12

Ergänzungen

12.1 Differenzierbarkeit

Es gibt Funktionen auf $\mathbb{R}$, die stetig, aber *nirgends* differenzierbar sind. Ebenso gibt es Funktionen, deren Taylorreihe zwar überall konvergiert, aber nicht die Funktion darstellt. Hierzu die klassischen Beispiele.

▪ Stetig, aber nirgends differenzierbar

Sei ϕ_0 die mit der Periode 1 fortgesetzte Betragsfunktion auf $[-1/2, 1/2]$ wie in Abbildung 1. Das heißt, es ist

$$\phi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \phi_0(t) = |t - [t + 1/2]|,$$

wobei $[\cdot]$ die Gaußklammer bezeichnet. Diese Funktion ist stetig, stückweise affin auf Intervallen der Länge $1/2$ mit Steigung 1 oder -1, und periodisch mit Periode 1. Für $n \geqslant 1$ sei dann

$$\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \phi_n(t) = 4^{-n}\phi_0(4^n t).$$

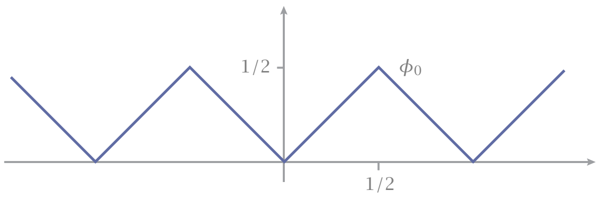
Auch diese Funktionen sind stetig, periodisch mit Periode 4^{-n}, und stückweise affin auf Intervallen der Länge $1/2 \cdot 4^{-n}$ mit Steigungen 1 oder -1.

1 **Satz** *Die Funktion*

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \sum_{n \geqslant 1} \phi_n(t)$$

ist überall stetig, aber in keinem Punkt differenzierbar. ⋊

Abb 1 Die Funktion ϕ_0



⟨⟨⟨⟨⟨ Es ist

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \phi_k \right\|_{\mathbb{R}} \leqslant \sum_{k=n}^{m} \|\phi_k\|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{2} \sum_{k \geqslant n} 4^{-k} < 4^{-n}.$$

Also konvergiert die Reihe gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, und ϕ ist stetig $_{7.33}$. Sei jetzt a ein beliebiger Punkt auf $\mathbb{R}$ und $n \geqslant 1$. Die Funktionen $\phi_1, .., \phi_n$ haben konstante Steigung auf Intervallen der Länge $1/2 \cdot 4^{-n}$. Wählen wir $h_n = 4^{-n-1}$ oder $h_n = -4^{-n-1}$ entsprechend, so gilt dies insbesondere auf dem Intervall zwischen a und $a + h_n$. Es ist dann

$$\left| \frac{\phi_k(a + h_n) - \phi_k(a)}{h_n} \right| = 1, \qquad k = 1, .., n.$$

Dagegen gilt

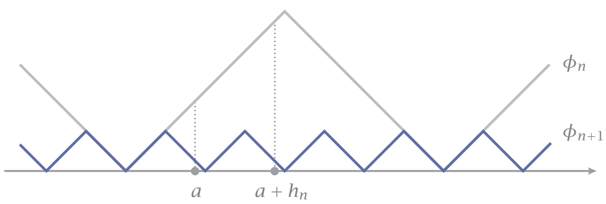
$$\phi_k(a + h_n) - \phi_k(a) = 0, \qquad k > n,$$

da alle ϕ_k mit $k > n$ periodisch mit Periode h_n sind. Es gilt somit

$$\frac{\phi(a + h_n) - \phi(a)}{h_n} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{\phi_k(a + h_n) - \phi_k(a)}{h_n},$$

und jeder Summand ist vom Betrag 1. Entlang $h_n \to 0$ bilden die Differenzenquotienten somit *keine* Cauchyfolge. ⟩⟩⟩⟩⟩

Abb 2 Zum Beweis von Satz 1



■ Glatt, aber nicht analytisch

2 **Das Beispiel von Cauchy** *Die Funktion*

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/t^2}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

ist unendlich oft differenzierbar, und es gilt $\phi^{(n)}(0) = 0$ *für alle* $n \geqslant 0$. *Insbesondere gilt* $T_0\phi \equiv 0 \neq \phi$ *auf* $\mathbb{R}^*$. ⋊

Die Taylorreihe dieser Funktion bei 0 verschwindet also identisch und konvergiert trivialerweise auf ganz $\mathbb{R}$. Aber natürlich ist die Funktion ϕ selbst nicht die Nullfunktion, wird also nicht von ihrer Taylorreihe dargestellt. Somit ist ϕ auch nicht reell analytisch.

