Definition *Eine Kurve $\gamma : I \to E$ heißt differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt von I differenzierbar ist. In diesem Fall heißt*

$$\dot{\gamma} : I \to E, \quad t \mapsto \dot{\gamma}(t)$$

die Ableitung von γ. Ist $\dot{\gamma}$ stetig, so heißt γ stetig differenzierbar oder C^1. ⋊

Die Ableitung einer C^1-Kurve ist somit wieder eine Kurve. Induktiv können wir daher wie bei den reellwertigen Funktionen die Klassen

$$C^r(I,E), \qquad 0 \leqslant r \leqslant \infty,$$

aller r-mal stetig differenzierbaren Kurven $I \to E$ definieren. Dabei steht $C^0(I,E)$ für $C(I,E)$. — Wir notieren die beiden wichtigsten Rechenregeln.

Satz *Seien $\gamma, \eta \in C^r(I,E)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\alpha\gamma + \beta\eta \in C^r(I,E)$, und es gilt*

$$(\alpha\gamma + \beta\eta)^{\cdot} = \alpha\dot{\gamma} + \beta\dot{\eta}.$$

Ist außerdem $\varphi : J \to I$ eine C^r-Abbildung, so ist $\gamma \circ \varphi \in C^r(J,E)$ und

$$(\gamma \circ \varphi)^{\cdot} = (\dot{\gamma} \circ \varphi)\dot{\varphi}. \quad ⋊$$

Die Beweise verlaufen wie bei den differenzierbaren Funktionen $_{8.1}$ und sind als Übung überlassen. Beide Aussagen sind ohnehin Spezialfälle allgemeinerer Sätze, die im nächsten Kapitel bewiesen werden.

▪ Kurven im $\mathbb{R}^m$

Im $\mathbb{R}^m$ werden Kurven durch m Komponentenfunktionen beschrieben, die wir aus Platzgründen meist als Zeilenvektor

$$\gamma = (\gamma_1, .., \gamma_m)$$

darstellen [3]. Die Kurve γ ist stetig genau dann, wenn jede Komponente γ_i stetig ist $_{5.38}$. Betrachten wir Differenzenquotienten, so gilt Entsprechendes auch für die Differenzierbarkeit $_1$.

3 **Satz** *Eine Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ ist im Punkt $a \in I$ differenzierbar genau dann, wenn jede Komponentenfunktion in a differenzierbar ist. Es gilt dann*

$$\dot{\gamma}(a) = (\dot{\gamma}_1(a), .., \dot{\gamma}_m(a)).$$

Sie ist C^r für $1 \leqslant r \leqslant \infty$ genau dann, wenn jede Komponente C^r ist. ⋊

[3] Ab dem nächsten Kapitel hat der Urbildraum standardmäßig die Dimension n und der Zielraum die Dimension m. Daher schreiben wir auch hier m.

A. Die Standardparametrisierung des Einheitskreises,

$$\gamma\colon\ [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t),$$

ist eine C^∞-Kurve mit Ableitung und Geschwindigkeit

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t), \qquad \|\dot{\gamma}(t)\|_2 = 1.$$

B. Die übliche Parametrisierung des Graphen einer C^r-Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$,

$$\gamma\colon\ I \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, f(t)),$$

ist C^r und hat Ableitung und Geschwindigkeit

$$\dot{\gamma}(t) = (1, f'(t)), \qquad \|\dot{\gamma}(t)\|_2 = \sqrt{1 + (f')^2(t)} > 0.$$

Der Hauptsatz

Die Ableitung einer stetig differenzierbaren Kurve ist wieder eine Kurve. Wie bei den reellen Funktionen können wir daher die Frage stellen, ob umgekehrt jede Kurve die Ableitung einer anderen Kurve ist. In der Tat gilt der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung 10.16 auch hier, wir müssen nur das Integral im $\mathbb{R}^m$ beziehungsweise dem Banachraum E bilden.

Das Integral einer Treppenfunktion ist nichts anderes als eine Linearkombination seiner Funktionswerte. Es lässt sich daher ebenso gut definieren, wenn diese Werte Vektoren, Matrizen oder Elemente irgendeines Banachraums E sind.

