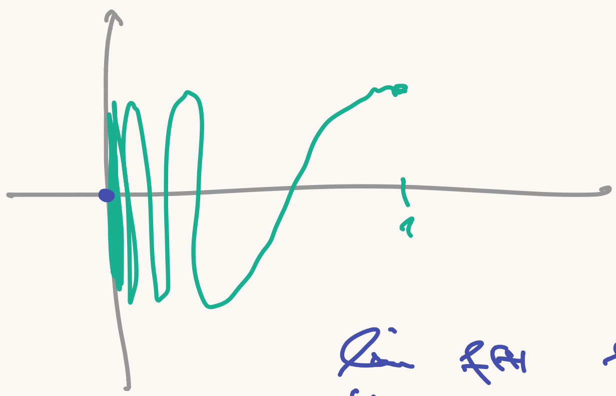
Ana-2 VÜ-1

Ss 2021 22.04.21

1 Die Funktion

$$f:\ [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \sin 1/t, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

ist *nicht* integrierbar.



$\lim_{t \searrow 0} f(t)$ ex. nicht

und daraus ist f keine Regelf.

$$t_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{1}{t_n} = n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n \geq 1$$

$$\boxed{\sin \frac{1}{t_n} = (-1)^n}$$

2 Das Integral einer Regelfunktion, die nur auf einer abzählbaren Menge nicht verschwindet, ist Null.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in R_a^b$

Sei $S \subset [a,b]$ abzählbar

$\boxed{f|_{[a,b]\setminus S} = 0.}$

Dann: $\int_a^b f = 0$.

Beweis: Da f Regelf.: es ex.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{I_k}}_{\text{endliche Summe}} = \underbrace{\varphi_n}_{\text{Treppenf.}} \rightrightarrows f$$

glm. Konv.

Sei $\varepsilon > 0$: $\underbrace{\|\varphi_n - f\|_{[a,b]}}_{\text{Sup-Norm}} < \varepsilon$, $n \geq n_0$

Nehme t mit $f(t) = 0$: $\Rightarrow$ $|\varphi_n| < \varepsilon$, alle t

$|\varphi_n(t) - f(t)|$ $\Rightarrow$ $\int_a^b |\varphi_n| < \varepsilon \cdot (b-a)$

$= |\varphi_n(t)|$

$\leq \max |\varphi_n| < \varepsilon$. $\Rightarrow$ $\int_a^b |\varphi_n| \longrightarrow 0$, $n \to \infty$

$\Rightarrow$ $\int_a^b f = \lim \int_a^b \varphi_n = 0$.

3 Jeder Regelfunktion $f \in R_a^b$ sei die Funktion $f_-\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ ihrer linksseitigen und die Funktion $f_+\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ ihrer rechtsseitigen Grenzwerte zugeordnet. Dann gilt:

a. f_- ist *linksseitig stetig* – das heißt, es gilt

$$\boxed{f_-(c) = \lim_{t \nearrow c} f_-(t),} \qquad c \in (a,b].$$

Analog ist f_+ *rechtsseitig stetig*.

b. Es gibt eine abzählbare Menge $S \subset [a,b]$, so dass $f_- = f = f_+$ auf $[a,b] \setminus S$.

c. Es gilt

$$\int_a^b f = \int_a^b f_- = \int_a^b f_+.$$

Bez: f_+ : $f_+(t) := \lim_{h \downarrow 0} f(t+h)$

f_- : $f_-(t) := \lim_{h \uparrow 0} f(t+h) = \lim_{h \downarrow 0} f(t-h)$,

a. Sei $c \in (a,b]$. Sei $\varepsilon > 0$.

Dann ex. $\delta > 0$:

$(*)$ $|f(t) - f_-(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $c - \delta < t < c$

Dann gibt es zu t eine gegen t konvergente Folge $t_n \uparrow t$ in $(c-\delta, c)$:

$$f_-(t) = \lim_{t_n \uparrow t} f(t_n):$$

Dann $|f_-(t) - f_-(c)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, $c - \delta < t < c$.