⟪⟪ Auf $\mathbb{R}^*$ ist ϕ beliebig oft differenzierbar. Genauer zeigt man mit Induktion für alle $n \geqslant 0$, dass

$$\phi^{(n)}(t) = p_n(1/t)\,\mathrm{e}^{-1/t^2}, \qquad t \neq 0,$$

mit einem Polynom p_n vom Grad $\leqslant 3n$. Wegen $t^m \mathrm{e}^{-t} \to 0$ für $t \to \infty$ für alle $m \geqslant 0$ folgt hieraus

$$\lim_{t\to 0} \phi^{(n)}(t) = \lim_{t\to\infty} p_n(t)\mathrm{e}^{-t^2} = 0, \qquad n \geqslant 0.$$

Daraus folgt induktiv, dass $\phi^{(n)}$ in 0 stetig ist, dort auch differenzierbar ist, und dass $\phi^{(n+1)}(0) = 0$ gilt. ⟫⟫

Eine Variante dieses Beispiels ist die Funktion

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t^2/(1-t^2)}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geqslant 1, \end{cases}$$

die ebenfalls unendlich oft differenzierbar ist. Darüber hinaus verschwindet sie außerhalb von $[-1, 1]$ identisch. Ihr *Träger* $\operatorname{supp}\psi \coloneqq \{t \in \mathbb{R} : \psi(t) \neq 0\}^-$ ist also *kompakt.*

Der Raum aller $\mathbb{C}^\infty$-Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit kompakten Träger wird mit $C_0^\infty(\mathbb{R})$ bezeichnet und spielt in der Analysis eine wichtige Rolle. Wie die Funktion ψ zeigt, ist er nicht leer.

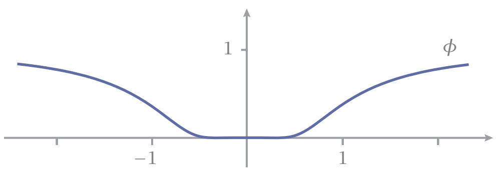


Abb 3

Das Beispiel von Cauchy

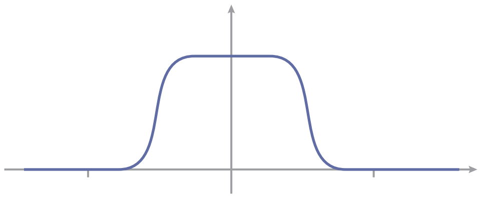


Abb 4

Eine $\mathbb{C}^\infty$-Funktion mit kompakten Träger

12.2 Faltungen

Wir betrachten stetige Funktionen auf der reellen Geraden, die beschränkt oder sogar absolut integrierbar sind. Für Erstere haben wir bereits den Raum

$$C_b(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) : \|f\|_\infty < \infty\}$$

eingeführt, wobei

$$\|f\|_\infty := \sup_{-\infty<t<\infty} |f(t)|$$

die *Supremums-* oder *L^∞-Norm* von f bezeichnet. Für Letztere definieren wir den Raum

$$C_s(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) : \|f\|_1 < \infty\},$$

wobei

$$\|f\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

als die *L^1-Norm* von f bezeichnet wird.

Für eine beliebige stetige Funktion können beide Normfunktionen den Wert ∞ annehmen. Auch ist nicht jede stetige beschränkte Funktion integrierbar, und nicht jede stetige integrierbare Funktion ist beschränkt. Es gilt somit

$$C_s(\mathbb{R}) \not\subseteq C_b(\mathbb{R}), \qquad C_b(\mathbb{R}) \not\subseteq C_s(\mathbb{R}).$$

Bemerkung In Abschnitt 7.6 haben wir gezeigt, dass $C_b(\mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ein vollständiger normierter Raum ist. Der Raum $C_s(\mathbb{R})$ mit der L^1-Norm $\|\cdot\|_1$ ist zwar ebenfalls normiert, aber *nicht vollständig*. Denn es gibt Folgen in $C_s(\mathbb{R})$, die punktweise und bezüglich $\|\cdot\|_1$ gegen *nichtstetige* Funktionen konvergieren A-10.22. ⊸

Die Faltungsoperation

Die Faltungsoperation erzeugt mithilfe eines uneigentlichen Integrals aus zwei Funktionen eine neue Funktion.