Definition *Eine Funktion $\varphi\colon I \to E$ heißt E-wertige Treppenfunktion, wenn es eine Zerlegung $(t_0, .., t_n)$ des Intervalls I und Elemente $w_1, .., w_n$ in E gibt, so dass*

$$\varphi|_{(t_{k-1}, t_k)} = w_k, \qquad k = 1, .., n.$$

Das Integral einer solchen Treppenfunktion ist

$$J_I(\varphi) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} w_k (t_k - t_{k-1}).$$

Dieses hängt nicht von der Darstellung von φ ab.

Jede stetige Kurve $\gamma\colon I \to E$ mit einem kompakten Intervall I ist der gleichmäßige Limes solcher Treppenfunktionen. Dessen Integral können wir also wie zuvor definieren durch

$$\int_I \gamma = J_I(\gamma) = \lim J_I(\varphi_n),$$

wenn $\varphi_n \rightrightarrows \gamma$. Dieses ist wieder linear, normiert und lipschitz. Auch alle anderen Eigenschaften des Integrals bleiben erhalten, wie zum Beispiel die Drei-

13.10

ecksungleichung $\|J_I(\gamma)\|_E \leqslant J_I(\|\gamma\|_E)$ und das Riemannsche Lemma. Nur die Monotonieeigenschaft entfällt, da es in höheren Dimensionen keine natürliche Anordnung gibt.

Für Kurven im $\mathbb{R}^m$ ist dieses Integral allerdings keine große Sache, und auf solche Kurven werden wir uns im Folgenden konzentrieren.

Notiz *Das Integral einer stetigen Kurve $\gamma \in C(I, \mathbb{R}^m)$ mit Komponenten $\gamma_1, .., \gamma_m$ ist komponentenweise erklärt:*

$$J_I(\gamma) = (J_I(\gamma_1), .., J_I(\gamma_m)). \quad ⋊$$

⊳ Für $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (2t, 3t^2, 4t^3)$ ist

$$\Phi(t) = \int_0^t (2s, 3s^2, 4s^3)\,\mathrm{d}s = (t^2, t^3, t^4). \quad ⊲$$

Nun der angekündite

4 **Stammfunktionensatz** *Sei $\gamma \in C(I, \mathbb{R}^m)$ und $c \in I$ beliebig. Dann definiert*

$$\Phi(t) \coloneqq \int_c^t \gamma$$

eine Stammfunktion $\Phi \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ zu γ. Das heißt, es gilt $\dot{\Phi} = \gamma$ auf I. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Jede stetige Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^m$ ist integrierbar. Die Abbildung Φ ist daher für jedes $t \in I$ definiert. Aus der Additivität des Integrals folgt

$$\Phi(t+h) = \int_c^t \gamma + \int_t^{t+h} \gamma = \Phi(t) + \left[\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \gamma\right] h.$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern besitzt aufgrund des Riemannschen Lemmas 10.15 für $h \to 0$ den Grenzwert $\gamma(t)$. Somit ist Φ im Punkt t differenzierbar, und es ist $\dot{\Phi}(t) = \gamma(t)$. Da dies in jedem Punkt $t \in I$ gilt, ist Φ eine Stammfunktion von γ. ⟩⟩⟩⟩⟩

Damit gilt auch der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung 10.16 ebenso für Kurven.

5 **Hauptsatz** *Sei $\gamma \in C(I, \mathbb{R}^m)$. Für jede Stammfunktion Γ von γ und jedes Intervall $[a, b] \subset I$ gilt dann*

$$\int_a^b \gamma = \Gamma\Big|_a^b = \Gamma(b) - \Gamma(a).$$

Für jede C^1-Kurve γ gilt insbesondere

$$\int_a^b \dot{\gamma} = \gamma(b) - \gamma(a). \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Der Beweis verläuft wie im klassischen eindimensionalen Fall 10.16 . Die Funktion Φ des Stammfunktionensatzes 4 ist eine Stammfunktion von γ. Jede andere Stammfunktion Γ von γ unterscheidet sich von ihr nur durch eine additive Konstante ?? . Also gilt

$$\Gamma(b) - \Gamma(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_c^b \gamma - \int_c^a \gamma = \int_a^b \gamma.$$

Ist insbesondere γ eine C^1-Kurve, so ist γ Stammfunktion von $\dot{\gamma}$. Damit folgt die zweite Identität. ⟩⟩⟩⟩⟩

Als erste Konsequenz bemerken wir, dass der Schrankensatz ?? auch für C^1-Kurven gilt.