Das ist die linksseitige Stetigkeit von f_-.

$(*) \Longrightarrow \left| \lim_{t \nearrow t_0} f(t) - f_-(c) \right| \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad t, t_0 \in (c-\delta, c]$

b. In jedem Punkt $c \in [a, b)$

ex. auch

$$f_+(c) = \lim_{t \searrow c} f(t).$$

Zu $\varepsilon > 0$ ex. ein $\delta > 0$:

$$|f_+(c) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad c < t < c+\delta.$$

Also gilt auch:

$$\boxed{|f_+(c) - f_-(t)| < \varepsilon, \quad c < t < c+\delta}$$

,

$$\boxed{|f_-(t) - f_-(c)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad c-\delta < t < c.}$$

S

Damit gezeigt: f_- ist ebenfalls wie eine Regelfunktion, so die einseitigen Grenzwerte existieren.

c. $f - f_-$, $f - f_+$

sind Regelfunktionen, und $= 0$ bis auf eine höchstens abzählbare Menge in $[a,b]$. Also: $\int f - f_+ = 0$.

b. Bsp: $f_- = f = f_+$

bis auf höchstens abzählbar viele Stellen in $[a,b]$.

Idee: Die Menge S der Unstetigkeitsstellen von f ist abzählbar.

Ist c eine Stetigkeitsstelle von f:

$$f_-(c) = \lim_{t \uparrow c} f(t) = f(c) = \lim_{t \downarrow c} f(t) = f_+(c)$$

4 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\Bigg| \underbrace{\int_a^b f}_{\text{Cauchy-integral}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(t_k - t_{k-1})}_{\text{Riemannsumme}} \Bigg| < \varepsilon$$

für jede Zerlegung $Z = (t_0, .., t_n)$ mit *Feinheit* $\cancel{\sup}_{1 \leqslant k \leqslant n}(t_k - t_{k-1}) < \delta$. *Hinweis:* Man verwende die gleichmäßige Stetigkeit von f 7.44.

max

Also für f stetig:

Riemannsumme $\longrightarrow$ Cauchyintegral.

Beweis: Erinnerung: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist sie sogar gleichmäßig stetig:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. $\delta > 0$:

$|f(t) - f(t+h)| < \varepsilon$, $|h| < \delta$, $t \in [a,b]$

Hier: Zu $\varepsilon > 0$ ex. $\delta > 0$:

(*) $\boxed{|f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad |u-v| < \delta}$

(*)

Dann gilt:

$$\left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(t_k)(t_k - t_{k-1}) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f - \_\_\_ \cdot \_\_\_ \right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f - \underbrace{f(t_k)(t_k - t_{k-1})}_{\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t_k)} \right|$$

$\equiv$ const.

$$= \left| \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f - f(t_k)) \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \underbrace{|f - f(t_k)|}$$

(da jedes $|t_{k-1} - t_k| < \delta$ für alle k

$$\underbrace{\max_{1 \leq k \leq n} |t_{k-1} - t_k|} < \delta$$

"Feinheit der Zerlegung $(t_0, \ldots, t_n)$"

So gilt: $$\int_{t_{k-1}}^{t_k} |f - f(t_k)|$$

$$< \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon \, \frac{t_k - t_{k-1}}{b-a}.$$

Also:

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f - f(t_k)| \le \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \frac{t_k - t_{k-1}}{b-a}$$

$= b-a$

$$= \varepsilon .$$

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon \frac{t_k - t_{k-1}}{b-a}$$