12.4

3 **Definition** *Sei $f \in C_b(\mathbb{R})$ und $g \in C_s(\mathbb{R})$ oder umgekehrt. Dann ist die Faltung oder Konvolution von f und g erklärt als die Funktion*

$$f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir müssen zeigen, dass das uneigentliche Integral für jedes x konvergiert. Ist zum Beispiel $f \in C_b(\mathbb{R})$ und $g \in C_s(\mathbb{R})$, so gilt für alle $r > 0$

$$\int_0^r |f(x-t)g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty \int_0^r |g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_1 .$$

Daraus folgt die Konvergenz des Integrals für $r \to \infty$ $_{10.20}$. Gleiches gilt für das Integral über $[-r, 0]$. Für den umgekehrten Fall argumentiert man entsprechend. Somit ist $f * g$ wohldefiniert. ⟩⟩⟩⟩⟩

Die Formulierung ›Faltung von f und g‹ ist symmetrisch in den Funktionen f und g, die Definition jedoch scheinbar nicht. Dies täuscht jedoch.

Lemma *Unter den Voraussetzungen der Faltungsoperation $_3$ gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R},$$

und somit $f * g = g * f$. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Die Substitution $t = x - s$ ergibt für jedes $r > 0$

$$\int_{-r}^{r} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x-r}^{x+r} f(s)g(x-s)\,\mathrm{d}s.$$

Da die uneigentlichen Integrale für $r \to \infty$ auf beiden Seiten existieren, folgt hieraus durch Grenzübergang die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Der Faltungsoperator

Fixieren wir ein $\varphi \in C_s(\mathbb{R})$, so können wir jeder Funktion $f \in C_b(\mathbb{R})$ durch Faltung mit φ eine neue Funktion $f * \varphi$ zuordnen. Die Funktion φ definiert somit einen *Operator*

$$T_\varphi : f \mapsto T_\varphi f = f * \varphi.$$

Dieser Operator hat viele interessante und nützliche Eigenschaften, von denen wir hier einige wenige erwähnen.

4 **Satz** *Jede Funktion $\varphi \in C_s(\mathbb{R})$ definiert einen linearen Faltungsoperator*

$$T_\varphi : C_b(\mathbb{R}) \to C_b(\mathbb{R}), \quad T_\varphi f \coloneqq f * \varphi.$$

Dieser ist beschränkt, und es gilt

$$\|T_\varphi f\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_1 \|f\|_\infty . \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir zeigen zuerst, dass $T_\varphi f$ wieder stetig ist. Fixiere ein beliebiges x, und betrachte

$$\left| T_\varphi f(x+h) - T_\varphi f(x) \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h-t) - f(x-t)|\, |\varphi(t)|\, \mathrm{d}t.$$

Das rechts stehende Integral zerlegen wir in drei Teilintegrale über $(-\infty, -r]$, $[-r, r]$ und $[r, \infty)$, wobei r noch geeignet zu wählen ist.

Das linke und rechte Teilintegrale können wir durch

$$\|f\|_\infty \left\{ \int_{-\infty}^{-r} |\varphi(t)|\, \mathrm{d}t + \int_r^{\infty} |\varphi(t)|\, \mathrm{d}t \right\}$$

abschätzen. Da φ integrierbar ist, konvergiert der Ausdruck in eckigen Klammern für $r \to \infty$ gegen Null. Zu jedem gegebenen $\varepsilon > 0$ existiert daher ein $r > 0$ so, dass $\{\cdot\cdot\} < \varepsilon$ gilt. Der gesamte Ausdruck ist dann durch $\|f\|_\infty\, \varepsilon$ beschränkt.