6 **Schrankensatz** *Ist $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$, so gilt für alle $u, v \in I$ die Ungleichung*

$$\|\gamma(v) - \gamma(u)\|_E \leqslant |v - u| \max_{u \leqslant t \leqslant v} \|\dot{\gamma}(t)\|_E .$$

Insbesondere ist jede C^1-Kurve γ auf einem kompakten Intervall I lipschitz mit Konstante $L = \max_{t \in I} \|\dot{\gamma}(t)\|_E < \infty$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$, so gilt für beliebige $u < v$ in I aufgrund des Hauptsatzes 5 und der Dreiecksungleichung für Integrale

$$\begin{aligned} \|\gamma(v) - \gamma(u)\|_E = \left\| \int_u^v \dot{\gamma} \right\|_E &\leqslant \int_u^v \|\dot{\gamma}(t)\|_E \,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_u^v \max_{u \leqslant t \leqslant v} \|\dot{\gamma}(t)\|_E \,\mathrm{d}t \\ &= (v - u) \max_{u \leqslant t \leqslant v} \|\dot{\gamma}(t)\|_E . \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von $t \mapsto \|\dot{\gamma}(t)\|_E$ ist das Maximum endlich. Der allgemeine Fall $u, v \in I$ folgt hieraus, ebenso die Lipschitzstetigkeit von γ. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Den Schrankensatz für C^1-Funktionen hatten wir mithilfe des Zwischenwertsatzes bewiesen 8.2 . Dieser gilt für Kurven im $\mathbb{R}^m$ mit $m \geqslant 2$ jedoch *nicht mehr* A-5 . Mithilfe einer Integraldarstellung von $\gamma(b) - \gamma(a)$ gelangen wir aber zu demselben Ergebnis. Ein weiteres Beispiel für diese Art der Argumentation ist die Hadamardsche Ungleichung ?? . ⊸

13.3 Rektifizierbare Kurven

Die Länge einer Kurve wird über einen Approximationsprozess erklärt. Die Länge eines *Polygonzugs* ist sinnvollerweise definiert als die Summe der Längen der Polygonabschnitte, gemessen in der Norm des Banachraums. Eine *beliebige* Kurve γ können wir immer durch einbeschriebene Polygonzüge approximieren. Jede Verfeinerung eines solchen Polygonzugs wird aufgrund der Dreiecksungleichung dessen Länge vergrößern oder unverändert lassen, aber keinesfalls verringern. Dies erlaubt es, die Länge von γ als das *Supremum* der Längen aller einbeschriebene Polygonzüge zu definieren. Es ist also nicht erforderlich, den Approximationsprozess näher zu spezifizieren.

Nun die Formalitäten. Sei $I = [a,b]$ ein nichtleeres kompaktes Intervall, sei $\gamma \in C(I,E)$ eine Kurve in E, und $T = (t_0, .., t_n)$ mit $a = t_0 < t_1 < .. < t_n = b$ eine Teilung von I. Dann ist

$$\Sigma_T(\gamma) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_E$$

die *Länge* des Polygonzuges mit den Eckpunkten $\gamma(t_0), .., \gamma(t_n)$, der der Kurve γ einbeschrieben ist Abb 9.

Definition *Die Länge einer Kurve $\gamma \in C(I,E)$ ist definiert als*

$$L_I(\gamma) \coloneqq \sup_T \Sigma_T(\gamma),$$

wobei sich das Supremum über alle Teilungen T von I erstreckt. Die Kurve γ heißt rektifizierbar, falls $L_I(\gamma) < \infty$. ⋊

Bemerkung Wir erhalten damit eine Funktion

$$L_I : C(I,E) \to [0,\infty], \quad \gamma \mapsto L_I(\gamma).$$

Diese ist allerdings *nicht stetig* bezüglich der Supremumsnorm auf $C(I,E)$. So konvergieren die sukzessive feiner werdenden Sägezahnkurven γ_n in Abbildung 11 gleichmäßig gegen γ_*, aber für ihre Längen gilt A-15

$$L(\gamma_n) = L(\gamma_0) = \sqrt{2} \cdot L(\gamma_*). \quad ⊸$$

Abb 9

Kurve und einbeschriebener Polygonzug

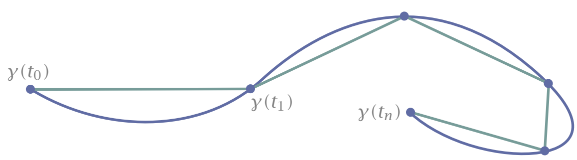
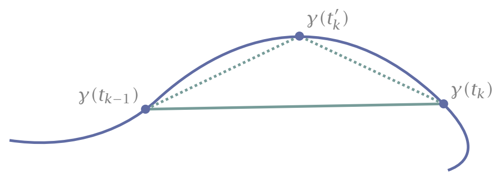