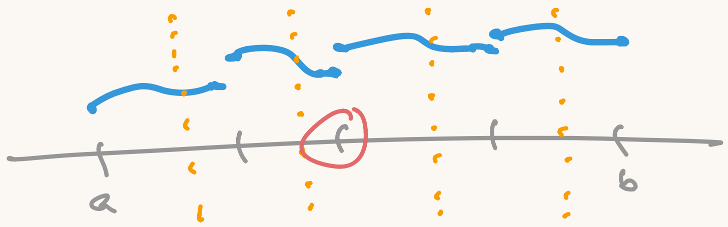
$t_n - t_{n-1} + t_{n-1} - t_{n-2} \cdots - t_0$

$= b-a.$

$$= \frac{\varepsilon}{\cancel{b-a}} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})}_{= \cancel{b-a}}$$

$$= \varepsilon$$

5 Eine Funktion ist genau dann stückweise stetig, wenn sie als Summe einer Treppenfunktion und einer stetigen Funktionen dargestellt werden kann.

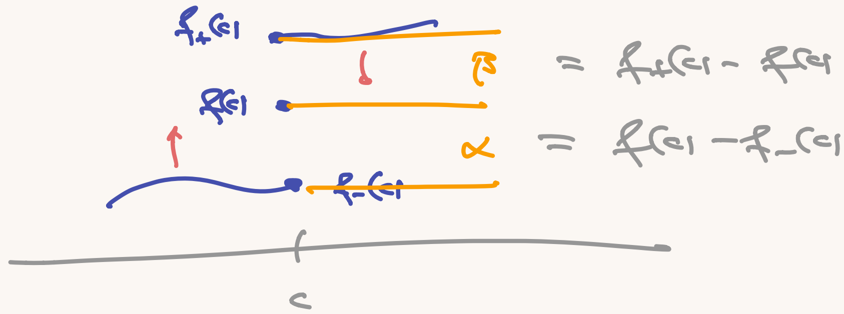


Beweis: Es genügt, eine Unstetigkeitsstelle zu behandeln.

Sei also $a < c < b$, und

$$f_-(c), \quad f(c), \quad f_+(c)$$

möglicherweise verschieden.



Dann:

$$\varphi(t) = f(t) + \alpha \cdot \chi_{[a,c)} - \beta\, \chi_{(c,b]}$$

stetig in c.

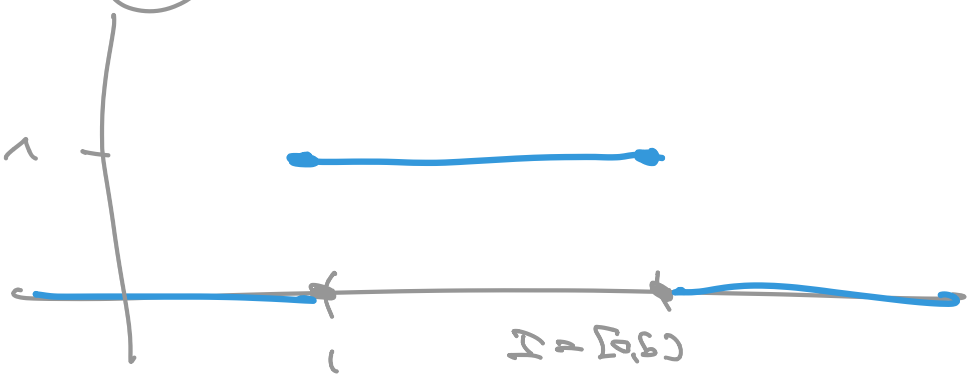
Bem:

$$f(t) = \underbrace{\varphi(t)}_{\text{stetig}} - \underbrace{\alpha\chi_{[a,c)} + \beta\chi_{[c,b]}}_{\text{Treppenfunktion.}}$$

$I \subset \mathbb{R}$ Teilmenge.

"chi"

$$\chi_I(t) = \begin{cases} 1, & t \in I \\ 0, & t \notin I. \end{cases}$$



$$\underbrace{\alpha\chi_{[a,c)} + \beta\chi_{[c,b]}}_{\text{Treppenfunktion.}}$$