Bleibt noch das Integral

$$\int_{-r}^{r} |f(x+h-t) - f(x-t)|\, |\varphi(t)|\, \mathrm{d}t.$$

Für $|h| \leqslant 1$ wird f nur innerhalb eines kompakten Intervalls um x ausgewertet. Dort ist f aber *gleichmäßig* stetig $_{7.32}$. Zu dem bereits gegebenen $\varepsilon > 0$ existiert daher ein $0 < \delta \leqslant 1$ so, dass

$$\left| f(x+h-t) - f(x-t) \right| < \varepsilon, \qquad |h| < \delta,\ |t| \leqslant r.$$

Das letzte Integral ist dann durch $\|\varphi\|_1\, \varepsilon$ beschränkt.

Beide Abschätzungen zusammen ergeben

$$\left| T_\varphi f(x+h) - T_\varphi f(x) \right| \leqslant (\|f\|_\infty + \|\varphi\|_1)\varepsilon, \qquad |h| < \delta.$$

Da für jedes ε und solches δ existiert, ist $T_\varphi f$ im Punkt x stetig.

Wir zeigen nun, dass $T_\varphi f$ auch beschränkt ist. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \left| T_\varphi f(x) \right| &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)\varphi(t)|\, \mathrm{d}t \\ &\leqslant \|f\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, \mathrm{d}t \\ &= \|f\|_\infty\, \|\varphi\|_1 . \end{aligned}$$

Also gilt auch

$$\|T_\varphi f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| T_\varphi f(x) \right| \leqslant \|f\|_\infty\, \|\varphi\|_1 .$$

Da dies für jedes $f \in C_b(\mathbb{R})$ gilt, ist $T_\varphi f$ auch beschränkt. – Die Linearität von T_φ schließlich ist offensichtlich. ⟩⟩⟩⟩⟩

12.6

Das Interessante am Operator T_φ ist, dass sich viele Eigenschaften von der Funktion φ auf die gefaltete Funktion $T_\varphi f$ vererben, unabhängig von den Eigenschaften von f selbst. Ist zum Beispiel φ stetig differenzierbar und die Ableitung φ' ebenfalls auf ganz $\mathbb{R}$ integrierbar, so darf man in der folgenden Rechnung Differenziation und Integration vertauschen – was wir allerdings erst später beweisen werden– und erhält

$$\begin{aligned}(T_\varphi f)' = (f * \varphi)' &= \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x \varphi(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f * \varphi' \\ &= T_{\varphi'} f,\end{aligned}$$

wobei ∂_x die Ableitung nach x bezeichnet. Die Ableitung ∂_x operiert also auf φ und nicht auf f.

Entsprechendes gilt per Induktion auch für höhere Ableitungen. Sei dafür

$$C_b^r(\mathbb{R}) \coloneqq \{\varphi \in C^r(\mathbb{R}) : \varphi^{(r)} \in C_b(\mathbb{R})\}.$$

5 **Satz** *Sei $\varphi \in C^r(\mathbb{R})$ mit $\varphi^{(r)} \in C_s(\mathbb{R})$. Dann gilt*

$$T_\varphi : C_b(\mathbb{R}) \to C_b^r(\mathbb{R}),$$

und es ist

$$\partial^k T_\varphi f = T_{\partial^k \varphi} f, \qquad k = 0, .., r. \qquad \rtimes$$

Die Voraussetzung dieses Satzes ist zum Beispiel für jedes $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ für alle $r \geqslant 0$ erfüllt. Denn jede Ableitung von φ ist stetig, hat denselben kompakten Träger wie φ und ist somit integrierbar. Wir erhalten damit folgendes

6 **Korollar** *Ist $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, so gilt*

$$T_\varphi : C_b(\mathbb{R}) \to C_b^\infty(\mathbb{R}). \qquad \rtimes$$

Wir werden diese beiden Sätze im Folgenden nicht benötigen – und daher auch nicht beweisen –, da wir mit dem Weierstraßschen Approximationssatz 8 eine noch stärkere Aussage beweisen werden.

12.3 Diracfolgen

Mithilfe von Faltungen lässt sich die Aufgabe elegant lösen, stetige Funktionen durch *glatte*, das heißt, unendlich oft differenzierbare Funktionen zu approximieren. Benötigt werden dazu Funktionen, die die Faltungsoperation auf immer kleinere Umgebungen eines Punktes konzentrieren.