Abb 10

Verfeinerung eines Polygonzugs



Zu den rektifizierbaren Kurven gehören die lipschitzstetigen Kurven.

Satz *Ist die Kurve $\gamma \in C(I,E)$ M-lipschitz, so ist sie rektifizierbar, und es gilt*

$$L_I(\gamma) \leqslant M\,|I|\,.$$

Insbesondere ist jede C^1-Kurve rektifizierbar. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Für jede Teilung $T = (t_0,..,t_n)$ von I gilt aufgrund der Lipschitzeigenschaft

$$\begin{aligned}\Sigma_T(\gamma) &= \sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_E \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} M\,|t_k - t_{k-1}| = M \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = M\,|I|\,.\end{aligned}$$

Da die rechte Seite nicht von T abhängt, folgt $L_I(\gamma) = \sup_T \Sigma_T(\gamma) \leqslant M\,|I|$. C^1-Kurven sind rektifizierbar, da sie aufgrund des Schrankensatzes $_6$ lipschitzstetig sind. ⟩⟩⟩⟩⟩

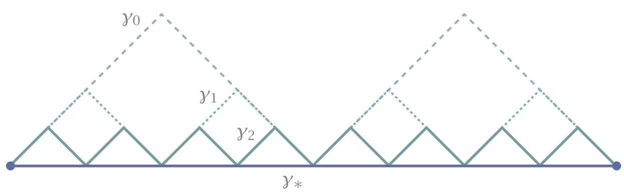
Wie bestimmt man aber die Länge einer Kurve? Um diese Frage zu beantworten, zeigen wir zunächst die *Additivität* der Längenfunktion: Zerlegt man eine Kurve in zwei Abschnitte, so ist die Gesamtlänge der Kurve gleich der Summe der Längen der beiden Kurvenabschnitte – wie es auch sein sollte.

7 **Lemma** *Sei $\gamma \in C(I,E)$ mit $I = [a,b]$. Für jedes $c \in I$ gilt dann*

$$L_{[a,b]}(\gamma) = L_{[a,c]}(\gamma) + L_{[c,b]}(\gamma)\,. \quad ⋊$$

Abb 11

Sägezahnkurven



⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $c \in I$ und $I_1 = [a, c]$ sowie $I_2 = [c, b]$. Zu zeigen ist, dass

$$L_I = L_{I_1} + L_{I_2},$$

wobei wir das Argument γ der Kürze halber weglassen.

Ist $T = (t_0, .., t_n)$ eine beliebige Teilung von I, so seien $T_c = T \cup \{c\}$ und

$$T_k = T_c \cap I_k, \qquad k = 1, 2,$$

die zugehörigen Teilungen von I_1 und I_2. Aufgrund der Dreiecksungleichung und der Definition von L_{I_1} und L_{I_2} ist dann

$$\Sigma_T \leqslant \Sigma_{T_c} = \Sigma_{T_1} + \Sigma_{T_2} \leqslant L_{I_1} + L_{I_2}.$$

Da dies für jede Teilung T von I gilt, folgt auch $L_I = \sup_T \Sigma_T \leqslant L_{I_1} + L_{I_2}$.

Um die umgekehrte Ungleichung zu erhalten, sei zuerst $L_{I_1} + L_{I_2} < \infty$ und $\varepsilon > 0$. Dann existieren Teilungen T_1 von I_1 und T_2 von I_2, so dass

$$\Sigma_{T_k} \geqslant L_{I_k} - \varepsilon/2, \qquad k = 1, 2.$$

Für die Teilung $T = T_1 \cup T_2$ von I folgt hieraus

$$\Sigma_T = \Sigma_{T_1} + \Sigma_{T_2} \geqslant L_{I_1} + L_{I_2} - \varepsilon.$$

Also ist auch $L_I \geqslant L_{I_1} + L_{I_2} - \varepsilon$. Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $L_I \geqslant L_{I_1} + L_{I_2}$. Dies gilt aber auch, wenn einer der Terme rechts unbeschränkt ist, da dann auch L_I unbeschränkt ist. Zusammen mit $L_I \leqslant L_{I_1} + L_{I_2}$ ergibt dies die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

Der vorangehende Satz gilt für alle stetigen Kurven. Von nun an beschränken wir uns jedoch auf C^1-Kurven.

