung für alle t erfüllen.

Die Lösungen beschreiben eine Familie von zur x-Achse symmetrischen Parabeln mit Tiefpunkt bei $-1/2p$, Nullstellen bei $-1/p$ und $1/p$ und Brennpunkt im Koordinatenursprung. Es handelt sich um eine Familie *konfokaler Parabeln*. ◅