Definition *Eine Folge (φ_n) von Funktionen in $C_s(\mathbb{R})$ heißt Diracfolge, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.*

(D-1) $\varphi_n \geqslant 0$ *für alle n,*

(D-2) $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$ *für alle n, und*

(D-3) $\int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \to 1$ *für jedes $\delta > 0$.* ⋊

Die ersten beiden Bedingungen bewirken, dass die Faltung mit jedem φ_n eine Mittelwertbildung darstellt. Die dritte Bedingung bringt zum Ausdruck, dass diese Mittelwertbildungen gegen eine Punktauswertung konvergieren. Denn aus (D-2) und (D-3) folgt für jedes $\delta > 0$ auch

$$\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Alles außerhalb von $[-\delta, \delta]$ wird somit asymptotisch mit 0 gewichtet.

Diracfolgen sind leicht zu beschaffen:

Lemma *Ist ψ eine stetige, nichtnegative Funktion mit kompaktem Träger und $\|\psi\|_1 = 1$, so wird eine Diracfolge (φ_n) definiert durch*

$$\varphi_n(t) \coloneqq n\psi(nt), \qquad n \geqslant 1. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Offensichtlich ist $\varphi_n \geqslant 0$, und mit der Substitution $t = ns$ erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = n\int_{-\infty}^{\infty} \psi(nt)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s)\,\mathrm{d}s = 1.$$

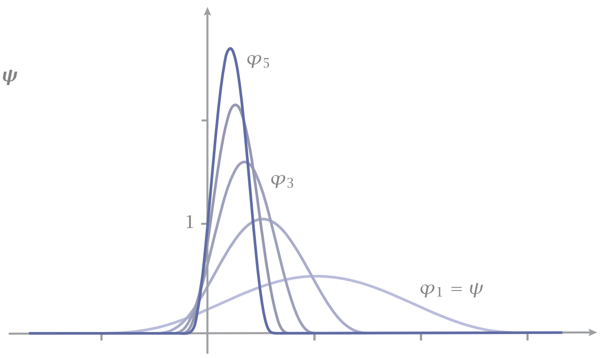
Ist $\operatorname{supp}\psi \subset [-r, r]$, so ist $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [-r/n, r/n]$ und deshalb

$$\int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = 1, \qquad n \geqslant r/\delta. \quad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

Bemerkung Ist ψ eine glatte Funktion, so sind auch alle φ_n glatt. ⊸

Abb 5

Eine Diracfolge mit einer Startfunktion ψ mit Träger $[-1, 3]$



▪ Ein allgemeiner Approximationssatz

Faltungen einer *gleichmäßig* stetigen Funktion f mit den Funktionen einer beliebigen Diracfolge führen zu stetigen Funktionen f_n, die gleichmäßig gegen die Ausgangsfunktion f konvergieren.

7 **Approximationssatz** *Ist $f \in C_b(\mathbb{R})$ gleichmäßig stetig und (φ_n) eine Diracfolge, so gilt*

$$f * \varphi_n \rightrightarrows f. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $f_n = f * \varphi_n$. Wegen (D-2) ist

$$f(x) = f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Mit (D-1) ist dann

$$1\,|f(x) - f_n(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x-t)|\ \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dieses Integral zerlegen wir in einen Anteil über ein kleines Mittelstück $[-\delta, \delta]$ und den Rest.

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle x gleichmäßig

$$|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon, \qquad |t| < \delta.$$

Für das Mittelstück des Integrals erhalten wir damit

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x-t)|\ \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon, \tag{1}$$

denn es wird ja nur über $|t| \leqslant \delta$ integriert.

Wegen (D-2) können wir den Integralanteil über das Komplement von $[-\delta, \delta]$ beschränken durch

$$2\,\|f\|_\infty \left\{ \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \right\} = 2\,\|f\|_\infty \left\{ 1 - \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \right\}.$$

Der letzte Ausdruck konvergiert wegen (D-3) für $n \to \infty$ gegen 0. Es gibt somit ein $N \geqslant 1$, so dass

$$\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} |f(x) - f(x-t)|\;\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon, \qquad n \geqslant N. \tag{2}$$

Die Abschätzungen 1, (1) und (2) ergeben zusammen $\|f_n - f\|_\infty < 2\varepsilon$ für $n \geqslant N$. Das war zu zeigen. ⟩⟩⟩⟩⟩