8 **Lemma** *Sei $\gamma \in C^1(I, E)$ mit $I = [a, b]$. Dann ist die Längenfunktion*

$$\lambda : I \to \mathbb{R}, \quad \lambda(t) = L_{[a,t]}(\gamma)$$

stetig differenzierbar, und es gilt $\lambda'(t) = \|\dot\gamma(t)\|_E$ für alle $t \in I$. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Für je zwei Punkte $u < v$ in I gilt[5]

$$\|\gamma(v) - \gamma(u)\|_E = \left\| \int_u^v \dot\gamma \right\|_E \leqslant \int_u^v \|\dot\gamma\|_E .$$

Für ein beliebiges abgeschlossenes Intervall $J \subset I$ und eine beliebige Teilung $T = (t_0, .., t_n)$ von J gilt daher auch

$$\Sigma_T(\gamma) = \sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_E \leqslant \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot\gamma\|_E = \int_J \|\dot\gamma\|_E .$$

Nehmen wir das Supremum über alle Teilungen von J, so folgt

$$L_J(\gamma) \leqslant \int_J \|\dot\gamma(s)\|_E \, \mathrm{d}s.$$

Dies gilt also für jedes abgeschlossene Intervall $J \subset I$.

Sei nun $t \in [a,b)$ und $h > 0$ so klein, dass $t + h \leqslant b$. Dann gilt also

$$\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|_E \leqslant L_{[t,t+h]}(\gamma) \leqslant \int_t^{t+h} \|\dot\gamma\|_E .$$

aufgrund der letzten Abschätzung. Hierbei ist 7

$$L_{[t,t+h]}(\gamma) = L_{[a,t+h]}(\gamma) - L_{[a,t]}(\gamma) = \lambda(t+h) - \lambda(t).$$

Einsetzen und dividieren durch $h > 0$ ergibt die Ungleichung

$$\left\| \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \right\|_E \leqslant \frac{\lambda(t+h) - \lambda(t)}{h} \leqslant \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\dot\gamma\|_E .$$

Da γ stetig differenzierbar ist, konvergieren die äußeren Terme für $h \searrow 0$ gegen $\|\dot\gamma(t)\|_E$. Also konvergiert auch der mittlere Term, und es gilt

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{\lambda(t+h) - \lambda(t)}{h} = \|\dot\gamma(t)\|_E .$$

Ein analoges Argument für $t \in (a,b]$ und $h < 0$ liefert dasselbe Ergebnis. Also ist λ in jedem Punkt t differenzierbar, und es gilt $\lambda'(t) = \|\dot\gamma(t)\|_E$. »»»

9 **Satz** *Für $\gamma \in C^1(I,E)$ gilt*

$$L_I(\gamma) = \int_I \|\dot\gamma(t)\|_E \, \mathrm{d}t.$$

Insbesondere ist die euklidische Länge einer Kurve $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$

$$L_I(\gamma) = \int_I \|\dot\gamma(t)\|_2 \, \mathrm{d}t = \int_I \sqrt{\dot\gamma_1^2(t) + .. + \dot\gamma_m^2(t)} \, \mathrm{d}t. \qquad \rtimes$$

««« Sei $I = [a,b]$. Mit den Bezeichnungen des letzten Lemmas und dem Hauptsatz 10.14 ist dann

$$L_I(\gamma) = \lambda(b) = \lambda(b) - \lambda(a) = \int_a^b \lambda'(t) \, \mathrm{d}t = \int_I \|\dot\gamma(t)\|_E \, \mathrm{d}t. \qquad »»»$$

Die Länge einer C^1-Kurve ist also das Integral über ihre Geschwindigkeit. Ist die Geschwindigkeit konstant, so ist die Länge gerade das Produkt aus Geschwindigkeit und verstrichener Zeit – wie es auch sein sollte.